



**Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach
Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)**

Stand: 29. Oktober 2008

Einleitung

Mit den Beschlüssen von 2004 hat die Kultusministerkonferenz (KMK) verbindliche länderübergreifende Bildungsstandards für die Grundschule verabschiedet, die seit dem Schuljahr 2005/2006 die Grundlage für den Grundschulunterricht in den Fächern Deutsch und Mathematik bilden. Damit gelten diese Bildungsstandards in allen Bundesländern und legen fest, welche Ziele bis zum Ende der Klasse 4 zu erreichen sind.

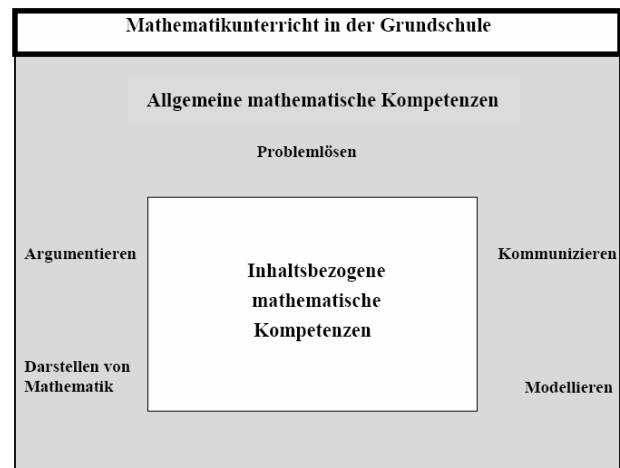
Gemäß der Gesamtstrategie der Kultusministerkonferenz zum Bildungsmonitoring (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 02.06.2006) ist künftig vorgesehen, dass Testverfahren zur Überprüfung der Bildungsstandards durch stichprobenbasierte Ländervergleiche des IQB im Primarbereich in Jahrgangsstufe 3 durchgeführt werden. Für den Primarbereich ergibt sich durch die Anbindung an die IGLU-Studie ein Fünfjahresrhythmus, d.h. der erste Ländervergleich wird im Jahr 2011 durchgeführt, der nächste Ländervergleich im Jahr 2016 usw. Darüber hinaus werden in der Grundschule in Jahrgangsstufe 3 flächendeckende Vergleichsarbeiten („VERA 3“) durchgeführt, die der landesweiten, jahrgangsbezogenen Untersuchung des Leistungsstands aller Schulen und Klassen dienen. Die Ergebnisse der zentralen Ländervergleiche und die der Vergleichsarbeiten können für die gezielte Förderung der untersuchten Klassen genutzt werden.

Der Aufbau der Bildungsstandards

Die länderübergreifenden Bildungsstandards im Fach Mathematik beschreiben Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe erreicht haben sollen. Dabei wird zwischen inhaltsbezogenen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen unterschieden. Die Bildungsstandards beschreiben und präzisieren die mathematische Grundbildung, die als Ziel des Unterrichts in der Grundschule gelten kann.

Aus dem folgenden Bild können die in den Bildungsstandards für die Grundschule ausgewiesenen fünf allgemeinen mathematischen Kompetenzen entnommen werden.

Wichtig ist die im Bild angedeutete enge Verbindung der allgemeinen (prozessbezogenen mathematischen mit den inhaltsbezogenen Kompetenzen. Mit den länderübergreifenden Bildungsstandards soll eine Vernetzung der allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen eine kontinuierliche Verbesserung des Mathematikunterrichts erreicht werden.



Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen

Die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen beziehen sich auf fünf mathematische Bereiche.

- Zahlen und Operationen
- Raum und Form
- Muster und Strukturen
- Größen und Messen
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Mit diesen Kompetenzbereichen sollen Schülerinnen und Schüler mit den zentralen mathematischen Konzepten und dem vernetzten Charakter der Mathematik vertraut gemacht werden. Hinzugekommen sind zwei Kompetenzbereiche, die traditionell nicht im Zentrum des Grundschulunterrichts standen:

- der Kompetenzbereich *Muster und Strukturen*, der wegen seiner grundlegenden fachlichen Bedeutung insofern eine besondere Rolle spielt, als er die übrigen Kompetenzbereiche in fundamentaler Weise durchdringt (vgl. Wittmann/Müller 2008).
- der Kompetenzbereich *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit*, in dem im Sinne einer grundlegenden Bildung Kompetenzen in der Stochastik vermittelt werden.

In den einzelnen Kompetenzbereichen werden in unterschiedlichem Abstraktionsgrad inhaltsbezogene

Kompetenzen formuliert, etwa zu *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit* auf der ersten Ebene die folgenden:

- Daten erfassen und darstellen
- Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen

Auf der nächsten Ebene werden die einzelnen Kompetenzen weiter ausdifferenziert. Zu *Daten erfassen und darstellen* sind folgende Standards ausgewiesen:

- in Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen,
- aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen,

Allgemeine mathematische Kompetenzen

Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen, die auch als prozessbezogene Kompetenzen bezeichnet werden, spielen eine herausragende Rolle beim Erwerb der inhaltlichen mathematischen Kompetenzen. Die mathematische Grundbildung für Schülerinnen und Schüler hängt wesentlich davon ab, in welchem Maße im Unterricht Gelegenheiten geschaffen werden, selbst oder gemeinsam *Probleme mathematisch zu lösen*, über das Verstehen und das Lösen von Aufgaben zu *kommunizieren*, über das Zutreffen von Vermutungen oder über mathematische Zusammenhänge zu *argumentieren*, Sachsituationen in der Sprache der Mathematik zu *modellieren* und für die Bearbeitung von Problemen geeignete *Darstellungen* zu ersinnen oder auszuwählen (vgl. Walther u. a. 2008).

Funktionen der Bildungsstandards

Es sind vor allem zwei Funktionen, welche die Bildungsstandards für den Unterricht wichtig machen, die *Überprüfungs-* und die *Entwicklungsfunktion*. Mit ihrer *Überprüfungsfunktion* bieten Bildungsstandards die Möglichkeit, sich der Erträge eines kompetenzorientierten Unterrichts zu vergewissern, indem untersucht wird, in welchem Maße die Standards zu den inhaltsbezogenen und allgemeinen Kompetenzen von den Schülerinnen und Schülern erreicht wurden.

In ihrer *Entwicklungsfunktion* unterstützen die Bildungsstandards einen Unterricht, der sich nicht allein auf die Aneignung von Kenntnissen und Fertigkeiten konzentriert, sondern vielmehr auf „die Entwicklung eines gesicherten Verständnisses mathe-

matischer Inhalte abzielt. Standards erfordern eine Unterrichtskultur, welche die eigene Tätigkeit der Schülerinnen und Schüler in den Vordergrund rückt. Die Entwicklung mathematischer Grundbildung „hängt nicht nur davon ab, *welche* Inhalte unterrichtet wurden, sondern in mindestens gleichem Maße davon, *wie* sie unterrichtet wurden, ...“ (KMK 2005a, S. 6). Blum (2006) schreibt hierzu: „Nur ein Unterricht, der den eigenaktiven Erwerb von Kompetenzen in lernförderlicher Arbeitsatmosphäre in den Mittelpunkt aller Lehr-/Lernanstrengungen stellt, wird Lernenden überhaupt die Chance bieten, die in den Standards formulierten Kompetenzerwartungen auch tatsächlich zu erfüllen... Etwas konkreter bedeutet „standardorientiertes Unterrichten“: Jede einzelne Unterrichtsstunde und jede Unterrichtseinheit muss sich daran messen lassen, inwieweit sie zur Weiterentwicklung inhaltsbezogener und allgemeiner Schüler-Kompetenzen beiträgt... Die wichtigste Frage ist nicht „Was haben wir durchgenommen?“, sondern „Welche Vorstellungen, Fähigkeiten und Einstellungen sind entwickelt worden?“ (S. 15 ff). Und Wittmann (2008) ergänzt hierzu, dass in einem standardorientierten Fachunterricht mehr Eigeninitiativen der Kinder und soziale Lernaktivitäten gefördert werden, als dies im traditionellen Unterricht der Fall ist. Dementsprechend sollen die Bildungsstandards die folgenden produktiven Wirkungen entfalten:

a) Weiterentwicklung von Unterricht

Lehrerinnen und Lehrer entnehmen aus den Bildungsstandards Anregungen zur *Unterrichtsumgestaltung*, zu einer Weiterentwicklung der *Unterrichtskultur*.

b) Entwicklung einer positiven Haltung zur Mathematik

Die Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen hängt eng mit den Einstellungen von Schülerinnen und Schülern zusammen, die diese zur Mathematik entwickeln. Die Orientierung an allgemeinen Kompetenzen bewirkt, dass die Freude an der Mathematik und die Entdeckerhaltung der Kinder gefördert und weiter ausgebaut werden.

c) Aufgabenkonstruktion als flexibles Werkzeug für Unterrichtsgestaltung

Durch Aufgabenbeispiele in den Bildungsstandards und deren Zuordnung zu Kompetenzen und Anforderungsbereichen wird für Lehrerinnen und Lehrer ein Instrument erkennbar, wie man Aufgaben konstruieren, analysieren, variieren, an Schülerinnen

und Schüler anpassen und wie man *Aufgaben als flexible Werkzeuge* für Unterrichtsgestaltung einsetzen kann (Walther, 2004).

- mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden;
- Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten.

Kompetenzen und Kompetenzbereiche

Allgemeine Kompetenzen

Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen sind eine Fortschreibung der bereits 1975 von Heinrich Winter formulierten „allgemeinen Lernziele“ (Mathematisieren, Explorieren, Argumentieren, Formulieren), mit denen die wesentlichen Schritte bei der Untersuchung einer „Situation“ noch deutlicher erfasst werden (Winter 1975). In den Bildungsstandards werden folgende Kompetenzen ausgewiesen:

Problemlösen

Was mit dem Begriff des *Problemlösens* in den länderübergreifenden Bildungsstandards gemeint ist, machen die folgenden Standards deutlich:

- mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden;
- Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z.B. systematisch probieren);
- Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen.

Um die folgende Testaufgabe lösen zu können, müssen die Kinder sowohl die erste als auch die zweite Kompetenz aktivieren.

Aufgabe: Wie musst du die folgenden Zahlen in den Kästchen anordnen, damit du einen möglichst großen Rest erhältst? Trage die Rechnung und ihr Ergebnis ein!

6	7	9
---	---	---

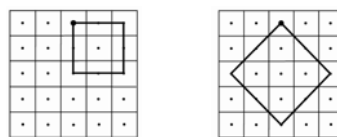
		:		=	_____
--	--	---	--	---	-------

Die allgemeine Kompetenz des *Kommunizierens* wird in den Bildungsstandards in den folgenden drei Punkten konkretisiert:

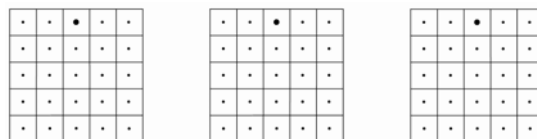
- eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren;

Die unter Kommunizieren subsumierten Kompetenzen werden in der Regel in Lehr-Lernprozessen, die interaktiv angelegt sind, aufgebaut und stehen bei der Testung nicht im Vordergrund. Fasst man aber den zweiten Standard *mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden* weiter, dann kann folgende Aufgabe als Beispiel dienen.

Aufgabenbeispiel: Hier siehst du Quadrate.



Zeichne noch drei andere Quadrate: Die Quadrate, die du zeichnest, sollen unterschiedlich groß sein. Eine Ecke des Quadrats soll immer der dicke Punkt sein. Die anderen Ecken sollen dünne Punkte sein.



Argumentieren

Unter dem Oberbegriff *Argumentieren* werden in den Bildungsstandards die folgenden Punkte angeführt:

- mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen;
- mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln;
- Begründungen suchen und nachvollziehen.

Ein gewisser Zusammenhang zur Kompetenz des Problemlösens ist unschwer zu erkennen, der insbesondere durch den in beiden Bereichen aufgeführten Standard ‚Zusammenhänge erkennen‘ deutlich wird. An dieser Stelle zeigt sich wieder, dass die allgemeinen Kompetenzen häufig schwer voneinander zu trennen und auf unterschiedliche Weise vernetzt sind.

Aufgabenbeispiel:

Harry Potter fährt mit seinen beiden Freunden zur Zauberschule. Am Ligusterweg 4 fahren sie um 6.30 Uhr los. Nach 55 min treffen sie in der Winkelgasse ein, Harry kauft einen neuen Umhang und Bücher. Der Einkauf dauert 35 min. Dann gehen sie noch eine halbe Stunde in die „Drei Besen“, um ein paar Butterbier zu trinken. Vor der Kneipe warten die drei noch 10 min., bis der Bus „Fahrender Ritter“ kommt, der zur Zauberschule fährt. Die Reise bis zur Zauberschule dauert noch 90 min.

Wann kommen sie in der Zauberschule an?
Kreuze die richtige Lösung an.

- 6.30Uhr $\xrightarrow{1h\ 30min}$ $\xrightarrow{15min}$ $\xrightarrow{10min}$ $\xrightarrow{90min}$ 9.55Uhr
- 6.30Uhr $\xrightarrow{210min}$ 10.00Uhr
- 6.30Uhr $\xrightarrow{55min}$ $\xrightarrow{35min}$ $\xrightarrow{30min}$ $\xrightarrow{10min}$ $\xrightarrow{90min}$ 10.10Uhr
- 6.30Uhr $\xrightarrow{55min}$ $\xrightarrow{35min}$ $\xrightarrow{45min}$ $\xrightarrow{10min}$ $\xrightarrow{90min}$ 10.25Uhr

Modellieren

Beim *Modellieren* im Verständnis der Bildungsstandards geht es in der Hauptsache darum,

- Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen zu entnehmen;
- Sachprobleme in die Sprache der Mathematik zu übersetzen, innermathematisch zu lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation zu beziehen;
- zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben zu formulieren.

Aufgabenbeispiel:

Zu acht verschiedenen Vogelarten wird Kindern eine Tabelle mit dem Gewicht der jeweiligen Eier sowie ein Diagramm mit der Anzahl von Eiern in den jeweiligen Vogelnestern präsentiert.

Die Aufgabenstellung dazu lautet:

Alle Eier in einem Vogelnest nennt man Gelege.
Welcher Vogel hat das schwerste Gelege?

Um die Aufgabe lösen zu können, müssen die Kinder der Tabelle und dem Diagramm die relevanten Informationen entnehmen, in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und auf die Ausgangssituation beziehen. Die Aufgabe lässt sich nicht lösen, wenn man nur technische

Grundfertigkeiten anwendet.

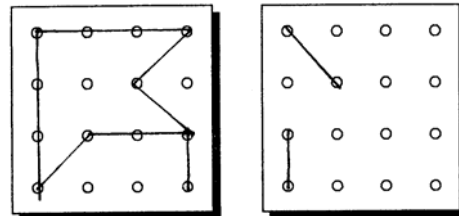
Darstellen

Für den Bereich des *Darstellens* schließlich geben die Bildungsstandards folgende Unterpunkte an:

- für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen;
- eine Darstellung in eine andere übertragen;
- Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten.

Aufgabenbeispiel:

Übertrage das Spiegelbild von Martins Figur auf das rechte Geo-Brett.



Martins Figur

Spiegelbild

Technische Grundfertigkeiten

Im Zuge ihrer Weiterentwicklung wurden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen um die *Technischen Grundfertigkeiten* erweitert, welche die Voraussetzung für den Erwerb weiterer inhaltsbezogener Kompetenzen und für die produktive Nutzung von Mathematik und für weiterführende Lernprozesse sind. Diese müssen mit besonderem Nachdruck geübt werden (vgl. Wittmann/Müller 2007 [Blitzrechnenoffensive]).

Aufgabenbeispiele:

1) $10\text{ min} = \underline{\hspace{2cm}}\text{s}$

2) Du willst die Zahl 365 mit Plättchen in der Stellenwerttafel darstellen.
Wie viele Plättchen brauchst du?

3) Rechne im Kopf und schreibe das Ergebnis auf!

$8 \cdot 250 = \underline{\hspace{2cm}}$

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen

Die überragende Bedeutung der in den Bildungsstandards ausgewiesenen allgemeinen mathematischen Kompetenzen besteht darin, dass sie zentrale mathematische Prozesse bei der mathematischen Tätigkeit erfassen - im Forschungsprozess wie im Lernprozess. Daher kommt ihnen auf allen Stufen eine führende Rolle für die Umsetzung der Bildungsstandards und für die Vermittlung eines angemessenen Bildes von Mathematik zu. Die inhaltsbezogenen Kompetenzen erhalten mathematisches Leben nur in Verbindung mit den allgemeinen Kompetenzen (Wittmann/Müller 2008).

Zahlen und Operationen

Der Kompetenzbereich *Zahlen und Operationen* gliedert sich in drei Bereiche: Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen, Rechenoperationen verstehen und beherrschen, in Kontexten rechnen. Die Bereiche sind eng miteinander verbunden und bauen aufeinander auf, besitzen aber auch eine gewisse Eigenständigkeit (vgl. Rasch/Schütte 2008).

Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen

- den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen;
- Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen;
- sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden);

Rechenoperationen verstehen und beherrschen

- die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen;
- die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen;
- mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden;
- verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten; Rechenfehler finden, erklären und korrigieren;
- Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen;
- schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden;
- Lösungen durch Überschlagsrechnungen und durch Anwenden der Umkehroperation kontrollieren;

In Kontexten rechnen

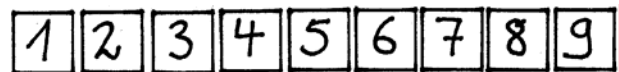
- Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwi-

schen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben;

- das Ergebnis auf Plausibilität prüfen;
- bei Sachaufgaben entscheiden, ob eine Überschlagsrechnung ausreicht oder ein genaues Ergebnis nötig ist;
- Sachaufgaben systematisch variieren;
- einfache kombinatorische Aufgaben (z.B. Knobelaufgaben);
- durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen.

Aufgabenbeispiel :

Ute hat die Ziffernkärtchen:



Sie legt damit vierstellige Zahlen.

Sie darf für jede Aufgabe jede Ziffernkarte nur einmal verwenden.

Wie heißt die kleinste Zahl, die sie legen kann?

Raum und Form

Mit *Raum und Form* verbindet man zunächst „Geometrie“ und damit das Beschreiben, Zeichnen und Ausmessen von Figuren und Körpern. Das aber ist nur ein Teil dessen, was die Bildungsstandards mit Raum und Form ansprechen. Inhaltlich heben sie für die Grundschule zentrale Kompetenzen – sowohl Begrifflichkeiten wie Aktivitäten – heraus, die auch für die Weiterentwicklung geometrischen Denkens bedeutsam sind. Zugleich, sozusagen quer dazu, beschreiben sie allgemeine mathematische Kompetenzen, in deren Entwicklung diese inhaltlichen Aspekte einzubetten sind (vgl. Wollring/Rinkens 2008).

Im Einzelnen sind folgende Kompetenzen und Standards ausgewiesen:

Sich im Raum orientieren

- über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen;
- räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen (Anordnungen, Wege, Pläne, Ansichten);
- zwei und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen).

Geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen

- Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen;

- Körper und ebene Figuren in der Umwelt wieder erkennen;
- Modelle von Körpern und ebenen Figuren herstellen und untersuchen (bauen, legen, zerlegen, zusammenfügen, ausschneiden, falten ...);
- Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen.

Einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen, darstellen

- ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern);
- Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen;
- Symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln.

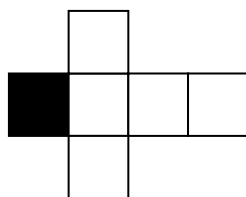
Flächen und Rauminhalte vergleichen und messen

- die Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen;
- Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren untersuchen;
- Rauminhalte vergleichen und die enthaltene Anzahl von Einheitswürfeln bestimmen.

Aufgabenbeispiel zum Standard: *Zwei und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen):*

Im Würfelnetz ist eine Fläche schwarz angemalt.

Kreuze die gegenüberliegende Fläche an!



Muster und Strukturen

Bereits um einfache Sachaufgaben verstehen zu können, kommt es ganz wesentlich darauf an, Muster in die Sachsituation hineinzulesen, die im Text gar nicht genannt sind. Bei der Lösung müssen die jeweils genannten Daten in einen größeren Zusammenhang gebracht und mathematisch verknüpft werden. Dies gelingt umso leichter, je mehr Muster zur Verfügung stehen und je mehr man gelernt hat,

in Beziehungen zu denken (vgl. Wittmann/Müller 2008).

Der Kompetenzbereich umfasst folgende Kompetenzen und Standards:

Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen

- strukturierte Zahldarstellungen (z.B. Hundertertafel) verstehen und nutzen;
- Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z.B. Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen;
- arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben.

funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen

- funktionale Beziehungen in Sachaufgaben erkennen, sprachlich beschreiben (z.B. Menge – Preis) und entsprechende Aufgaben lösen;
- funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen;
- einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen.

Aufgabenbeispiel zum Standard *Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen:*

Vervollständige das Pfeilmuster.

↖	↑	↖	↑	↖	↑
←	↗	←	↗	←	↗
↙	→	↙	→	↙	→
↓	↘	↓	↘		
↘	↓	↘	↓		

Größen und Messen

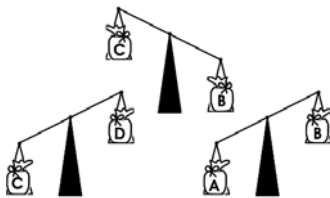
In Bezug auf den Kompetenzbereich *Größen und Messen* erwerben und vertiefen Kinder im Mathematikunterricht der Grundschule

- Wissen über die Größenbereiche (Länge, Geldwerte, Zeit/Zeitspannen, Masse/Gewicht sowie Flächen- und Rauminhalte) und ihre Repräsentanten, Bezeichnungen und Relationen;
- Fähigkeiten in Bezug auf das Messen und das Schätzen von und Rechnen mit Größen sowie die Klassifizierung von Messinstrumenten;
- Vorstellungen über Größen im Sinne von Stützpunktvorstellungen.

Das Wissen über Größen und die Einsicht in Messprozesse eröffnen Kindern in der Grundschule die Tür zum Verstehen und zum kritisch-reflexiven Umgang mit ihrer physikalischen Umwelt und diesbezüglichen Daten mit Mitteln der Mathematik. Dieser unmittelbare Bezug zur Lebenswelt macht die Bedeutung des Inhaltsbereichs „Größen und Messen“ im Hinblick auf mathematische Grundbildung und die Entwicklung mathematischer Mündigkeit aus (vgl. Peter-Koop/Nührenbörger 2008).

Aufgabenbeispiel zum Standard *Größen vergleichen, messen und schätzen*:

Tim und Jana wiegen vier Säcke. Welcher Sack ist am leichtesten?



- Sack A
- Sack B
- Sack C
- Sack D

Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Die Stochastik ist neu in den länderübergreifenden Bildungsstandards im Fach Mathematik. Zwei Kompetenzen mit jeweils zwei Standards sind in diesem Bereich ausgewiesen:

Daten erfassen und darstellen

- in Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen
- aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen

Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen

- Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich);

- Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen.

Jede Darstellung von Daten hat einen bestimmten Informationswert. Damit die Daten ihren Informationswert bekommen, müssen sie so strukturiert werden, dass die zu vermittelnde Information vom Leser aus der Darstellung entnommen werden kann. Bei der Auswahl der Darstellungsform muss man sich folglich überlegen, welche Information bzw. welcher Aspekt, der in den Daten enthalten ist, verdeutlicht werden soll. Entsprechend erfordert das Lesen und Verstehen von Diagrammen Kenntnisse darüber, was mit dem jeweiligen Diagramm ausgedrückt werden kann, welche Informationen also in einer bestimmten Darstellungsform enthalten sein können und welche nicht (vgl. Hasemann/Mirwald 2008).

Aufgabenbeispiel zum Standard *Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen*:

Sabine, Alex, Murat und Max würfeln mit zwei Würfeln und zählen die Punkte zusammen. Jeder sucht sich eine Zahl zwischen 2 und 12 aus. Gewonnen hat, wer nach 10 Versuchen seine Zahl am häufigsten gewürfelt hat.

Wer hat die größten Gewinnchancen?

- Sabine wählt die Zahl 3.
- Alex wählt die Zahl 5.
- Murat wählt die Zahl 7.
- Max wählt die Zahl 12.

Testentwicklung

Mit der Erarbeitung der Bildungsstandards war der explizite Anspruch verbunden, diese in Testaufgaben zu übersetzen. Damit soll ein System aufgebaut werden, das auf Stichprobenbasis die Überprüfung der Standarderreicherung erlaubt. Alle Testaufgaben sind das Ergebnis eines Entwicklungsprozesses, in den Grundschullehrkräfte aus allen 16 Ländern eingebunden waren. Ihr Auftrag war es, eine Vielzahl von Testaufgaben zu konstruieren, mit denen es gelingen konnte, stabile Normen für zukünftige Ländervergleiche bereitzustellen. Dazu mussten folgende sieben Arbeitsschritte absolviert werden:

- 1) Fachdidaktisch und lernpsychologisch fundierte Konkretisierungen der Kompetenzen in den jeweiligen Fächern,
- 2) die auf diesen Vorüberlegungen basierende Erarbeitung von Richtlinien zur Konstruktion von Testaufgaben/Items (Item- und Testspezifikationen),
- 3) die Testaufgabenentwicklung durch erfahrene Lehrkräfte,
- 4) die in Abstimmung zwischen Fachdidaktik und Psychometrie stattfindende Optimierung und Überarbeitung der Testaufgaben, teilweise auf der Basis von Daten aus kleinen Gelegenheitsstichproben,
- 5) die empirische Erprobung der entwickelten Aufgaben in großen Schülerstichproben (Feldtest),
- 6) die Normierung der Aufgaben auf der Basis national repräsentativer Stichproben von Schülerinnen und Schülern und schließlich
- 7) die Bereitstellung empirisch fundierter Kompetenzmodelle, auf deren Grundlage festgestellt werden kann, welche Prozentsätze von Schülerinnen und Schülern die Zielerwartungen (Standards) erreicht haben.

Konkret wurden für die Testerstellung im Fach Mathematik die oben beschriebenen sechs allgemeinen und fünf inhaltlichen Kompetenzen festgelegt. Da die Abdeckung aller Kompetenzen große Aufgaben- bzw. Itemzahlen erfordert, wurden für die Entwicklung der Testaufgaben im Fach Mathematik Strukturen aufgebaut, wie sie in Abbildung 1 zu sehen sind.



Abbildung 1 Architektur der Testentwicklung

Wie der Abbildung zu entnehmen ist, wurden die Aufgabenentwickler in vier Regionalgruppen eingeteilt. Dies erleichterte einen regen Austausch zwischen den Gruppenmitgliedern und ermöglichte intensive Diskussionen bei den Regionalgruppentreffen. Bei ihrer Arbeit erhielten die Mitglieder der Regionalgruppen fachdidaktische Unterstützung durch wissenschaftliche Berater bzw. Beraterinnen. Die Aufgaben wurden zuerst von Lehrkräften erprobt und anschließend einer Bewertergruppe vorgelegt, die sich aus Vertretern der Fachdidaktik, der Bildungsforschung und der Schulpraxis zusammensetzt; die Aufgaben wurden begutachtet und ggf. überarbeitet.

Im Prozess der Testaufgabenherstellung wurden rund 900 Teilaufgaben (= Items) erstellt, die jeweils den allgemeinen und inhaltlichen Kompetenzen zugeordnet wurden. Die Aufgaben wurden im Frühjahr 2006 im Rahmen der Internationalen Grundschul-Lese-Untersuchung (IGLU) in einer national repräsentativen Stichprobe von Dritt- und Viertklässlern erprobt. Das Ziel dieser Pilotstudie bestand darin, solche Items zu identifizieren, die für die Testung geeignet sind und ungeeignete auszuschneiden. Ungeeignet heißt hier:

- Die Aufgabe ist zu leicht (fast alle Schülerinnen und Schüler lösen sie).
- Die Aufgabe ist zu schwer (kaum ein Schüler bzw. eine Schülerin löst sie).
- Die Aufgabe ist nicht trennscharf (gute Schülerinnen und Schüler lösen sie nicht häufiger als schwache Schüler).
- Die Aufgabe erfasst nicht die Kompetenz, die sie erfassen sollte.
- Die Aufgabe benachteiligt spezifische Schülergruppen (z. B. die Mädchen).

Insgesamt bearbeiteten rund 12.000 Schülerinnen und Schüler aus allen 16 Ländern die rund 900 Teilaufgaben. Die Schülerinnen und Schüler kamen aus den 3. und 4. Jahrgangsstufen. Dabei wurde ein Untersuchungsplan umgesetzt, bei dem jedem Schüler/jeder Schülerin nur eine Teilmenge der Aufgaben vorgelegt wurde. Die Testung dauerte zwei Schulstunden. Nach den gerade genannten Kriterien wurden 370 Teilaufgaben ausgeschlossen. Die übrigen Aufgaben kamen in die Normierung. Die Normierungsstudie mit rund 9.000 Schülern wurde im Jahr 2007 durchgeführt mit der Zielsetzung, nationale Skalen, wie sie seit IGLU oder PISA bekannt sind, bereitzustellen.

Kompetenzskala und Kompetenzstufen

In den Bildungsstandards werden mathematische Kompetenzen ausgewiesen, welche die Breite der mathematischen Leistung abdecken, die am Ende der 4. Jahrgangsstufe erwartet werden kann. Dies gilt sowohl für die allgemeinen mathematischen Kompetenzen als auch für die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen. Im Zuge der Auswertung der empirischen Daten aus der Pilotierung und Normierung der Aufgaben wurden die Leistungen auf einem Maßstab mit einem Mittelwert von 500 Punkten in der 4. Jahrgangsstufe abgetragen. Ergänzend wurde ein Kompetenzstufenmodell erstellt, das eine präzisere Beschreibung der Leistungen auf fünf Stufen erlaubt.

Die Erarbeitung eines solchen Kompetenzstufenmodells ist unabdingbare Voraussetzung für eine Definition von Mindest-, Regel- und Optimal- bzw. Maximalstandards:

- *Mindeststandards* beziehen sich auf ein definiertes Minimum an Kompetenzen, das alle Schülerinnen und Schüler bis zu einem bestimmten Bildungsabschnitt erreicht haben sollten.
- *Regelstandards* beziehen sich auf Kompetenzen, die im Durchschnitt von den Schülerinnen und Schülern bis zu einem bestimmten Bildungsabschnitt erreicht werden sollen. Will man Schulen in einem System der Weiterentwicklung von Unterricht Ziele anbieten, die über Regelstandards hinausgehen, so kann es sinnvoll sein, einen Leistungsbereich zu definieren, der über den Regelstandards liegt und im Folgenden als *Regelstandard plus* bezeichnet wird.

- *Maximalstandards* beziehen sich auf Leistungserwartungen, die unter sehr guten bzw. ausgezeichneten individuellen Lernvoraussetzungen und der Bereitstellung gelingender Lerngelegenheiten innerhalb und außerhalb der Schule erreicht werden und die Erwartungen der Bildungsstandards übertreffen.

Unabhängig von der Form, Mindest-, Regel- oder Maximalstandards, sollten Festlegungen von Kompetenzerwartungen zugleich bestimmten inhaltlichen, testtheoretischen, fachlichen, curricularen wie auch fachdidaktischen Kriterien genügen. Hier sind insbesondere zu nennen:

- Anbindung der Kompetenzstufenmodelle an internationale Vorarbeiten, wie sie in TIMSS, PISA und IGLU realisiert wurden.
- fünf annähernd gleich breite Kompetenzstufen,
- fachdidaktisch gut interpretierbare und vertretbare Grenzen zwischen den Kompetenzstufen,
- Erarbeitung eines globalen Kompetenzstufenmodells, das für alle Leitideen (inhaltliche Kompetenzen) gilt,
- und dessen Stufen mit Hilfe unterschiedlicher Ausprägungen der allgemeinen mathematischen Kompetenzen beschrieben werden kann,
- ergänzend leitideenspezifische Beschreibungen der Kompetenzstufen.

Neben den genannten testtheoretischen, fachlichen und fachdidaktischen Kriterien müssen Festlegungen von Kompetenzerwartungen sowohl bildungspolitischen Erwartungen wie auch pädagogischen Erfordernissen entsprechen. Kompetenzstufenmodelle sollten in dieser Hinsicht

- herausfordernde und zugleich angemessene Leistungserwartungen beschreiben, die der Leistungsstreuung innerhalb und zwischen den Ländern in angemessener Weise Rechnung tragen,
- trotz der zu erwartenden unterschiedlich hohen Anteile von Schülerinnen/Schülern, die den Mindest- oder Regelanforderungen nicht entsprechen, für alle Länder ein „Leistungsminimum“ beschreiben, das von allen Schülerinnen und Schülern mittelfristig erreicht wird,
- vorhandene wie auszubauende Leistungsressourcen verdeutlichen,
- motivierende Leistungserwartungen formulieren, die Entwicklungsimpulse an den Schulen auslösen, hierfür dienen insbesondere die *Regelstandards plus*,
- breite bildungspolitische Akzeptanz insbesondere bei den Lehrkräften erreichen,

- in einer spannungsreichen Relation zu den internationalen Ergebnissen stehen.

Für alle Länder, wenn auch in unterschiedlichem Maße, gilt eine Orientierung an den international führenden Staaten. Die innerdeutschen Maßstäbe müssen dieses Spannungsverhältnis sinnvoll abbilden.

Vorgehen

Im Grundschulbereich wurden für das Fach Mathematik im Jahr 2006 Aufgaben in der 3. und 4. Jahrgangsstufe durch das IQB pilotiert, im Jahr 2007 normiert. Unter Beteiligung von Fachdidaktikern, Lehrkräften und Psychometrikern wurden Vorschläge für Kompetenzstufenmodelle erarbeitet. Für die Grundschule konnte in den Erhebungen 2006 und 2007 eine breite Datenbasis gewonnen werden, die es erlaubt abzuschätzen, wie sich Verteilungen auf die Kompetenzstufen bundesweit darstellen.

Die Festlegung der Stufen geschah unter der fachdidaktischen Ägide von Frau Prof. Dr. Kristina Reiss (LMU München) und lehnte sich eng an Vorarbeiten aus IGLU 2001 und den bayerischen Orientierungsarbeiten an. Als Ergebnis liegt das folgende Kompetenzstufenmodell vor, das sich auf die Jahrgangsstufe 4 bezieht.

IGLU wurde ein Maßstab mit einem Mittelwert von $M = 500$ und einer Standardabweichung von $SD = 100$ in der 4. Jahrgangsstufe definiert. Die Standardabweichung ist dabei ein Maß für die Streuung der Schülerwerte um den Mittelwert herum. Die Breite der Stufen beträgt 70 Punkte, die Stufe I ist nach unten, die Stufe V nach oben offen. Bei den Beschreibungen der Stufen werden vorhandene Kompetenzen anstelle von Defiziten zu beschreiben.

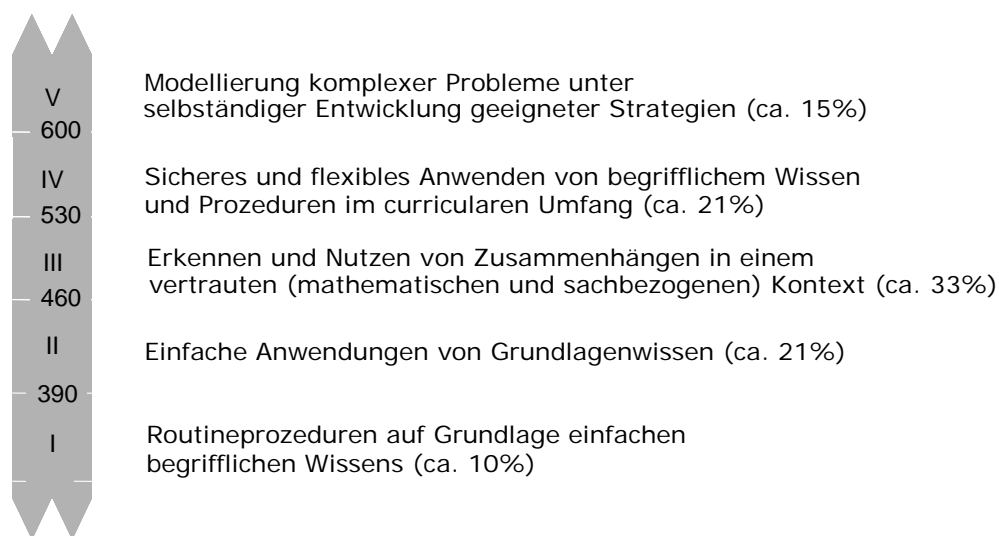
Beschreibungen der Kompetenzstufen

Globalmodell

Stufe I (Punktwerte unter 390): Technische Grundlagen (Routineprozeduren auf Grundlage einfachen begrifflichen Wissens)

- Einfache mathematische Begriffe und Prozeduren sind bekannt und können in einem innermathematischen Kontext bzw. in einem aus dem Alltag vertrauten oder gut geübten Kontext korrekt reproduziert werden.
- Insbesondere werden grundlegende Begriffe der ebenen Geometrie und gängige Repräsentanten standardisierter Einheiten richtig verwendet.

Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule



Das Modell ist global definiert und lässt sich auf alle inhaltlichen Kompetenzen anwenden. Allgemeine Kompetenzen dienen zur Beschreibung der Leistungen auf den verschiedenen Stufen. Wie in PISA und

- Kleinere Zahlen können in Bezug auf ihre Größe verglichen werden.

- Zahldarstellungen in Stellentafeln werden sicher gelesen.
- Die Grundaufgaben des kleinen Einspluseins und Einmaleins werden beherrscht und bei halbschriftlichen und schriftlichen Rechenverfahren genutzt, wenn die Aufgabenstellungen keine besonderen Schwierigkeiten aufweisen.
- Klar strukturierten Diagrammen, Schaubildern und Tabellen mit Bezug zur Lebenswirklichkeit können relevante Daten entnommen werden.

Die eigentlichen Ziele des Mathematikunterrichts in der Grundschule werden auf dieser Stufe weitgehend verfehlt.

Stufe II (Punktwerte von 390-459): Einfache Anwendungen von Grundlagenwissen (Routineprozeduren in einem klar strukturierten Kontext)

- Die Struktur des Dezimalsystems wird genutzt, Gesetzmäßigkeiten werden erkannt und bei der Fortsetzung einfacher Zahlenfolgen, beim strukturierten Zählen und systematischen Probieren berücksichtigt.
- Aufgaben zur Addition, Subtraktion und Multiplikation werden halbschriftlich und schriftlich durchgeführt.
- Überschlagsrechnungen werden durchgeführt.
- Insbesondere können in diesem Zusammenhang einfache Sachaufgaben gelöst werden. Aus dem Alltag vertraute proportionale Zuordnungen werden erkannt und angewendet.
- Bei einfachem Zahlenmaterial wird das Umwandeln von Größen in gegebene Einheiten auch bei gemischten Größenangaben durchgeführt.
- Grundbegriffe der räumlichen Geometrie werden korrekt verwendet, wenn diese einen Bezug zum Alltag haben.
- Räumliche Beziehungen werden zur Lösung einfacher Probleme genutzt. Wesentliche Grundbegriffe aus dem Umfeld von Zufall und Wahrscheinlichkeit werden korrekt verwendet („sicher“, „unmöglich“, „wahrscheinlich“).

Schülerinnen und Schüler auf dieser Stufe erfüllen noch nicht die in den Bildungsstandards der KMK für die 4. Jahrgangsstufe formulierten Erwartungen. In diesem Sinne und kongruent zu den oben aufgeführten Begriffsdefinitionen kann die Zugehörigkeit

zur zweiten Kompetenzstufe als Erreichung eines Mindeststandards interpretiert werden.

Stufe III (Punktwerte von 460-529): Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen in einem vertrauten (mathematischen und sachbezogenen) Kontext

- Das erlernte Wissen kann auf dieser Stufe flexibel in unterschiedlichen Problemstellungen genutzt werden, die einem vertrauten Kontext zuzuordnen sind.
- Insbesondere wird mit Zahlen und Operationen im curricularen Umfang sicher umgegangen.
- Überschlagsrechnungen werden auch bei großen Zahlen sicher durchgeführt.
- Strukturelle Aspekte werden bei gut geübten Inhalten gesehen und können kommuniziert werden.
- Das betrifft auch Inhalte der Geometrie, wobei etwa zwischen verschiedenen Darstellungsformen einer Figur vermittelt werden kann.
- Einfache Sachsituationen werden modelliert und die damit verbundenen Problemstellungen gelöst.
- Daten und Informationen können in bekanntem Kontext flexibel dargestellt werden.
- Bei nicht allzu komplexen Zufallsexperimenten werden Gewinnchancen korrekt eingeschätzt und begründet.

Schülerinnen und Schüler, die diese Kompetenzstufe oder eine höhere erreicht haben, erfüllen die in den Bildungsstandards beschriebenen Erwartungen, so dass die Zugehörigkeit zur Kompetenzstufe III oder einer höheren bedeutet, dass die von der KMK festgelegten Regelstandards erreicht wurden.

Stufe IV (Punktwerte von 530-599): Sicheres und flexibles Anwenden von begrifflichem Wissen und Prozeduren im curricularen Umfang

- Auch in einem wenig vertrauten Kontext wird mathematisches Wissen sicher angewendet.
- Eigene Vorgehensweisen werden korrekt beschrieben, die Lösungswege anderer Kinder werden verstanden und reflektiert.
- Das Rechnen wird im curricularen Umfang in allen Varianten sicher beherrscht.

- Begriffe der ebenen und räumlichen Geometrie werden flexibel verwendet.
- Zahldarstellungen in Stellenwerttafeln können auch bei sehr großen Zahlen nach Vorschrift selbstständig manipuliert und systematisch verändert werden.
- Das Rechnen mit Größen ist sicher und flexibel und umfasst insbesondere Näherungsrechnungen und Überschlagsrechnungen.
- Informationen aus unterschiedlichen Quellen können in einen Zusammenhang gestellt und in Modellierungsaufgaben selbstständig verwendet und manipuliert werden.

Mit der Zugehörigkeit zur Kompetenzstufe IV kann davon ausgegangen werden, dass ein Leistungsniveau erreicht wurde, das über den Erwartungen der Bildungsstandards liegt. Schülerinnen und Schüler, die sich mindestens auf dieser Stufe befinden, erreichen einen Regelstandard plus.

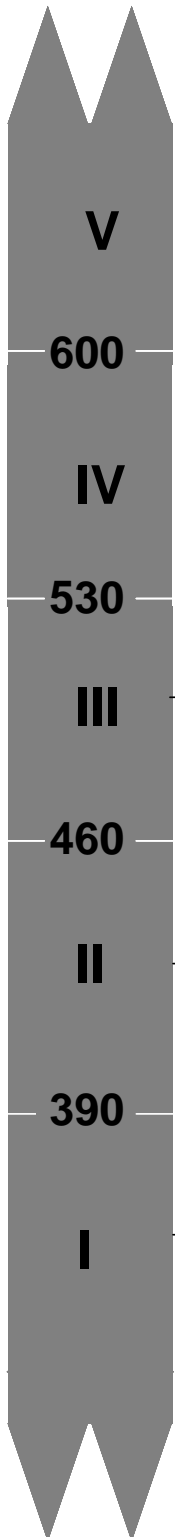
Stufe V (Punktwerte ab 600): Modellierung komplexer Probleme unter selbstständiger Entwicklung geeigneter Strategien

- Mathematische Problemstellungen werden auch in einem unbekanntem Kontext angemessen, sicher und flexibel bearbeitet.
- Dabei werden geeignete Strategien, sinnvolle Bewertungen oder Verallgemeinerungen auf hohem Niveau geleistet.
- Umfangreiches curricular verankertes Wissen wird in ungewohnten Situationen flexibel genutzt.
- Das Vorgehen kann sicher und nachvollziehbar kommuniziert und begründet werden.
- Komplexe Sachsituationen werden modelliert und bearbeitet, wobei besondere Schwierigkeiten wie die Verwendung von Tabellen, der Umgang mit zusammengesetzten Größen oder das Rechnen mit Zahlen in Kommaschreibweise auftreten können.
- Es können auch ungewohnte funktionale Zusammenhänge analysiert und genutzt werden.
- Die Lösung von Aufgaben kann ein hohes Maß an räumlichem Denken oder entsprechende analytische Fähigkeiten voraussetzen.

Mit der Stufe 5 ist ein Leistungsbereich definiert, der nur bei sehr günstigen individuellen Voraussetzungen und optimalen schulischen und außerschulischen Lernangeboten erreicht werden kann. Wir sprechen hier von der Erreichung eines Maximalstandards.

Die beiden Abbildungen auf den folgenden Seiten illustrieren die fünf Kompetenzstufen anhand von Aufgaben aus unterschiedlichen inhaltlichen Kompetenzbereichen.

Illustration der Kompetenzstufen 1-3 anhand dreier Items der inhaltlichen Kompetenzbereiche Raum und Form sowie Zahlen und Operationen



Würfelnetz
 Im Würfelnetz ist eine Fläche schwarz angemalt. Kreuze die gegenüber liegende Fläche an.

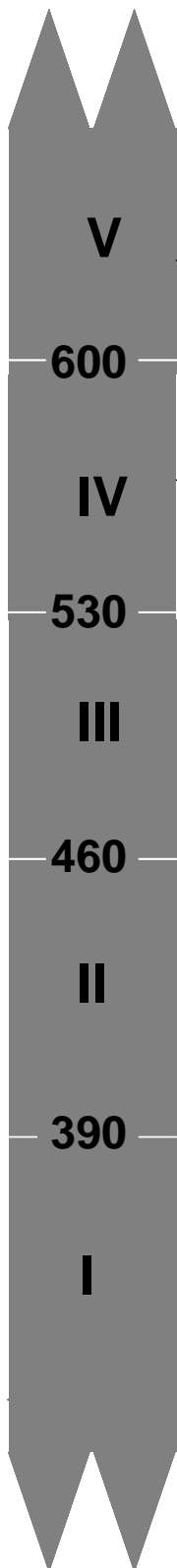
Rechne schriftlich.

$$348 + 87 + 609 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Schreibe die Buchstaben unter die richtige Stelle im Zahlenstrahl:

A: 77 000

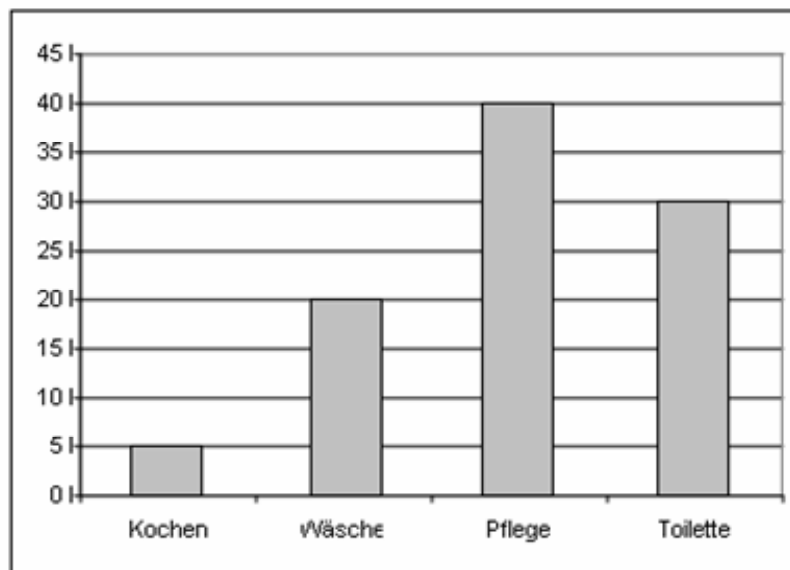
Illustration der Kompetenzstufen 4 und 5 anhand zweier Items der inhaltlichen Kompetenzbereiche Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit sowie Zahlen und Operationen



Tina und Ester sammeln Fußball-Bilder. Zusammen haben sie 25 Bilder. Tina hat 7 Bilder mehr als Esther. Wie viele Bilder hat Esther?

- 7
- 9
- 16
- 18

Durchschnittlicher Wasserverbrauch einer Person an einem Tag (in Litern)



Beschreibungen der Kompetenzstufen für die verschiedenen inhaltlichen Kompetenzen.

Auf den vergangenen Seiten wurden die fünf festgelegten Kompetenzstufen inhaltlich beschrieben und anhand von Aufgaben illustriert. Im Folgenden soll ausgeführt werden, welche Kompetenzstände auf der jeweiligen Stufe pro inhaltlicher Kompetenz erreicht werden. Nicht möglich ist eine solche Darstellung für die allgemeinen Kompetenzen, da die große Mehrzahl der Aufgaben nicht eindeutig nur einer allgemeinen Kompetenz zugeordnet werden können. Daher dienen die allgemeinen Kompetenzen bei den Beschreibungen eher der Graduierung in Form der Kompetenzstufen

Wir beginnen mit dem Kompetenzbereich Zahlen und Operationen.

Zahlen und Operationen

Stufe I (Punktwerte unter 390): Technische Grundlagen (Routineprozeduren auf Grundlage einfachen begrifflichen Wissens)

- Alle Grundaufgaben des kleinen Einspluseins und Einmaleins werden beherrscht.
- Kleinere Zahlen können halbschriftlich addiert und subtrahiert werden.
- Das Verfahren der schriftlichen Addition wird erfolgreich bei zwei Summanden verwendet.
- Die schriftliche Subtraktion wird sicher ausgeführt, wenn kein Übertrag zu berücksichtigen ist.
- Der Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion wird bei einfachen Rechnungen genutzt.
- Bereits aus den ersten Schuljahren bekannte Strategien wie etwa das Verdoppeln werden auch in größeren Zahlenräumen angewendet.
- Einfache Zahlen wie Hunderter- oder Tausenderzahlen können am Zahlenstrahl bei gegebener Skalierung dargestellt und in Bezug auf ihre Größe verglichen werden.

Stufe II (Punktwerte von 390-459): Einfache Anwendungen von Grundlagenwissen (Routineprozeduren in einem klar strukturierten Kontext)

- Die Struktur des Dezimalsystems wird beim Umgang mit Zahlen in verschiedenen Darstellungen genutzt.
- Gesetzmäßigkeiten werden erkannt und bei der Fortsetzung einfacher Zahlenfolgen sowie beim strukturierten Zählen berücksichtigt.
- Aufgaben zur Addition, Subtraktion und Multiplikation werden halbschriftlich und schriftlich durchgeführt.
- Einfache Überschlagsrechnungen werden gemacht und auch zur Bestimmung der Größenordnung von Ergebnissen herangezogen.
- Einfache Rechenaufgaben können durch systematisches Probieren gelöst werden.
- In Bezug auf die Grundrechenarten werden grundlegende mathematische Begriffe (z.B. „Summe“) korrekt benutzt.
- Die Grundrechenarten werden in einfachen Sachsituationen angewendet.

Stufe III (Punktwerte von 460-529): Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen in einem vertrauten (mathematischen und sachbezogenen) Kontext

- Zahlen werden im curricularen Umfang in unterschiedlichen Darstellungen (z.B. in einer Stellenwerttafel) sicher gelesen und geschrieben.
- Alle halbschriftlichen und schriftlichen Rechenverfahren werden beherrscht, wobei die Division auf einstellige Divisoren beschränkt ist.
- Grundaufgaben des mündlichen Rechnens werden auch in nicht vertrautem Kontext angewendet.
- Überschlagsrechnungen werden selbst bei großen Zahlen sicher durchgeführt, Zahlen werden sinnvoll gerundet.
- Die Beziehungen zwischen Addition und Subtraktion bzw. Multiplikation und Division werden erkannt.
- Einfache strukturelle Aspekte werden bei gut geübten Inhalten gesehen und können kommuniziert werden (z.B. im Zusammenhang mit den Einmaleinsreihen).

- Im curricular gegebenen Zahlenraum werden einfache Sachsituationen modelliert und die damit verbundenen Problemstellungen gelöst.

Stufe IV (Punktwerte von 530-599): Sicheres und flexibles Anwenden von begrifflichem Wissen und Prozeduren im curricularen Umfang

- Das Rechnen wird im curricularen Umfang bei allen Rechenarten und in allen Varianten sicher beherrscht, wobei die schriftliche Division einbezogen ist.
- Die Eigenschaften des Dezimalsystems werden genauso sicher und systematisch genutzt wie die Beziehungen zwischen Operationen.
- Diese Kenntnisse werden bei der Untersuchung von Zahlenfolgen angewendet, in denen beispielsweise auch Fehler erkannt und begründet werden.
- Die Rechenverfahren werden flexibel kombiniert, wobei Rechnungen auch mehrere Schritte umfassen können, geeignet geschätzt bzw. gerundet wird und Lösungsstrategien wie das systematische Probieren auch bei komplexeren Rechenwegen und Gleichungen genutzt werden.
- Rechenregeln sind explizit bekannt und können sinnvoll angewendet werden.
- Das begriffliche Wissen umfasst auch speziellere Fachbegriffe und kann sicher verwendet und kommuniziert werden.
- Komplexe Sachsituationen werden geeignet modelliert, rechnerisch korrekt bearbeitet und ihre Lösungen angemessen dargestellt.

Stufe V (Punktwerte ab 600): Modellierung komplexer Probleme unter selbstständiger Entwicklung geeigneter Strategien

- Schwierigere mathematische Aufgaben können auf unterschiedlichen Wegen korrekt gelöst werden.
- Mathematische Eigenschaften wie etwa die Zerlegbarkeit natürlicher Zahlen in Faktoren werden für Problemlösungen genutzt.
- Auch schwierige Gleichungen werden auf dieser Grundlage bearbeitet bzw. durch systematisches Probieren gelöst.

- Komplexe Sachsituationen werden modelliert und die damit verbundenen rechnerischen Probleme korrekt bearbeitet.
- Besondere Aspekte wie das Rechnen mit Bruchzahlen oder das Rechnen mit Zahlen in Kommaschreibweise stellen keine Hürde dar.

Raum und Form

Stufe I (Punktwerte unter 390): Technische Grundlagen (Routineprozeduren auf Grundlage einfachen begrifflichen Wissens)

- Es werden in allen Bereichen Grundkenntnisse nachgewiesen, die reproduktiv eingesetzt werden können.
- Das begriffliche Wissen beschränkt sich auf einfache Formen der ebenen Geometrie mit klar trennbaren Eigenschaften und ist nur in einem eingeschränkten Kontext anwendbar.
- Spiegelbilder einfacher geradlinig begrenzter Figuren werden korrekt gezeichnet.
- Mit geometrischen Formen kann auf Grundlage bildlicher Darstellungen bzw. des Gitternetzes gearbeitet werden.

Stufe II (Punktwerte von 390-459): Einfache Anwendungen von Grundlagenwissen (Routineprozeduren in einem klar strukturierten Kontext)

- Zusätzlich zu den eben beschriebenen Grundbegriffen werden Grundbegriffe der räumlichen Geometrie korrekt verwendet, wobei diese in der Regel im Alltag verankert sind (z.B. Würfel).
- Räumliche Beziehungen werden dabei auch zur Lösung einfacher Probleme genutzt.
- Achsenspiegelungen werden in gut strukturierten Umgebungen (Gitternetz, Geobrett) ausgeführt.
- Ihre wesentlichen Eigenschaften werden zur Bearbeitung unterschiedlicher Aufgabenstellungen herangezogen.

Stufe III (Punktwerte von 460-529): Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen in einem vertrauten (mathematischen und sachbezogenen) Kontext

- Durch das Curriculum vorgegebene Begriffe der ebenen und räumlichen Geometrie werden korrekt verwendet.

- Räumliche Beziehungen werden zur Lösung komplexerer Aufgaben genutzt, sodass erweiterte Problemlösefähigkeiten gezeigt werden.
- Achsenspiegelungen sind nun über die Phänomene hinausgehend in ihren wesentlichen Eigenschaften bekannt.
- Vertraute ebene Figuren (z.B. Quadrat, Rechteck, Kreis) können in Hinblick auf ihre Symmetrieeigenschaften untersucht werden.
- Bei Körpern kann mit verschiedenen Darstellungen (z.B. Netz) sinnvoll gearbeitet werden, wobei Zusammenhänge genutzt werden.

Stufe IV (Punktwerte von 530-599): Sicheres und flexibles Anwenden von begrifflichem Wissen und Prozeduren im curricularen Umfang

- Begriffe der ebenen und der räumlichen Geometrie werden flexibel verwendet, wobei unterschiedliche Darstellungen sicher in ihren Zusammenhängen gesehen werden.
- Bedingungen etwa zur Lage und Größe von Quadraten werden bei ihrer Konstruktion berücksichtigt.
- Beispiele von Würfel- und Quadernetzen werden korrekt erkannt, eventuelle Fehler können korrigiert werden.
- Maßstabsgerechtes Zeichnen wird bei gegebenen Teilfiguren geleistet.
- Es wird eine Vertrautheit mit grundlegenden mentalen Operationen im Raum verlangt.
- Insbesondere verlangt die Lösung von Aufgaben auf dieser Stufe unterschiedliche allgemeine mathematische Kompetenzen, teilweise auch in Kombination.

Stufe V (Punktwerte ab 600): Modellierung komplexer Probleme unter selbstständiger Entwicklung geeigneter Strategien

- Umfangreiches curricular verankertes Wissen wird auch in ungewohnten Situationen flexibel genutzt.
- Begriffe und Methoden der ebenen und räumlichen Geometrie können in komplexen Situationen angewendet werden.

- Insbesondere werden Verallgemeinerungen geleistet.
- Die Lösungen mancher Aufgaben erfordern ein hohes Maß an räumlichem Denken, aber auch eine gute analytische Durchdringung.
- Aufgabenstellungen und ihre Lösungen können kritisch reflektiert werden.
- Es kann ohne Vorgaben maßstabsgerecht gezeichnet werden.

Muster und Strukturen

Stufe I (Punktwerte unter 390): Technische Grundlagen (Routineprozeduren auf Grundlage einfachen begrifflichen Wissens)

- Es werden sehr einfache Gesetzmäßigkeiten in Mustern erkannt, die auf geometrischen Grundformen bzw. vertrauten numerischen Zusammenhängen („leichte“ Einmaleinsreihen) beruhen.
- Zahldarstellungen in Stellentafeln werden auch bei größeren Zahlen sicher gelesen.

Stufe II (Punktwerte von 390-459): Einfache Anwendungen von Grundlagenwissen (Routineprozeduren in einem klar strukturierten Kontext)

- Bei einfachen, bildlich oder numerisch gegebenen Folgen wird die Grundstruktur des Musters erkannt (z.B. fortgesetzte Addition einer kleinen Zahl).
- Diese Grundstruktur bzw. Gesetzmäßigkeit kann auch begründet werden.
- Zahlen werden in Stellenwerttafeln sicher dargestellt. Einfache proportionale Zuordnungen (wie etwa das Verdoppeln) werden erkannt und angewendet.

Stufe III (Punktwerte von 460-529): Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen in einem vertrauten (mathematischen und sachbezogenen) Kontext

- Gesetzmäßigkeiten bei Mustern werden erkannt und Muster entsprechend fortgesetzt.
- Dabei werden analytische Fähigkeiten genutzt, sodass die Bestimmung eines beliebigen Elements an einer vorgegebenen Stelle auch ohne

eigene Anschauung oder konkretes Manipulieren möglich ist.

- Gesetzmäßigkeiten bei Zahlenfolgen werden bei Zahlenmaterial im curricularen Umfang erkannt und begründet bzw. kommuniziert.
- Zahlen werden in einer Stellentafel gezielt manipuliert, und das Ergebnis wird sinnvoll interpretiert.
- Proportionale Zuordnungen werden erkannt und interpretiert.
- In einfachen Sachsituationen werden funktionale Beziehungen erkannt und interpretiert, sowie insbesondere proportionale Zuordnungen zur Modellierung und Lösung von Problemen genutzt.

Stufe IV (Punktwerte von 530-599): Sicheres und flexibles Anwenden von begrifflichem Wissen und Prozeduren im curricularen Umfang

- Komplexe Muster können analysiert und zeichnerisch oder numerisch fortgesetzt werden.
- Dabei werden insbesondere Gesetzmäßigkeiten auch dann erkannt und begründet, wenn Zahlenfolgen nicht durch die Addition einer bestimmten Zahl oder die Multiplikation mit einem bestimmten Faktor erzeugt wurden bzw. wenn die Glieder nicht in Form von Zahlen, sondern in Form von Rechentermen gegeben sind.
- Zusammenhänge zwischen verschiedenen Darstellungen (z.B. bildliche bzw. numerische Darstellung) werden auch bei schwierigeren Folgen oder Mustern gesehen.
- Zahldarstellungen in Stellenwerttafeln können auch bei sehr großen Zahlen nach Vorschrift selbstständig und systematisch verändert werden.
- Proportionale Zuordnungen werden zur Modellierung und Lösung komplexer Sachaufgaben genutzt.

Stufe V (Punktwerte ab 600): Modellierung komplexer Probleme unter selbstständiger Entwicklung geeigneter Strategien

- Der Umgang auch mit schwierigen Zahlenfolgen (z.B. unter Verwendung von Quadratzahlen oder mehreren Rechenarten) ist sicher.

- Gesetzmäßigkeiten werden auch erkannt, wenn verschiedene Operationen verknüpft werden müssen und können begründet werden.
- Arithmetische Muster werden nach gegebenen Kriterien konstruiert, wobei eigenständig Lösungsstrategien entwickelt werden.
- Proportionale Zuordnungen können im Zusammenhang mit einfachen Bruchzahlen und Dezimalbrüchen angewendet und in Sachsituationen auch unter Verwendung von tabellarischen Darstellungen interpretiert werden.
- Auch ungewohnte funktionale Zusammenhänge werden in Sachsituationen modelliert, analysiert und genutzt.

Größen und Messen

Stufe I (Punktwerte unter 390): Technische Grundlagen (Routineprozeduren auf Grundlage einfachen begrifflichen Wissens)

- Einfache Repräsentanten von standardisierten Einheiten für Geldwerte, Zeitspannen, Längen, Gewichte und Rauminhalte sind bekannt.
- Größenvergleiche werden bei übereinstimmender Einheit bzw. in Bezug auf Längen und Gewichten auch bei benachbarten Einheiten durchgeführt.
- Bei Geldwerten werden Eurobeträge in Cent umgewandelt, wobei in einfachen Fällen auch die Kommaschreibweise verwendet wird.
- Bei Längen und Gewichten kann in eine benachbarte Einheit ohne Verwendung der Kommaschreibweise umgewandelt werden.
- Größenordnungen von sehr einfachen, aus dem Alltag bekannten Repräsentanten werden korrekt angegeben.

Stufe II (Punktwerte von 390-459): Einfache Anwendungen von Grundlagenwissen (Routineprozeduren in einem klar strukturierten Kontext)

- Das Umwandeln von Größen in gegebene Einheiten wird auch bei gemischten Größenangaben durchgeführt, wobei das Zahlenmaterial einfach ist.
- Geeignete Repräsentanten für Größen sind bekannt.

- Größen können in einfachen Sachsituationen angewendet werden, wobei die dabei benutzten Einheiten einen deutlichen Bezug zum Alltag der Kinder haben und ihnen somit nicht nur aus dem Unterricht vertraut sind.

Stufe III (Punktwerte von 460-529): Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen in einem vertrauten (mathematischen und sachbezogenen) Kontext

- Größen werden in jeweils benachbarte Einheiten umgewandelt, wobei gemischte Größen, aber auch komplexeres Zahlenmaterial (z.B. große Zahlen, einfache Brüche, Zahlen in Kommaschreibweise auch mit einer Null vor dem Komma) verwendet werden.
- Es werden für die verschiedenen Einheiten geeignete Repräsentanten verwendet bzw. es werden Repräsentanten auch in komplexeren Sachsituationen sinnvoll zugeordnet.

Stufe IV (Punktwerte von 530-599): Sicheres und flexibles Anwenden von begrifflichem Wissen und Prozeduren im curricularen Umfang

- Das Rechnen mit Größen ist sicher und flexibel und umfasst insbesondere Näherungsrechnungen und Überschlagsrechnungen (z.B. mit Geldwerten), aber auch das angemessene Schätzen sowie die Bestimmung von Repräsentanten bei weniger vertrauten Größen.
- Insbesondere werden die Kenntnisse auch in komplexen Sachsituationen angewendet, wobei sowohl das Entwickeln eines geeigneten Modells für eine Lösung als auch das rechnerische Lösen geleistet werden.
- Dabei können auch mehrere Größen auftreten und Zusammenhänge zwischen ihnen genutzt werden.

Stufe V (Punktwerte ab 600): Modellierung komplexer Probleme unter selbstständiger Entwicklung geeigneter Strategien

- Es werden schwierige Umrechnungen insbesondere im Zusammenhang mit Zeitspannen und Gewichten durchgeführt, bei denen auch gemischte Größen und nicht benachbarte Einheiten auftreten.

- Das Zahlenmaterial umfasst den ganzen curricularen Umfang, wobei gleichzeitig sehr große und sehr kleine Zahlen auftreten, die Kommaschreibweise verwendet wird oder Brüche benutzt werden.
- Komplexe Sachsituationen, die nicht unbedingt dem eigenen Erfahrungsbereich entnommen sind, werden sicher modelliert und auch bei rechnerisch hohen Anforderungen gelöst.
- Dabei werden innerhalb einer Aufgabe Bezüge zwischen verschiedenen Größen hergestellt sowie mehrere Grundrechenarten und schwieriges Zahlenmaterial verwendet.
- Zusammenhänge zwischen Größen werden erkannt, interpretiert und genutzt.
- Insbesondere können Größen im Zusammenhang mit proportionalen Zuordnungen verwendet werden.
- Es werden logische Beziehungen auf der Grundlage eines umfassenden Verständnisses gegebener Größen analysiert.
- Informationen zu Größen werden dem jeweiligen Kontext angemessen dargestellt.

Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Stufe I (Punktwerte unter 390): Technische Grundlagen (Routineprozeduren auf Grundlage einfachen begrifflichen Wissens)

- Es wird mit einfachen Daten sinnvoll umgegangen, wobei insbesondere Informationen aus klar strukturierten Diagrammen, Schaubildern und Tabellen entnommen werden.
- Einfache Daten können darüber hinaus in gegebenen Diagrammen, Schaubildern und Tabellen ergänzt werden.
- In allen Fällen handelt es sich um übersichtliche Daten, die keine besondere Strukturierung erfordern (etwa relativ kleine natürliche Zahlen).

Stufe II (Punktwerte von 390-459): Einfache Anwendungen von Grundlagenwissen (Routineprozeduren in einem klar strukturierten Kontext)

- Der Umgang mit Daten umfasst Zahlen im curricular gegebenen Umfang.

- Diagramme, Schaubilder und Tabellen können dabei eine erweiterte Struktur haben, also beispielsweise mehrere Spalten umfassen.
- Sowohl explizite als auch (nahe liegende) implizite Informationen werden Diagrammen, Schaubildern und Tabellen entnommen.
- Es werden wesentliche Grundbegriffe aus dem Umfeld von Zufall und Wahrscheinlichkeit wie „sicher“, „unmöglich“ oder „wahrscheinlich“ korrekt verwendet. Gewinnchancen können bei sehr einfachen Zufallsexperimenten eingeschätzt werden, wobei eine explizite Begründung nicht geleistet werden muss.

Stufe III (Punktwerte von 460-529): Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen in einem vertrauten (mathematischen und sachbezogenen) Kontext

- Daten und Informationen können auf verschiedene Arten dargestellt und entsprechenden (auch in Textform gegebenen) Darstellungen entnommen werden.
- Dabei ist der Kontext der Lebenswelt und den Alltagserfahrungen der Kinder zugeordnet.
- Es werden Zusammenhänge zwischen den Darstellungsformen genutzt.
- Bei nicht allzu komplexen Zufallsexperimenten werden die relativen Gewinnchancen korrekt angegeben und die Einschätzung wird sinnvoll begründet.

Stufe IV (Punktwerte von 530-599): Sicheres und flexibles Anwenden von begrifflichem Wissen und Prozeduren im curricularen Umfang

- Die Nutzung von Informationen aus Diagrammen, Schaubildern und Tabellen erfolgt völlig flexibel und ist auch bei wenig strukturiertem Informationsmaterial möglich.
- Informationen aus unterschiedlichen Quellen und ggf. auch Darstellungsformen können in einen Zusammenhang gestellt werden.
- Die entnommenen Daten werden in Modellierungsaufgaben eigenständig verwendet.

Stufe V (Punktwerte ab 600): Modellierung komplexer Probleme unter selbstständiger Entwicklung geeigneter Strategien

- Der Umgang mit Daten berücksichtigt auch Detailinformationen dem jeweiligen Kontext angemessen und umfasst die selbstständige Entnahme sowie Aufbereitung der Daten.
- Sie können damit in unterschiedlichen Problemaufgaben angemessen verwendet werden.
- Insbesondere werden entsprechende Modellierungsaufgaben und anspruchsvolle Probleme sicher gelöst.
- Zufallsexperimente werden angemessen in Bezug auf die Wahrscheinlichkeit bestimmter Ereignisse beurteilt und können etwa in Bezug auf Gewinnchancen verglichen werden.

Verteilung auf die Kompetenzstufen

In der Abbildung auf Seite 11 sind bereits in Klammern die prozentualen Anteile der Viertklässler auf den Kompetenzstufen eingetragen. Die Daten wurden im Rahmen der Normierungsstudie gewonnen (s. Seite 11). Man sieht dort, dass sich etwa ein Drittel von ihnen auf der dritten Kompetenzstufe befindet. Diese Kinder verfügen über eine solide Grundlage für den weiteren Kompetenzerwerb in Mathematik. Jeweils etwa ein Fünftel (21%) werden auf der zweiten bzw. der vierten Kompetenzstufe verortet. Zehn Prozent der Kinder kommen nicht über das durch die erste Kompetenzstufe definierte Niveau hinaus. Schülerinnen und Schüler in dieser Stufe müssen in besonderer Weise gefördert werden. Andernfalls besteht die Gefahr, dass diese Schüler selbst in einfachen mathemathikhaltigen schulischen Situationen nicht ohne Hilfe zurechtkommen. In die höchste Stufe werden hingegen 15 Prozent klassifiziert. Diese sichtbare, nicht allzu kleine und sehr leistungsstarke Gruppe von Kindern schafft es, deutlich über dem Durchschnitt liegende Anforderungen zu erfüllen. Insbesondere sind diese Kinder in der Lage, nicht nur den ehrgeizig formulierten Bildungsstandards zu genügen, sondern eigene kreative Ideen gezielt bei der Lösung von Aufgaben einzusetzen, unabhängig davon, welchen Kompetenzbereichen diese zugeordnet sind. Summiert man die Prozentsätze der Stufen 3 bis 5, so ergibt sich, dass rund 70 Prozent der Schülerinnen und Schüler der 4. Jahr-

gangsstufe die in den Standards formulierten Kompetenzerwartungen erfüllen. Rund 20 Prozent erreichen wenigstens Mindeststandards, der Anteil der leistungsschwächsten Schülerinnen und Schüler (Stufe 1) liegt bei 10 Prozent.

Interpretationen der Leistungen in der 3. Jahrgangsstufe

Da zukünftige Ländervergleiche und flächendeckende Vergleichsarbeiten in der 3. Jahrgangsstufe stattfinden werden, wurden in der Pilotierungs- und Normierungsstichprobe auch Schülerinnen und Schüler dieser Gruppe getestet. Leistungen in der 3. Jahrgangsstufe können ebenfalls auf dem gerade berichteten Maßstab abgebildet werden. Es zeigte sich in den Studien zwischen der 3. und 4. Jahrgangsstufe ein Mittelwertsunterschied, der ziemlich genau einer Kompetenzstufe, also 70 Punkten entspricht. Als Konsequenz ergeben sich daraus die folgenden Interpretationen:

- Schülerinnen und Schüler der 3. Jahrgangsstufe, deren Leistungswerte unter 320 Punkten liegen, gehören zur leistungsschwächsten Gruppe. Er-

wartet wird, dass sich diese Schülerinnen und Schüler in der 4. Jahrgangsstufe auf Kompetenzstufe I befinden werden.

- Schülerinnen und Schüler der 3. Jahrgangsstufe, deren Leistungswerte zwischen 320 und 390 liegen, werden am Ende der 4. Jahrgangsstufe voraussichtlich die Stufe II erreichen.
- Schülerinnen und Schüler der 3. Jahrgangsstufe, die mit ihren Leistungen auf Kompetenzstufe II (ab 390 Punkten) oder höher liegen, werden voraussichtlich am Ende der 4. Jahrgangsstufe mindestens auf Stufe III liegen.
- Schülerinnen und Schüler der 3. Jahrgangsstufe auf Kompetenzstufe III (ab 460 Punkten) werden am Ende der 4. Jahrgangsstufe voraussichtlich Leistungen auf Kompetenzstufe IV erreichen.
- Schülerinnen und Schüler der 3. Jahrgangsstufe auf Kompetenzstufe IV oder höher (ab 530 Punkten) werden voraussichtlich am Ende der 4. Jahrgangsstufe die Stufe V erreichen.

Literatur

(wird noch später eingefügt.)