
Vergleichsarbeiten 2026
8. Jahrgangsstufe (VERA-8)
Mathematik
DIDAKTISCHE HANDREICHUNG
TEIL II

Fachdidaktische Orientierung
Leitidee *Messen*



Inhaltsverzeichnis

1	EINLEITUNG	3
2	BILDUNGSSTANDARDS UND KOMPETENZMODELL IM FACH MATHEMATIK.....	3
3	DIE LEITIDEE <i>MESSEN</i>	6
3.1	SCHWERPUNKTTHEMA: <i>EBENE FIGUREN</i>	9
3.2	<i>EBENE FIGUREN</i> IN VERA-8	14
4	ABSCHLIEßENDE ANMERKUNGEN	20
5	LITERATURVERZEICHNIS.....	21
6	ABBILDUNGSVERZEICHNIS.....	23
7	VERZEICHNIS DER BEISPIELAUFGABEN	23

Autorinnen¹ der fachdidaktischen Erläuterungen in Teil II sind Lisa Kämmerling, Marlena Meyer und Antonia Rewer. Die gezeigten Testaufgaben entstanden in Kooperation von Lehrkräften aus neun Bundesländern und Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktikern unter Federführung der Arbeitsgruppe Prof. Greefrath, Universität Münster (fachdidaktische Leitung) und des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen.

Haftungsausschluss:

Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle übernehmen wir keine Haftung für Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der eigenen Inhalte und der Inhalte externer Links. Für den Inhalt der verlinkten Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien
auch online finden können?

<https://www.iqb.hu-berlin.de/de/schule/aufgaben/seki/vera-8-mathematik/>

¹ Aufgrund der dynamischen Diskussion zum sprachlichen Umgang mit geschlechtlicher Vielfalt sowie der Positionierung des Rats für deutsche Rechtschreibung und der Schulbehörden einiger Länder gegen Schreibweisen mit Wortbinnenzeichen (z. B. Genderstern) verwenden wir Doppelnennungen (z. B. Schülerinnen und Schüler) oder geschlechtsneutrale Formulierungen (z. B. Lehrkräfte). Hiermit sind ausdrücklich Personen aller Geschlechter gemeint.

1 Einleitung

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK, 2004, 2005, 2012) mit ihren Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen bilden die Grundlage für die VERgleichsArbeiten in der 8. Jahrgangsstufe (VERA-8) im Fach Mathematik. Daher wird in dieser didaktischen Handreichung zunächst der Aufbau der Bildungsstandards vorgestellt. Anschließend werden die beiden Schwerpunkte, die in den diesjährigen Ergänzungsmodulen zur Wahl stehen, näher erläutert: die Leitidee *Messen* mit einem Fokus auf *Ebene Figuren* sowie die Leitidee *Daten und Zufall* mit einem Fokus auf das Thema *Zufall*. Es werden insbesondere zu beiden Schwerpunkten fachdidaktische Herausforderungen hinsichtlich typischer Fehler von Lernenden sowie hinsichtlich der Auswahl geeigneter Aufgaben geschildert und wissenschaftlich fundierte Zugänge vorgestellt, wie mit diesen in der Unterrichtspraxis umgegangen werden kann. In den dazugehörigen Kapiteln 3 und 4 werden außerdem Aufgaben aus VERA-8 zu den diesjährigen Schwerpunktsetzungen präsentiert. Dabei handelt es sich um Beispiele für Aufgabenformulierungen, welche die verschiedenen allgemeinen Kompetenzen adressieren und daher insbesondere im Regelunterricht zur Förderung ebendieser Kompetenzen herangezogen werden können.

2 Bildungsstandards² und Kompetenzmodell im Fach Mathematik

Im Anschluss an die Ergebnisse großer internationaler Vergleichsstudien – wie etwa der PISA-Studie oder TIMSS – führte die Kultusministerkonferenz (KMK) ab dem Jahr 2003 Bildungsstandards für die Fächer Deutsch, Mathematik und die erste Fremdsprache (Englisch/Französisch) ein³. Eine grundlegende Wende stand bevor: Während zuvor der *Input* im Vordergrund stand, also der Blick auf die zu unterrichtenden Inhalte und Themen die Lehrplanentwicklung dominierte, sollte nun auch der *Output* stärkere Beachtung finden, also der Aufbau von Kompetenzen, Wissensstrukturen und Fertigkeiten über die die Schülerinnen und Schüler nach erfolgreichem Unterricht verfügen sollen. Die OECD betont dabei den Anwendungscharakter von Mathematik:

² Die Bildungsstandards für Mathematik wurden für den Ersten und Mittleren Schulabschluss weiterentwickelt und 2022 von der KMK verabschiedet (KMK, 2022). Die Didaktische Handreichung Teil II bezieht sich auf die Bildungsstandards, die 2004 und 2003 von der KMK beschlossen worden sind, da sich die Normierungsaufgaben für die neuen Bildungsstandards noch in der Entwicklung befinden.

³ <https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>

„Mathematische Grundbildung umfasst die Fähigkeit des Einzelnen, Mathematik in einer Vielzahl von Kontexten zu formulieren, anzuwenden und zu interpretieren. Sie umfasst mathematisches Argumentieren und die Verwendung mathematischer Konzepte, Verfahren, Fakten und Werkzeuge zur Beschreibung, Erklärung und Vorhersage von Phänomenen. Sie hilft dem Einzelnen, die Rolle zu erkennen, die die Mathematik in der Welt spielt, und begründete Urteile und Entscheidungen zu treffen, die von konstruktiven, engagierten und reflektierten Bürgerinnen und Bürgern benötigt werden.“
(OECD, 2013, S. 25, eigene Übersetzung)

Zu diesem Zweck benennen die Bildungsstandards Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe anhand zentraler Fachinhalte erworben haben sollen (KMK, 2004, 2005). Dabei wird davon ausgegangen, dass ein allgemeinbildender Mathematikunterricht Schülerinnen und Schülern die folgenden drei *Grunderfahrungen* ermöglicht (Winter, 1995, S. 37):

1. Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
2. mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
3. in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Die Bildungsstandards umfassen in ihrem Wesen die benannten Grunderfahrungen sowie Inhalte, Kompetenzen und Niveaustufen, wie das folgende Kompetenzmodell für das Fach Mathematik darlegt. Das Kompetenzmodell liefert einen *Handlungsrahmen* für Lehrpersonen und Schulen, zur Einhaltung verbindlicher Ziele sowie zur Weiterentwicklung von Schule und Unterricht (Klieme et al., 2003). Es werden in diesem Modell zunächst die folgenden drei Dimensionen unterschieden (siehe Abbildung 1):

1. *Allgemeine mathematische Kompetenzen*
2. *Leitideen*
3. *Anforderungsbereiche*

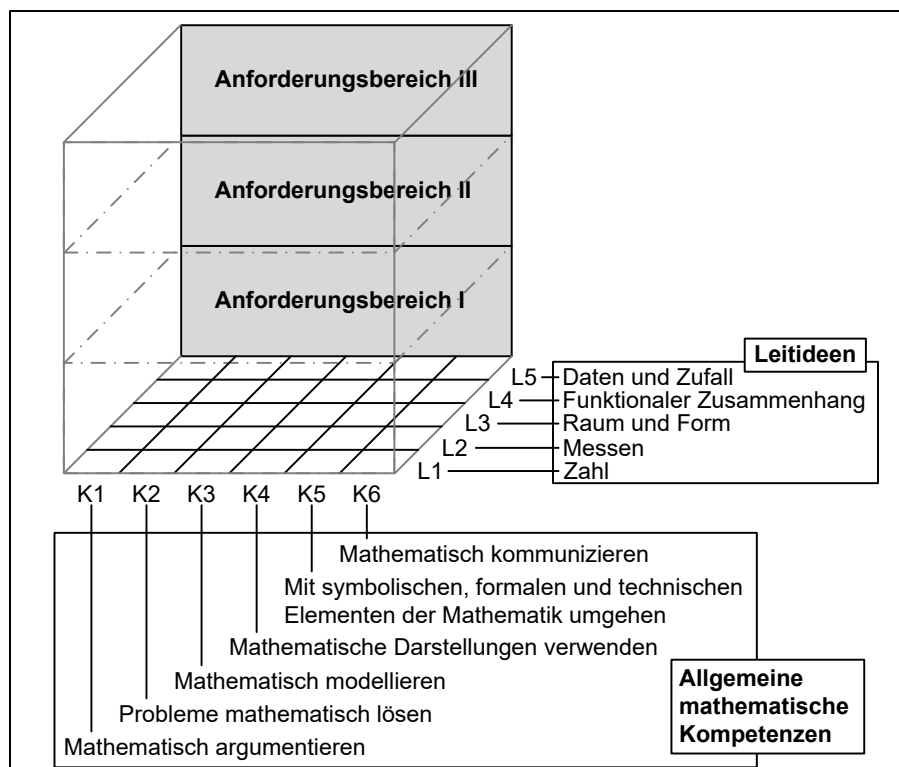


Abbildung 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards

Die *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* bilden die Prozessdimension des Modells. Dabei wird vom Grundgedanken ausgegangen, „das Können der Schüler an den *Kompetenzen* festzumachen, die sie beim Bearbeiten von Aufgaben zu aktivieren haben“ (Leiss & Blum, 2010, S. 33). Im Einzelnen sind dies die Kompetenzen *Mathematisch argumentieren* (K1), *Probleme mathematisch lösen* (K2), *Mathematisch modellieren* (K3), *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4), *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) und *Mathematisch kommunizieren* (K6). Diese *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* sollen differenziert betrachtet werden, auch wenn sie üblicherweise im Verbund erworben werden und häufig auch gemeinsam angewendet werden müssen. Insbesondere werden bei der Bearbeitung von komplexeren mathematischen Aufgaben oft mehrere dieser Kompetenzen benötigt. Mit der getrennten Betrachtung ist die Absicht verbunden, spezifische Eigenschaften und Anforderungen von Aufgaben im Mathematikunterricht transparent zu machen, was eine differenziertere Planung des Mathematikunterrichts ermöglicht. So kann ein mathematischer Inhalt den Schülerinnen und Schülern entlang verschiedener durchzuführender mathematischer Tätigkeiten zugänglich gemacht werden. Inhalte können durch die multiperspektivische und wiederholte Betrachtung eher in ihrer Gänze verstanden werden und mathematische Kompetenzen anhand unterschiedlichster Erscheinungen über den Inhalt hinaus erworben werden.

Jedoch reicht der Blick auf die *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* für eine produktive Gestaltung des Mathematikunterrichts nicht aus (Leiss & Blum, 2010). Daher bilden die

Leitideen eine zweite Dimension des Modells, die die mathematischen Inhalte umfasst. Die fünf Leitideen sind *Zahl* (L1), *Messen* (L2), *Raum und Form* (L3), *Funktionaler Zusammenhang* (L4) und *Daten und Zufall* (L5). In den Bildungsstandards wird zu den Leitideen erläutert:

„Eine Leitidee vereinigt Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete und durchzieht ein mathematisches Curriculum spiralförmig. Die Zuordnung einer inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz zu einer mathematischen Leitidee ist nicht in jedem Fall eindeutig, sondern davon abhängig, welcher Aspekt mathematischen Arbeitens im inhaltlichen Zusammenhang betont werden soll.“ (KMK, 2004, S. 9).

Leitideen folgen keinem fachdidaktischen Aufbau im Sinne einer zeitlichen Abfolge im Lernprozess („erst kommt das Zählen, dann kommt das Messen, usw.“), sondern sie erlauben es, bestimmte mathematische Inhalte unter einer Kategorie zusammenzufassen (Greefrath 2018, Blum 2010).

Die dritte Dimension enthält die drei *Anforderungsbereiche*. Sie beschreiben die Komplexität von Aufgaben, denn das Bearbeiten und Lösen von Aufgaben fordert mathematische Kompetenzen in unterschiedlichen Ausmaßen (KMK, 2004). Es werden dabei in der Regel drei Anforderungsbereiche unterschieden. Mit dem *Anforderungsbereich I* werden Anforderungen an allgemeine Kompetenzen beschrieben, die zum *Reproduzieren* unterrichtlicher Inhalte befähigen. Zum *Anforderungsbereich II* zählen solche Anforderungen an allgemeine Kompetenzen, die es Schülerinnen und Schülern ermöglichen, *Zusammenhänge herzustellen* und Gelerntes anzuwenden. In den *Anforderungsbereich III* gehören diejenigen Anforderungen, die es Schülerinnen und Schülern abverlangen, zu *verallgemeinern und zu reflektieren* (KMK, 2004).

Im Folgenden wird die Leitidee *Messen* fokussiert.

3 Die Leitidee *Messen*

Für die Leitidee *Messen* (L2) werden die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen in den Bildungsstandards für den *Mittleren Schulabschluss* folgendermaßen konkretisiert (KMK, 2004, S. 11).

Die Schülerinnen und Schüler

- *nutzen das Grundprinzip des Messens, insbesondere bei der Längen-, Flächen- und Volumenmessung, auch in Naturwissenschaften und in anderen Bereichen,*
- *wählen Einheiten von Größen situationsgerecht aus (insbesondere für Zeit, Masse, Geld, Länge, Fläche, Volumen und Winkel),*
- *schätzen Größen mit Hilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten,*

- *berechnen Flächeninhalt und Umfang von Rechteck, Dreieck und Kreis sowie daraus zusammengesetzten Figuren,*
- *berechnen Volumen und Oberflächeninhalt von Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel sowie daraus zusammengesetzten Körpern,*
- *berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen, auch unter Nutzung von trigonometrischen Beziehungen und Ähnlichkeitsbeziehungen,*
- *nehmen in ihrer Umwelt gezielt Messungen vor, entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse sowie den gewählten Weg in Bezug auf die Sachsituation.*

In den Bildungsstandards Mathematik für den *Hauptschulabschluss* (KMK, 2005) finden sich viele der genannten inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen wieder. Dabei werden jedoch einige Einschränkungen vorgenommen. Es entfallen Volumen- und Oberflächenbestimmung von Kegel und Kugel, sowie die Bestimmung von Streckenlängen und Winkelgrößen auch unter Nutzung der Trigonometrie. In beiden Varianten der Bildungsstandards wird im Bereich *Messen* der Umweltbezug besonders hervorgehoben, sei es bei der situationsangemessenen Auswahl von Einheiten, der Größenordnungsschätzung, dem Entnehmen von Maßangaben aus Quellenmaterial oder dem Bewerten von Messergebnissen im Kontext einer Sachsituation.

Dass gerade dieser Bezug zu realen Objekten in der Leitidee eine besondere Stellung einnimmt, liegt auch an der grundlegenden Definition des Messens. Im Allgemeinen geht es beim Messen darum, die Größe eines Objektes mit Zahlen zu erfassen, also quantitative Aussagen über ausgewählte Eigenschaften eines Objektes zu treffen (Leuders & Barzel, 2014). Größen sind nicht als natürliche Eigenschaft eines Objektes zu verstehen, sondern vielmehr als die Möglichkeit, Objekten der Wirklichkeit in verschiedener Weise (z. B. bezüglich ihres Volumens oder ihrer Masse) einen abstrakten Wert aus der Mathematik – bestehend aus Maßzahl (z. B. 100) und Maßeinheit (z. B. kg) – zuzuordnen. Eine Größe wird mit einer Maßzahl (z. B. 100) und einer standardisierten Maßeinheit (z. B. kg) angegeben (Leuders & Barzel, 2014). Zum Konzept des Messens gehört daher auch der Umgang mit verschiedenen Größen (z. B. Länge, Zeit, Flächeninhalt, Volumen), Maßeinheiten (z. B. Meter, Sekunde) und deren Abkürzungen (Leuders & Barzel, 2014).

Mithilfe von Messinstrumenten wird beim Messen ein direkter Vergleich des Objektes mit einer festgelegten Einheit durchgeführt (Greefrath, 2018): Es wird ein kleinstes Vergleichsobjekt, das auch als Einheit bezeichnet wird, gewählt und gefragt, wie oft dieses in das Objekt passt, dessen Größe erfasst werden soll (Grundvorstellung des „Passen in“) (Leuders & Barzel, 2014). Eine grundsätzliche Vorgehensweise für die zahlenmäßige Erfassung einer Eigen-

schaft eines Objektes ist es also, sich ein passendes Vergleichsobjekt mit bekannter Maßeinheit zu wählen und mit dem Objekt zu vergleichen. Dieses Prinzip des Messens greift auf die Grundvorstellung zur Division des „Passen in“ zurück (Leuders & Barzel, 2014).

Das Vorgehen des Vergleichens eines bekannten Objektes mit dem zu erfassenden Objekt wird auch beim Schätzen angewendet, wobei beim Schätzen jedoch ein gedanklicher Vergleich durchgeführt wird (Greefrath, 2018). Dafür ist der Aufbau von Stützpunktvorstellungen von großer Bedeutung. Bei Stützpunktvorstellungen handelt es sich um mentale Modelle zur Größenangabe von Repräsentanten einer Größe (Ruwisch, 2021b). Mögliche Repräsentanten sind beispielweise für *Längen* die Höhe einer Tür zur Größenangabe 2 m, für *Gewichte*⁴ eine Tafel Schokolade zur Größenangabe 100 g oder für *Volumina* eine Milchpackung zur Größenangabe 1 l (Franke & Ruwisch, 2013; Greefrath, 2018). Um Stützpunktvorstellungen aufzubauen, sollten Lernende verschiedene Repräsentanten zu verschiedenen Größen kennen lernen und diese als Vergleichsobjekte zum Lösen von Sachaufgaben heranziehen, damit diese Repräsentanten durch vielfältige Übungen zu Stützpunkten werden können (Franke & Ruwisch, 2013). Für eine Vorstellung von Flächeninhalten kann beispielsweise die Fläche einer quadratischen Seitentafel einer Schultafel als Repräsentant zur Größenangabe 1 m² dienen.

Der enge Zusammenhang zwischen realweltlichen Objekten und mathematischen Größen verdeutlicht, dass die Leitidee *Messen* (L2) stets eine Verknüpfung zwischen alltäglichen Erfahrungen und einer abstrakten Zahlenwelt herstellt. Gerade diese Verknüpfung macht die Leitidee *Messen* (L2) zu einem zentralen Bestandteil mathematischer Allgemeinbildung. Ebene Figuren bilden nicht nur einen wesentlichen Teil des Geometrieunterrichts, sondern auch eine grundlegende Basis für das Verständnis des Messens, da das Messen von Flächeninhalten eine erste Auseinandersetzung mit mehrdimensionalen Messungen und somit eine tiefergehende Auseinandersetzung mit der Passt-in-Grundvorstellung bedeutet. Ihre Betrachtung ermöglicht es, zentrale Aspekte der Leitidee *Messen* (L2) wie das Vergleichen, Schätzen, Messen und Berechnen gezielt aufzugreifen und zu vertiefen. In den folgenden zwei Unterkapiteln wird zunächst das Schwerpunktthema der Leitidee *Messen* (L2) der diesjährigen VERA-8 Erhebung *Ebene Figuren* näher betrachtet.

⁴ Der Begriff *Gewicht* wird aufgrund der Alltagsnähe der Lernenden synonym zum Begriff *Masse* verwendet.

3.1 Schwerpunktthema: *Ebene Figuren*

Das diesjährige Schwerpunktthema der VERA-8 Erhebungen im Rahmen der Leitidee *Messen* (L2) lautet *Ebene Figuren*. Ebene Figuren werden in den Bildungsstandards einerseits, wie oben dargestellt, in der Leitidee *Messen* (L2) aufgegriffen, andererseits sind sie auch im Rahmen der Leitidee *Raum und Form* (L3) verankert (KMK, 2004). Während ebene Figuren in der Leitidee *Messen* (L2) eher im Rahmen des Schätzens, Messens und Berechnens von Flächeninhalt und Umfang thematisiert werden, stellt die Leitidee *Raum und Form* (L3) die Geometrie und somit ebene Figuren eher im Hinblick auf ihre Eigenschaften und Strukturen, Konstruktionen und das gedankliche Operieren in den Vordergrund (KMK, 2004). Beide Leitideen adressieren somit das Thema *Ebene Figuren*, jedoch aus unterschiedlichen, sich ergänzenden Perspektiven. Während die Leitidee *Messen* (L2) eher den operativen Umgang mit Größen fokussiert, indem Mess-, Schätz- und Berechnungsprozesse im Vordergrund stehen, zielt die Leitidee *Raum und Form* (L3) primär auf das Erfassen und Begründen geometrischer Strukturen und Beziehungen ab. Beide Leitideen beziehen sich auf das mathematische Sachgebiet der Geometrie, wobei der Leitidee *Messen* (L2) zusätzlich die mathematischen Sachgebiete Arithmetik und Algebra zugehörig sind. Einerseits bilden Kenntnisse über Eigenschaften und Beziehungen ebener Figuren aus der Leitidee *Raum und Form* (L3) die Basis für das sachgerechte Messen und Berechnen, während das handlungsorientierte und rechnerische Arbeiten mit Größen und Messwerkzeugen wiederum ein vertiefendes Verständnis geometrischer Strukturen ermöglichen. Die beiden Leitideen haben also gewisse Anknüpfungspunkte. Da ebene Figuren sowohl Anknüpfungspunkte zur Leitidee *Messen* (L2) als auch zur Leitidee *Raum und Form* (L3) aufweisen, wird im Folgenden zunächst ein kurzer Einblick über verschiedene Zugänge zu ebenen Figuren aus der Perspektive der Leitidee *Raum und Form* (L3) aufgezeigt. Anschließend wird dann zu ebenen Figuren im Rahmen der Leitidee *Messen* (L2) übergeleitet.

In der Primarstufe lernen Schülerinnen und Schüler Figuren überwiegend als visuelle Schemata kennen, sodass Lernende mit den Figurenbegriffen vorrangig bildliche Vorstellungen von Prototypen verbinden (Roth & Wittmann, 2018). In der Sekundarstufe I sollten daher zunächst Lerngelegenheiten geschaffen werden, um einzelne Eigenschaften von Figuren und Beziehungen zwischen Figuren erfahrbar zu machen. Ebene Figuren werden in der Mathematik meist durch interne Bezüge charakterisiert, also durch Eigenschaften der Seiten, Winkel, Diagonalen oder Symmetrie. Jedoch nehmen Lernende bei der Betrachtung von Figuren häufig zunächst externe Bezüge wahr, beispielsweise die Parallelität von Seiten zum Blattrand. Das kann beispielsweise dazu führen, dass Schülerinnen und Schüler einen rechten Winkel nicht erkennen, wenn die Figur gegenüber den Blattkanten gedreht ist, ein nicht-aufrecht-stehendes gleichschenkliges Dreieck nicht als solches erkennen oder ein auf einer Ecke stehendes Quadrat als Raute und nicht als Quadrat bezeichnen (Roth & Wittmann, 2018). Daher ist es

von besonderer Bedeutung, interne Bezüge für Lernende sichtbar zu machen. Dies kann durch verschiedene Zugänge zu ebenen Figuren geschehen. Einerseits können Schülerinnen und Schüler Figurenbegriffe durch Beispiele lernen, wobei ihnen idealisierte Figuren vorgelegt werden, welche sie vergleichen und deren Unterschiede und Gemeinsamkeiten sie beschreiben sollen. Dabei lernen die Schülerinnen und Schüler Figurenbegriffe durch bildliche Vorstellungen. Einen weiteren Zugang stellt die operative Begriffsbildung dar, wobei Figurenbegriffe aus einer Handlung heraus entwickelt werden. Dabei leiten die Lernenden durch das Beschreiben und Reflektieren einer Handlung zentrale Beziehungsstrukturen des Begriffs ab (Roth & Wittmann, 2018). Beispielsweise können Lernende anhand der Beschreibung der Entstehung des Parallelogramms durch das Schneiden zweier Parallelstreifen ein Parallelogramm konstruieren und aus dieser Beschreibung und Reflexion der Handlung Beziehungen und Strukturen für den Begriff *Parallelogramm* ableiten. Der Zugang der operativen Begriffsbildung ist deshalb von Bedeutung, weil er die Ausbildung innerer Bezüge unterstützt, während beim Lernen durch Beispiel eher externe Bezüge deutlich werden. Da Lernenden nach der Grundschulzeit ebene Figuren primär als visuelle Schemata bekannt sind, sollten sich beide Zugänge der Begriffsbildung ergänzen (Roth & Wittmann, 2018).

Ebene Figuren lassen sich in der Leitidee *Messen* (L2) der Bildungsstandards im Hinblick auf folgende inhaltsbezogene mathematischen Kompetenzen einordnen: Das Nutzen des Grundprinzips des Messens bei der Längen- und Flächenmessung, das situationsgerechte Auswählen von Einheiten von Größen für Länge, Fläche und Winkel, das Schätzen von Größen mithilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten sowie das Berechnen von Flächeninhalt und Umfang von Rechteck, Dreieck und Kreis sowie daraus zusammengesetzten Figuren (KMK, 2004).

Die Grundlage für Messprozesse in der Schule ist die zu Beginn dieses Kapitels beschriebene *Passt-in-Vorstellung*: Man wählt ein Vergleichsobjekt oder eine standardisierte Einheit und prüft, wie oft diese in das zu messende Objekt hineinpasst. Auf dieser Idee beruhen sowohl konkrete Messhandlungen im Unterricht als auch abstraktere Messverfahren. Im Mathematikunterricht soll sich das Messen von ersten Messprinzipien und dem direkten Messen mit Messinstrumenten zu einem abstrakten rechnerischen Messen auf Basis mathematischer Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren entwickeln (Büchter & Holzäpfel, 2018). Am Beispiel des Flächeninhalts ebener Figuren kann der Übergang von tragfähigen Vorstellungen zu Größen zum rechnerischen und verallgemeinerten Messen verdeutlicht werden. So wird die Flächeninhaltsformel für Rechtecke vorerst für ganzzahlige Seitenlängen durch Auslegen der Fläche mit Quadraten (in cm^2) motiviert. Ein Beispiel für die Bestimmung des Flächeninhalts eines Rechtecks durch Abzählen der Einheitsquadrate, mit welchen das Rechteck ausgelegt wurde, zeigt Abbildung 2. In Anlehnung an das didaktische Stufenmodell zur Behandlung von Größen im

Mathematikunterricht (Franke & Ruwisch, 2013; Greefrath, 2018) kann es im Unterricht sinnvoll sein, zunächst einen solchen Parkettierungszugang mit nicht-standardisierten Objekten zu thematisieren, um das konzeptuelle Verständnis des Messens zu unterstützen. So kann beispielsweise der Flächeninhalt eines Rechtecks zunächst mit nicht-standardisierten Objekten ausgelegt werden, um den Flächeninhalt anhand dieser Objekte zu bestimmen. Dabei wird also der zu messende Flächeninhalt des Rechtecks mit der Fläche dieser nicht-standardisierten Objekte direkt verglichen. In einem nächsten Schritt kann dann aus der Idee heraus, dass der Vergleich mithilfe nicht-standardisierter Objekten nicht verallgemeinerbar ist, der Vergleich mit Einheitsquadraten eingeführt werden, um die Idee der Standardisierung der Referenzobjekte einzuführen und somit auf das Grundprinzip des Messens einzugehen.

Die Formel für den Rechteckflächeninhalt kann dann erschlossen werden, da x Quadrate in eine Reihe des Rechtecks passen und y dieser Reihen in die Rechteckfläche passen. Daraus lässt sich die Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks $F = x \cdot y$ ableiten (Krauter & Bescherer, 2013, S. 107). Mithilfe des Auslegens der Fläche mit Einheitsquadraten kann somit eine erste plausible Idee für die eigentliche Flächeninhaltsformel entwickelt werden.

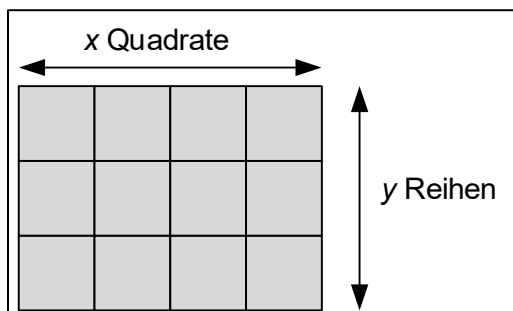


Abbildung 2: Bestimmung der Größe des Flächeninhaltes eines Rechtecks mit Quadraten (angelehnt an Krauter & Bescherer, 2013, S. 107)

Durch Verfeinern der Quadrate können immer kleinere Quadrate gefunden werden, sodass auf diesem Wege auch nichtganzzahlige rationale Seitenlängen motiviert werden können. Darauf aufbauend werden die Flächeninhalte besonderer Vierecke und Dreiecke durch Zerlegen und Ergänzen auf Flächeninhalte von Rechtecken erschlossen. Die Herleitung der Flächeninhaltsformel geht somit von der Grundidee des Messens aus: Es wird ein Verfahren gesucht, mit welchem sich der Flächeninhalt auch dann bestimmen lässt, wenn ein direktes Abzählen von Einheitsquadraten nicht mehr möglich ist. Im späteren Verlauf der Sekundarstufe I kommen schließlich die Betrachtung von Kreisen und damit auch die Kreiszahl π hinzu (Büchter & Holzäpfel, 2018). Ein Beispiel für die Flächeninhaltsbestimmung durch Ergänzungsgleichheit zeigt Abbildung 3 am Beispiel eines Parallelogramms. Der Flächeninhalt des Parallelogramms oben links entspricht dem Flächeninhalt des Rechtecks oben rechts (Kuntze, 2018). Beide Figuren lassen sich durch Ergänzung mit paarweise kongruenten Dreiecken jeweils zu einem kongruenten Rechteck ergänzen (in Abbildung 3 die beiden unteren Rechtecke). Auf diese

Weise dient das Rechteck also als Referenzobjekte, mit welchem der Flächeninhalt des Parallelogramms verglichen werden kann. Für einen formellen, mathematischen Beweis wären an dieser Stelle weitere Argumentationen erforderlich, beispielsweise eine Begründung dafür, dass die ergänzten Dreiecke tatsächlich so passend eingefügt werden können, damit das Rechteck entstehen kann (Kuntze, 2018). Weiterführend kann ein solcher formeller Beweis erarbeitet werden. Dennoch kann auch mithilfe der Ergänzungsgleichheit das Argumentieren gefördert werden: Wird die Flächengleichheit wie in Abbildung 3 zeichnerisch durch Zerlegen und Ergänzen gezeigt, so handelt es sich um einen inhaltlich-anschaulichen Beweis nach Wittmann und Müller (1988), bei welchem auf Messprinzipien zurückgegriffen wird. Indem das zu zerlegende Objekt als Referenzobjekt verstanden wird, mit welchem der Flächeninhalt einer anderen Figur gemessen wird, ist der Zugang über einen inhaltlich-anschaulichen Beweis für das Messen von Größen von großer Bedeutung, da das Schätzen von Größen mithilfe geeigneter Repräsentanten gefördert werden kann, welches Teil der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen zur Leitidee *Messen* (L2) in den Bildungsstandards ist (KMK, 2004). Inhaltlich-anschauliche Beweise basieren auf einer Kette von korrekten Schlüssen, bei denen Argumente nicht in formaler Form vorliegen, jedoch formalen Argumenten entsprechen (Brunner, 2014). Inhaltlich-anschauliche Beweise lassen eine Verallgemeinerung erkennen, wenngleich sie im Gegensatz zu formal-deduktiven Beweisen nicht in formaler Sprache und nicht in einer lückenlosen Beweiskette aus logischen Schlussfolgerungen vorliegen (Brunner, 2014). Insbesondere sind sie für die Leitidee *Messen* (L2) von großer Bedeutung, da mithilfe inhaltlich-anschaulicher Beweise im Gegensatz zu formal-deduktiven Beweisen handlungsorientierte Messprinzipien (wie das oben beschriebene Messen mit Referenzobjekten) thematisiert werden können. Die verschiedenen Beweistypen charakterisieren sich also durch ihr unterschiedliches didaktisches Potenzial für den Mathematikunterricht.

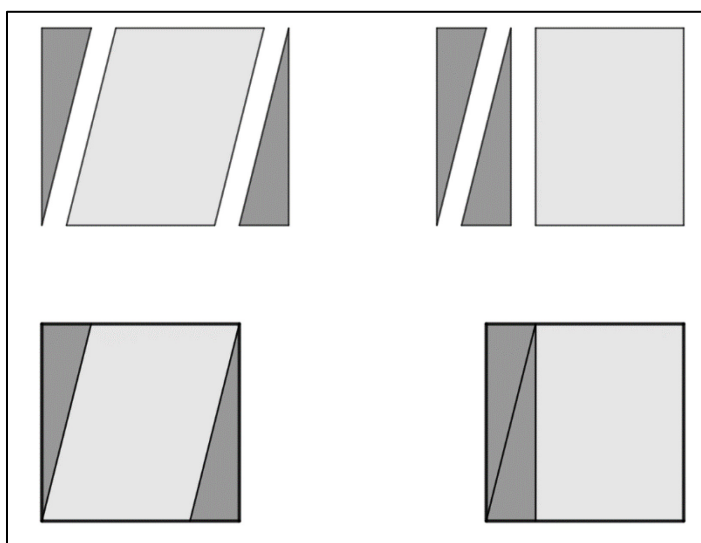


Abbildung 3: Flächeninhalt eines Parallelogramms (angelehnt an Kuntze, 2018, S. 165)

Neben der Bestimmung des Flächeninhaltes von besonderen Vierecken und Dreiecken, dem Messen von Flächen mithilfe von Referenzobjekten und der Herleitung entsprechender Flächeninhaltsformeln kann das Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip beispielsweise auch zur Näherung des Flächeninhaltes von Kreisen mithilfe von Polygonen genutzt werden, indem die Kreisfläche mit Polygonen ausgelegt wird, sodass die Polygone als Referenzobjekte dienen, mit welchen die Kreisfläche näherungsweise gemessen werden kann (Kuzle & Bruder, 2016). Darüber hinaus kann das Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip auch zur Herleitung von Volumenformeln geometrischer Körperstumpfe oder zur Bearbeitung von Sachaufgaben genutzt werden.

Beispielsweise kann mithilfe von Zerlegung und Ergänzung die Fläche eines Ölteppichs nach dem Auslaufen von Öl bestimmt werden (Kuzle & Bruder, 2016) oder auch die Größe der Oberfläche eines Sees. Auf diese Weise kann einerseits das Messen von Flächen fokussiert, andererseits auch das Problemlösenlernen unterstützt werden, da Lernende angeregt werden, Heuristiken wie die Strategie des Zerlegens und Ergänzens zu nutzen und zudem verschiedene Lösungswege verglichen und diskutiert werden können (Kuzle & Bruder, 2016; G. Wittmann, 2018). Gleichzeitig können auch der Umgang mit Messungen und Maßangaben aus der Umwelt sowie das Schätzen von Größen mithilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten gefördert werden, wie es auch die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen zur Leitidee *Messen* (L2) in den Bildungsstandards fordern (KMK, 2004). Das Schätzen von Größen mithilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten (*Stützpunktvorstellungen*) ist vor allem dann erforderlich, wenn der direkte Vergleich von Objekten nicht möglich ist. Dies ist der Fall, wenn Objekte nicht nebeneinander gelegt werden können (zum Beispiel weil lediglich ein Foto eines zu schätzenden Objektes vorliegt oder weil das zu schätzende Objekt so groß ist, dass ein direkter Vergleich mit einem anderen Objekt nicht möglich ist) oder wenn ebene Figuren, zum Beispiel Rechtecke, miteinander verglichen werden, von welchen keine vollständig in die jeweils andere passt (Büchter & Holzäpfel, 2018). Geeignete Stützpunkte, die bei zur Bestimmung von Flächeninhalten in Sachsituationen genutzt werden können, sind beispielsweise eine Briefmarke (1 cm^2), ein Toilettenpapierblatt (1 dm^2) oder ein Teil einer Wandtafel (1 m^2) (Büchter & Holzäpfel, 2018). Stützpunkte sollten durch konkrete Messerfahrungen, der Verknüpfung des gelernten Wissens mit mentalen Vorstellungen und einem Vergleich verschiedener Stützpunkte zueinander angeeignet werden (Ruwisch, 2021a).

Um das Vornehmen von Messungen in der Umwelt im Sinne der Bildungsstandards (KMK, 2004) im Kontext ebener Figuren zu fördern, können im Mathematikunterricht Flächeninhalte im Klassenzimmer mit einem handlungsorientierten Zugang bestimmt werden (Büchter & Richter, 2018). Dazu kann zum Beispiel der Flächeninhalt des Klassenraums bestimmt werden, um herauszufinden, ob der Klassenraum einer empfohlenen Mindestgröße für Klassenräume entspricht. Dazu kann der Klassenraum mit Meterquadraten aus Zeitungspapier ausgelegt

werden, beziehungsweise jeweils eine Reihe vorne im Klassenraum und eine Reihe an der Seite des Klassenraums ausgelegt werden, um zu bestimmen, wie viele Meterquadrate hineinpassen (Büchter & Richter, 2018). Darauf aufbauend kann der Boden des Klassenraums zeichnerisch (zum Beispiel an der Tafel) dargestellt und überlegt werden, wie viele Quadrate auf den gesamten Boden passen beziehungsweise wie mit den „Resten“ der Bodenfläche, auf die keine ganzen Quadrate passen (bei nicht ganzzahligen Seitenlängen), umgegangen werden kann (Büchter & Richter, 2018). Solche Messungen in der Umwelt können auch komplexer und in Bezug auf andere ebene Figuren gestaltet werden. Der handlungsorientierte Zugang über den direkten Vergleich einer zu messenden Fläche mit Meterquadraten kann als Ausgangspunkt genutzt werden, um auch den indirekten Vergleich von zu messenden und schätzenden Flächen zu thematisieren. So kann das Schätzen von Größen mithilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten gefördert werden, indem die Fläche, deren Flächeninhalt ermittelt werden soll, nicht durch eine direkte Handlung mit einem Referenzobjekt verglichen wird, sondern mithilfe einer mentalen Vorstellung über einen geeigneten Repräsentanten. Beispielsweise kann der Flächeninhalt eines Klassenraumes ermittelt werden, indem die Fläche mental mit einem Repräsentanten, zum Beispiel einer quadratischen Schultafel, abgemessen wird. Auf diese Weise kann die Größe der zu bestimmenden Fläche mental mithilfe eines Repräsentanten abgemessen werden. Dieser Zugang kann ebenfalls auf komplexere Figuren oder größere Flächen übertragen werden, beispielsweise auch auf Flächen, die nicht am gleichen Ort wie die Schülerinnen und Schüler sind. Bei der Bearbeitung von Sachaufgaben im Kontext des Messens sollte auch thematisiert werden, welche Genauigkeit bei der Angabe von Ergebnissen in Bezug auf die Sachsituation sinnvoll ist (Büchter & Holzäpfel, 2018). So genügt es für die Beantwortung der Frage, ob der eigene Klassenraum groß genug ist, wahrscheinlich, die ungefähre Größe mithilfe der Meterquadrate zu bestimmen, wohingegen in anderen Sachsituationen eine genaue Bestimmung sinnvoller wäre.

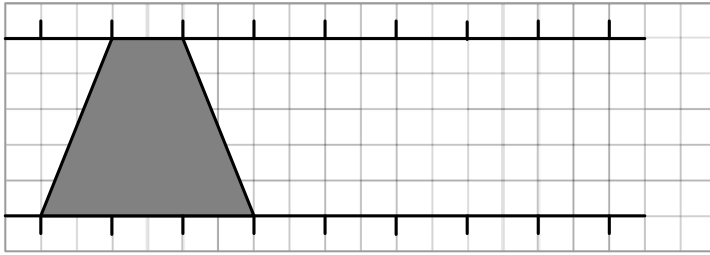
3.2 Ebene Figuren in VERA-8

Im Folgenden werden Aufgaben aus vergangenen VERA-8 Erhebungen dargestellt, in denen ebene Figuren im Rahmen der Leitidee *Messen* (L2) eine Rolle spielen. Die Aufgaben werden fachdidaktisch kommentiert, indem sie zunächst hinsichtlich ihrer geforderten Kompetenzen analysiert werden und anschließend in Anknüpfung an Kapitel 3.1 auf das Zerlegen und Ergänzen von Flächen ebener Figuren, die Arbeit mit Sachsituationen im Kontext von ebenen Figuren in der Leitidee *Messen* (L2) sowie auf verschiedene Beweistypen eingegangen wird.

Die erste Beispielaufgabe ist die Aufgabe „Trapez“. Bei der Aufgabe „Trapez“ geht es um die Flächengleichheit eines Trapezes und eines Rechtecks.

Beispielaufgabe 1: „Trapez“

Zeichne neben das Trapez ein Rechteck mit der gleichen Höhe und dem gleichen Flächeninhalt wie das gegebene Trapez.



Copyright Text, Grafik und Teilaufgaben: IQB e. V., Lizenz: Creative Commons (CC BY).
Volltext unter: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode.de>

Begründe, dass das Rechteck denselben Flächeninhalt hat.

Die Aufgabe erfordert das Zeichnen einer ebenen Figur, also das Anfertigen einer Darstellung eines mathematischen Objektes, was der Kompetenz *Mathematisch darstellen* (K4) entspricht. Zudem soll die Flächengleichheit beider Figuren begründet werden, wodurch ebenfalls die Kompetenz *Mathematisch argumentieren* (K1) angesprochen wird. Die Begründung kann sowohl verbal, rechnerisch durch Berechnung beider Flächeninhalte als auch zeichnerisch durch Zerlegen vorgenommen werden. Da es sich bei der Aufgabe um ein mathematisches Problem handelt, dessen Lösung die Anwendung heuristischer Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien erfordert, wird ebenfalls die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2) gefördert. So ist es beispielsweise denkbar, das Rechteck durch eine Kombination von Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten zu zeichnen, indem ausgehend vom Zielzustand (gleiche Höhe, gleicher Flächeninhalt) schrittweise vorgegangen wird. Wird für die Begründung der Flächengleichheit ein zeichnerischer Ansatz mithilfe des Zerlegungsprinzips gewählt, so wird zudem ein heuristisches Prinzip angewendet. Abbildung 4 zeigt ein Beispiel dafür, wie die Flächengleichheit beider Figuren zeichnerisch gezeigt werden kann. Wird die Flächengleichheit wie in Abbildung 4 durch Zerlegen und Ergänzen gelöst, so handelt es sich um einen inhaltlich-anschaulichen Beweis (Brunner, 2014). Die Gültigkeit der Behauptung, dass das gezeichnete Rechteck den gleichen Flächeninhalt wie das Trapez hat, wird also auf anschauliche Weise gezeigt, da die Fläche des Rechtecks mithilfe des Trapezes gemessen werden kann. Als Weiterführung im Unterricht könnte ein formal-deduktiver Beweis dafür erarbeitet werden, unter welchen Bedingungen die Flächengleichheit für alle Trapeze und Rechtecke gilt, indem das Problem verallgemeinert wird.

Wie bereits in Kapitel 3.1 dargestellt, kann das Zerlegen und Ergänzen im Mathematikunterricht auch auf andere ebene Figuren übertragen werden.

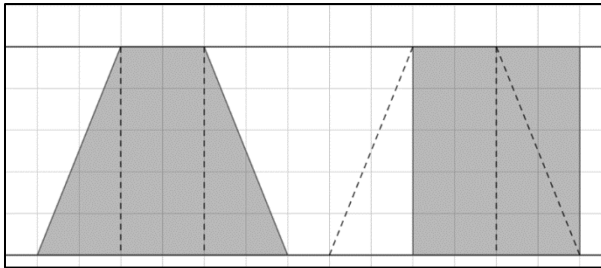
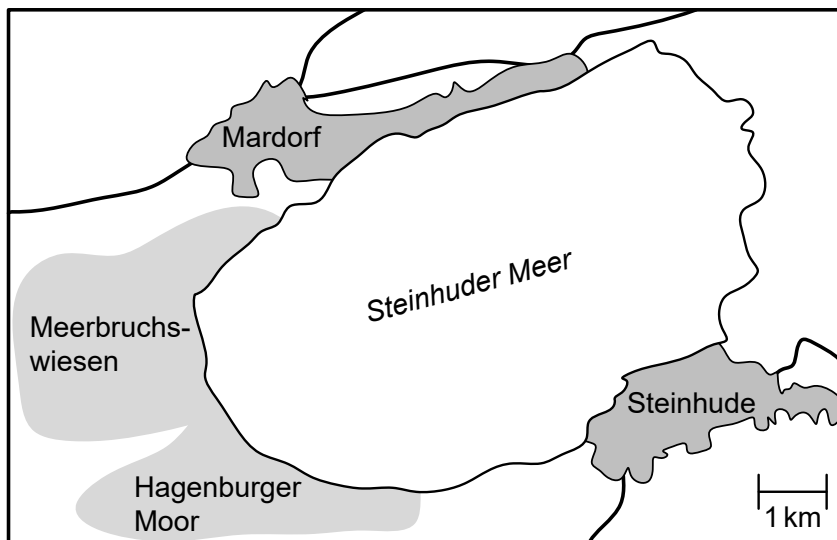


Abbildung 4: Zeichnerische Begründung für die Gleichheit der Größe der Flächeninhalte beider Figuren durch Zerlegen

Die nächste Beispielaufgabe „Steinhuder Meer“ erfordert das Bestimmen des Flächeninhaltes und Umfangs einer Figur in einer Sachsituation.

Beispielaufgabe 2: „Steinhuder Meer“

Die Karte zeigt das Steinhuder Meer. Dies ist ein See in Niedersachsen.



Teilaufgabe 1

Bestimme näherungsweise die Uferlänge (den Umfang) des Sees.

Die Uferlänge beträgt ungefähr km.

Teilaufgabe 2

Bestimme näherungsweise die Größe der Oberfläche des Sees.

Die Größe der Oberfläche beträgt ungefähr km².

Notiere deinen Lösungsweg.

Bei der Aufgabe „*Steinhuder Meer*“ soll der Umfang (Teilaufgabe 1) sowie die Größe der Oberfläche eines Sees (Teilaufgabe 2) näherungsweise ermittelt werden. Beide Teilaufgaben sind in der Leitidee *Messen* (L2) verankert.

Um in Teilaufgabe 1 den Umfang des Sees zu bestimmen, ist es erforderlich, mit der gegebenen Darstellung in dem abgebildeten Maßstab zu arbeiten, sodass die Kompetenz *Mathematisch darstellen* (K4) gefordert wird. Darüber hinaus wird die nicht geradlinige Begrenzung des Sees als geradlinig modelliert, um so näherungsweise den Umfang zu ermitteln. Es wird also der Umfang eines Objektes aus der Realität bestimmt, wozu Vereinfachungen vorgenommen werden, sodass die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) erforderlich ist. In Teilaufgabe 1 und in Teilaufgabe 2 werden vertraute Formeln zur Bestimmung von Umfang von Flächeninhalt verwendet, weswegen in beiden Teilaufgaben auch die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) erforderlich ist.

In Teilaufgabe 2 ist es für die Bestimmung des Oberflächeninhalts erforderlich, die Oberfläche des Sees mit einer geometrischen Figur (Kreis, Rechteck, Trapez oder einer daraus zusammengesetzten Figur) zu modellieren. Da bei dieser Aufgabe also die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) im Vordergrund steht und der Lösungsweg den Messprozess stärker abbildet als das Endergebnis, liegt der Fokus bei der Aufgabenbearbeitung auf der Angabe eines angemessenen und nachvollziehbaren Lösungsweges und weniger auf dem Endergebnis selbst. Aufgrund der Tatsache, dass diese Aufgabe verschiedene Modellierungen zulässt, bietet die Aufgabe eine Vielzahl an Lösungswegen, um die Größe der Oberfläche des Sees zu bestimmen. Ein Lösungsweg besteht darin, die Oberfläche des Sees durch ein Rechteck zu modellieren (siehe Abbildung 5). Bei dieser Lösung wird die Oberfläche also stark vereinfacht als Rechteck angenommen. Ein weiterer Lösungsweg kann dadurch beschrieben werden, dass die Oberfläche des Sees mit mehreren, verschiedenen Figuren modelliert wird, also durch eine zusammengesetzte Figur vereinfacht wird. Abbildung 6 zeigt die Modellierung der Oberfläche des Sees mit einer zusammengesetzten Figur, welche aus einem Rechteck und vier Trapezen besteht. Bei dieser Modellierung wird also die Oberfläche des Sees in verschiedene Figuren zerlegt und sich der Form der Oberfläche des Sees angenähert, dennoch handelt es sich auch bei dieser Modellierung um eine starke Vereinfachung. Durch beide Lösungswege wird deutlich, dass eine Vereinfachung unumgänglich ist, um das reale Problem in die Mathematik zu übersetzen. Das Zerlegen der Oberfläche des Sees in Teilfiguren kann verfeinert werden, um sich der tatsächlichen Form der Oberfläche des Sees weiter anzunähern und somit auch ein genaueres Ergebnis zu erhalten. Im Unterricht kann an dieser Stelle diskutiert werden, welche Genauigkeit des Ergebnisses bei dieser Aufgabe sinnvoll und notwendig ist (siehe Kapitel 3.1). Davon abhängig kann dann eine weniger stark vereinfachte Modellierung oder eine stärker vereinfachte Modellierung der Oberfläche des Sees vorgenommen werden. Beides ist in der

Aufgabe „Steinhuder Meer“ zulässig, jedoch sollte im Unterricht für unterschiedlich starke Vereinfachungen und das Hinterfragen von Modellierungen sensibilisiert werden. Neben Modellierungskompetenzen (indem zum Beispiel die Teilkompetenz des Vereinfachens anhand der Aufgabe thematisiert wird) können bei der Weiterarbeit im Unterricht auch Problemlösekompetenzen erworben werden, indem die Lernenden verschiedene Strategien und Lösungswege bei der Modellierung diskutieren (G. Wittmann, 2018).



Abbildung 5: Modellierung der Oberfläche des Sees mit einem Rechteck

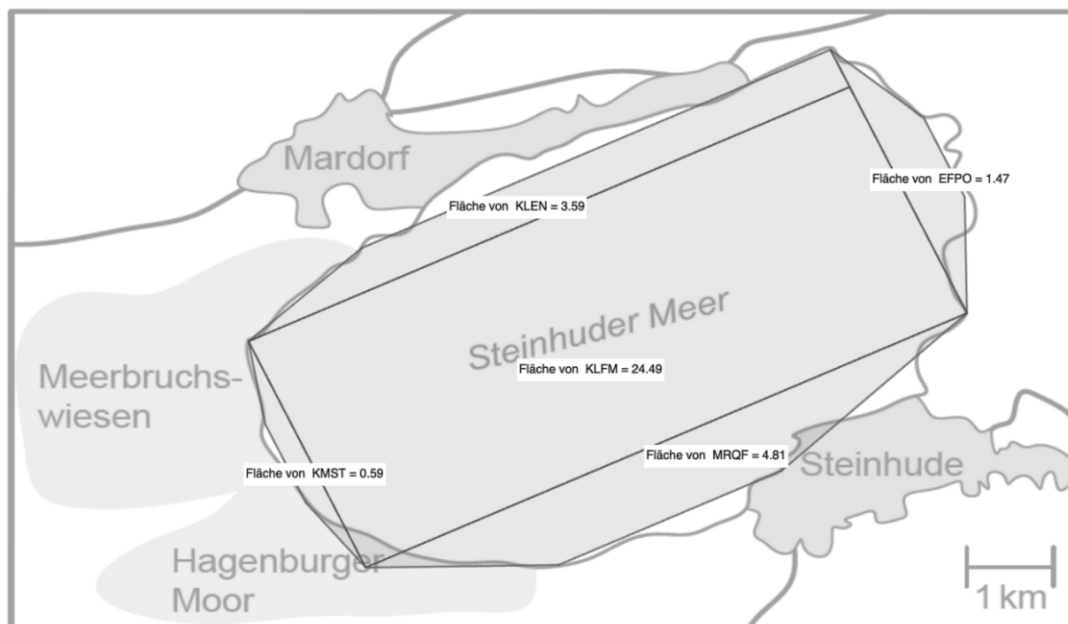


Abbildung 6: Modellierung der Oberfläche des Sees mit mehreren Figuren

Die nächste Beispielaufgabe ist die Aufgabe „*Rechteckige Fläche*“.

Beispielaufgabe 3: „Rechteckige Fläche“

Frau Schreiner möchte in ihrem Garten eine rechteckige Fläche für ein Wildblumenbeet einzäunen. Der Zaun für diese rechteckige Fläche besteht aus 24 zusammensteckbaren, festen Teilen. Ein Teil hat eine Länge von 0,50 m.

Teilaufgabe 1

Gib den Umfang dieser rechteckigen Fläche an.

..... m

Teilaufgabe 2

Herr Schreiner sagt: „Die größte rechteckige Fläche, die wir mit diesen Teilen einfassen können, ist 8 m^2 groß.“

Hat Herr Schreiner recht?

Kreuze an.

☐ Ja

☐ Nein

Begründe deine Entscheidung.

Copyright Text und Teilaufgaben: IQB e. V., Lizenz: Creative Commons (CC BY).
Volltext unter: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode.de>

In der ersten Teilaufgabe ist es erforderlich, den Umfang einer rechteckigen Fläche anhand gegebener Maßangaben eines Zaunes zu bestimmen. Dabei werden Informationen (Maßangaben) aus dem Aufgabentext entnommen, wodurch die Aufgabe die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) erfordert. Mit den entnommenen Maßangaben werden dann einfache Berechnungen durchgeführt, wodurch auch die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) auf einem niedrigen Anforderungsniveau gefordert ist.

In Teilaufgabe 2 handelt es sich um ein Problem, welches die Anwendung heuristischer Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien erfordert, sodass die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2) erforderlich ist. So ist es zur Lösung der Aufgabe erforderlich, die Maße für die Länge und Breite des Rechtecks so zu wählen, dass die größtmögliche Fläche entsteht. Dafür kann zum Beispiel durch systematisches Probieren herausgefunden werden, dass ein Quadrat die größtmögliche Fläche liefert. Die Aufgabe fördert also die Verwendung von Heuristiken und ist ein weiteres Beispiel dafür, wie mit Geometrie Problemlösen gelernt werden kann. Im Gegensatz zu den vorherigen Aufgabenbeispielen erfordert diese Aufgabe also nicht das direkte Messen oder Berechnen eines Flächeninhaltes einer vorgegebenen Figur, sondern ausge-

hend vom Umfang eines Rechtecks das Bestimmen der größtmöglichen Fläche. Da in Teilaufgabe 2 ebenfalls verschiedene Berechnungen von Flächeninhalt und Umfang durchgeführt werden, spricht die Teilaufgabe in geringem Maße auch die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) an. Darüber hinaus fordert diese Teilaufgabe eine Begründung dafür, dass die rechteckige Fläche, die mit den gegebenen Zaunteilen eingefasst werden kann, nicht 8 m^2 groß ist. Aus diesem Grund ist ebenfalls die Kompetenz *Mathematisch argumentieren* (K1) erforderlich. Dabei sind verschiedene Lösungswege für die Begründung denkbar: Einerseits ist es möglich, durch systematisches Probieren zu zeigen, dass ein Rechteck mit einer Fläche von 8 m^2 die Maße $2\text{ m} \times 4\text{ m}$ hätte, man jedoch eine Fläche von 9 m^2 erhält, wenn $3\text{ m} \times 3\text{ m}$ als Maße gewählt werden. Bei dieser Begründung handelt es sich um einen experimentellen Beweis, da die Behauptung anhand einzelner Beispiele geprüft wird (Brunner, 2014). Darüber hinaus ist auch eine allgemeinere Begründung unter der Berücksichtigung, dass ein Quadrat unter allen Rechtecken mit gleichem Umfang immer die größtmögliche Fläche hat, möglich. Wird die Begründung auf Basis dieses Arguments formuliert, so wird bereits eine Einsicht in die Allgemeingültigkeit erlangt und somit ein Ausgangspunkt für einen inhaltlich-anschaulichen Beweis gebildet. Wird anhand einer Kette korrekter Schlüsse in formal-symbolischer Sprache anhand der allgemeinen Formeln für Umfang und Flächeninhalt von Rechtecken gezeigt, dass ein Quadrat unter allen Rechtecken mit gleichem Umfang immer den größten Flächeninhalt hat, so handelt es sich um einen formal-deduktiven Beweis.

Insgesamt wird anhand der Aufgaben vergangener VERA-8 Erhebungen deutlich, dass es vielfältige Möglichkeiten für den Mathematikunterricht gibt, ebene Figuren im Kontext des Messens sowohl innermathematisch als auch in Bezug auf Sachsituationen einzubeziehen. Dabei können alle sechs mathematischen Kompetenzen aus den Bildungsstandards gefördert werden. Vor allem die Kompetenz *Mathematisch darstellen* (K4) steht bei Aufgaben zu ebenen Figuren häufig im Vordergrund, da zumeist mit einer gegebenen Darstellung (einer ebenen Figur) gearbeitet wird oder eine mathematische Darstellung (eine ebene Figur) angefertigt wird.

4 Abschließende Anmerkungen

Die diesjährigen didaktischen Handreichungen beinhalten erneut zwei Themenschwerpunkte aus zwei Leitideen, die als Ergänzungsmodule für die VERA-8 Testung zur Auswahl stehen. Im Bereich der Leitidee *Messen* ist dies der Schwerpunkt *Ebene Figuren*, im Bereich der Leitidee *Daten und Zufall* der Schwerpunkt *Zufall*. Aus beiden Themen wurden zentrale Inhalte betrachtet, welche durch die Bildungsstandards vorgegeben werden. Für weitere Anregungen für die Unterrichtspraxis sei auf die Kommentare zu den einzelnen Aufgaben in Teil III der

didaktischen Handreichungen verwiesen. Zudem wurden Beispielaufgaben zu den Schwerpunktthemen vorgestellt und aufgezeigt, welche allgemeinen mathematischen Kompetenzen mit diesen einhergehen. Für weitere Beispiele und Anregungen stellt die in den vorangegangenen Kapiteln genannte Literatur eine gute Ausgangslage dar.

5 Literaturverzeichnis

Blum, W. (2010). Einführung. In W. Blum, C. Drücke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: Konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*. Cornelsen Scriptor.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen: Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-41864-8>

Brunner, E. (2016). Beweistypen: Ihre unterschiedlichen kognitiven Anforderungen und ihr didaktisches Potenzial. In Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 1103–1106). WTM.

Büchter, A., & Holzäpfel, L. (2018). Messen. *mathematik lehren*, 210, 2–7.

Büchter, A., & Richter, K. (2018). Flächeninhalte im Klassenzimmer bestimmen. Ein handlungsorientierter Zugang zu Messprinzipien und Maßeigenschaften. *mathematik lehren*, 14–16.

Franke, M., & Ruwisch, S. (2013). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule* (2. [überarb.] Aufl., Nachdr). Spektrum Akad. Verl.

Greefrath, G. (2018). *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht: Didaktische Perspektiven zum Sachrechnen in der Sekundarstufe*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-57680-9>

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenorth, H.-E. & Vollmer, H. J. (2003). Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. In BMBF (Hrsg.), *Bildungsreform Band 1. Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards: Eine Expertise* (S. 7–174). Berlin.

KMK. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003*. Wolters Kluwer.

KMK. (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss. Beschluss vom 15.10.2004*. Wolters Kluwer.

KMK. (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012*. Wolters Kluwer.

Krauter, S., & Bescherer, C. (2013). *Erlebnis Elementargeometrie. Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-8274-3026-7>

Kuntze, S. (2018). Flächeninhalt und Volumen. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme, & G. Wittmann, *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 149–177). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8>

Kuzle, A., & Bruder, R. (2016). Probleme lösen lernen im Themenfeld Geometrie. *mathematik lehren*, 196, 2–9.

Leiss, D. & Blum, W. (2010). Beschreibung zentraler Kompetenzen. In W. Blum, C. Drücke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: Konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*. Cornelsen Scriptor.

Leuders, T., & Barzel, B. (2014). Größen, Maße und Messen. In *Fachdidaktik Mathematik: Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II* (S. 48–68). Klett/Kallmeyer.

OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing.

Roth, J., & Wittmann, G. (2018). Ebene Figuren und Körper. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme, & G. Wittmann, *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 107–148). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8>

Ruwisch, S. (2021a). Stützpunkte kennen, vorstellen und nutzen: Von der Kenntnis der Größe einzelner Objekte zum Nutzen eines Netzes von Stützpunktvorstellungen. *Grundschule Mathematik*, 69, 2–3.

Ruwisch, S. (2021b). Warum nicht Größenvorstellungen? Stützpunkte als Teil der Grundvorstellungen zu „Größen und Messen“. *Grundschule Mathematik*, 69, 32–35.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 21(61), 37–46. <https://doi.org/10.1515/dmvm-1996-0214>

Wittmann, E. C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender & H. Winter (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis: Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237–258). Cornelsen.

Wittmann, G. (2018). Problemlösen. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme, & G. Wittmann, *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 67–83). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8>

6 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards	5
Abbildung 2: Bestimmung der Größe des Flächeninhaltes eines Rechteckes mit Quadraten (angelehnt an Krauter & Bescherer, 2013, S. 107)	11
Abbildung 3: Flächeninhalt eines Parallelogramms (angelehnt an Kuntze, 2018, S. 165).....	12
Abbildung 4: Zeichnerische Begründung für die Gleichheit der Größe der Flächeninhalte beider Figuren durch Zerlegen	16
Abbildung 5: Modellierung der Oberfläche des Sees mit einem Rechteck	18
Abbildung 6: Modellierung der Oberfläche des Sees mit mehreren Figuren	18

7 Verzeichnis der Beispielaufgaben

Beispielaufgabe 1: „Trapez“	15
Beispielaufgabe 2: „Steinhuder Meer“	16
Beispielaufgabe 3: „Rechteckige Fläche“	19

Vergleichsarbeiten 2026
8. Jahrgangsstufe (VERA-8)
Mathematik
DIDAKTISCHE HANDREICHUNG
TEIL II

Fachdidaktische Orientierung
Leitidee *Daten und Zufall*



Inhaltsverzeichnis

1	EINLEITUNG	3
2	BILDUNGSSTANDARDS UND KOMPETENZMODELL IM FACH MATHEMATIK.....	3
3	DIE LEITIDEE <i>DATEN UND ZUFALL</i>	6
3.1	SCHWERPUNKTTHEMA: <i>ZUFALL</i>	8
3.2	<i>ZUFALL</i> IN VERA-8	13
4	ABSCHLIEßENDE ANMERKUNGEN	19
5	LITERATURVERZEICHNIS.....	20
6	ABBILDUNGSVERZEICHNIS.....	21
7	TABELLENVERZEICHNIS	21
8	VERZEICHNIS DER BEISPIELAUFGABEN	21

Autorinnen¹ der fachdidaktischen Erläuterungen in Teil II sind Lisa Kämmerling, Marlena Meyer und Antonia Rewer. Die gezeigten Testaufgaben entstanden in Kooperation von Lehrkräften aus neun Bundesländern und Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktikern unter Federführung der Arbeitsgruppe Prof. Greefrath, Universität Münster (fachdidaktische Leitung) und des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen.

Haftungsausschluss:

Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle übernehmen wir keine Haftung für Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der eigenen Inhalte und der Inhalte externer Links. Für den Inhalt der verlinkten Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien
auch online finden können?

<https://www.iqb.hu-berlin.de/de/schule/aufgaben/seki/vera-8-mathematik/>

¹ Aufgrund der dynamischen Diskussion zum sprachlichen Umgang mit geschlechtlicher Vielfalt sowie der Positionierung des Rats für deutsche Rechtschreibung und der Schulbehörden einiger Länder gegen Schreibweisen mit Wortbinnenzeichen (z. B. Genderstern) verwenden wir Doppelnennungen (z. B. Schülerinnen und Schüler) oder geschlechtsneutrale Formulierungen (z. B. Lehrkräfte). Hiermit sind ausdrücklich Personen aller Geschlechter gemeint.

1 Einleitung

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK, 2004, 2005, 2012) mit ihren Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen bilden die Grundlage für die VERgleichsArbeiten in der 8. Jahrgangsstufe (VERA-8) im Fach Mathematik. Daher wird in dieser didaktischen Handreichung zunächst der Aufbau der Bildungsstandards vorgestellt. Anschließend werden die beiden Schwerpunkte, die in den diesjährigen Ergänzungsmodulen zur Wahl stehen, näher erläutert: die Leitidee *Messen* mit einem Fokus auf *Ebene Figuren* sowie die Leitidee *Daten und Zufall* mit einem Fokus auf das Thema *Zufall*. Es werden insbesondere zu beiden Schwerpunkten fachdidaktische Herausforderungen hinsichtlich typischer Fehler von Lernenden sowie hinsichtlich der Auswahl geeigneter Aufgaben geschildert und wissenschaftlich fundierte Zugänge vorgestellt, wie mit diesen in der Unterrichtspraxis umgegangen werden kann. In den dazugehörigen Kapiteln 3 und 4 werden außerdem Aufgaben aus VERA-8 zu den diesjährigen Schwerpunktsetzungen präsentiert. Dabei handelt es sich um Beispiele für Aufgabenformulierungen, welche die verschiedenen allgemeinen Kompetenzen adressieren und daher insbesondere im Regelunterricht zur Förderung ebendieser Kompetenzen herangezogen werden können.

2 Bildungsstandards² und Kompetenzmodell im Fach Mathematik

Im Anschluss an die Ergebnisse großer internationaler Vergleichsstudien – wie etwa der PISA-Studie oder TIMSS – führte die Kultusministerkonferenz (KMK) ab dem Jahr 2003 Bildungsstandards für die Fächer Deutsch, Mathematik und die erste Fremdsprache (Englisch/Französisch) ein³. Eine grundlegende Wende stand bevor: Während zuvor der *Input* im Vordergrund stand, also der Blick auf die zu unterrichtenden Inhalte und Themen die Lehrplanentwicklung dominierte, sollte nun auch der *Output* stärkere Beachtung finden, also der Aufbau von Kompetenzen, Wissensstrukturen und Fertigkeiten über die die Schülerinnen und Schüler nach erfolgreichem Unterricht verfügen sollen. Die OECD betont dabei den Anwendungscharakter von Mathematik:

„Mathematische Grundbildung umfasst die Fähigkeit des Einzelnen, Mathematik in einer Vielzahl von Kontexten zu formulieren, anzuwenden und zu interpretieren. Sie

² Die Bildungsstandards für Mathematik wurden für den Ersten und Mittleren Schulabschluss weiterentwickelt und 2022 von der KMK verabschiedet (KMK, 2022). Die Didaktische Handreichung Teil II bezieht sich auf die Bildungsstandards, die 2004 und 2003 von der KMK beschlossen worden sind, da sich die Normierungsaufgaben für die neuen Bildungsstandards noch in der Entwicklung befinden.

³ <https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>

umfasst mathematisches Argumentieren und die Verwendung mathematischer Konzepte, Verfahren, Fakten und Werkzeuge zur Beschreibung, Erklärung und Vorhersage von Phänomenen. Sie hilft dem Einzelnen, die Rolle zu erkennen, die die Mathematik in der Welt spielt, und begründete Urteile und Entscheidungen zu treffen, die von konstruktiven, engagierten und reflektierten Bürgerinnen und Bürgern benötigt werden.“ (OECD, 2013, S. 25, eigene Übersetzung)

Zu diesem Zweck benennen die Bildungsstandards Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe anhand zentraler Fachinhalte erworben haben sollen (KMK, 2004, 2005). Dabei wird davon ausgegangen, dass ein allgemeinbildender Mathematikunterricht Schülerinnen und Schülern die folgenden drei *Grunderfahrungen* ermöglicht (Winter, 1995, S. 37):

1. Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
2. mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
3. in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Die Bildungsstandards umfassen in ihrem Wesen die benannten Grunderfahrungen sowie Inhalte, Kompetenzen und Niveaustufen, wie das folgende Kompetenzmodell für das Fach Mathematik darlegt. Das Kompetenzmodell liefert einen *Handlungsrahmen* für Lehrpersonen und Schulen, zur Einhaltung verbindlicher Ziele sowie zur Weiterentwicklung von Schule und Unterricht (Klieme et al., 2003). Es werden in diesem Modell zunächst die folgenden drei Dimensionen unterschieden (siehe Abbildung 1):

1. *Allgemeine mathematische Kompetenzen*
2. *Leitideen*
3. *Anforderungsbereiche*

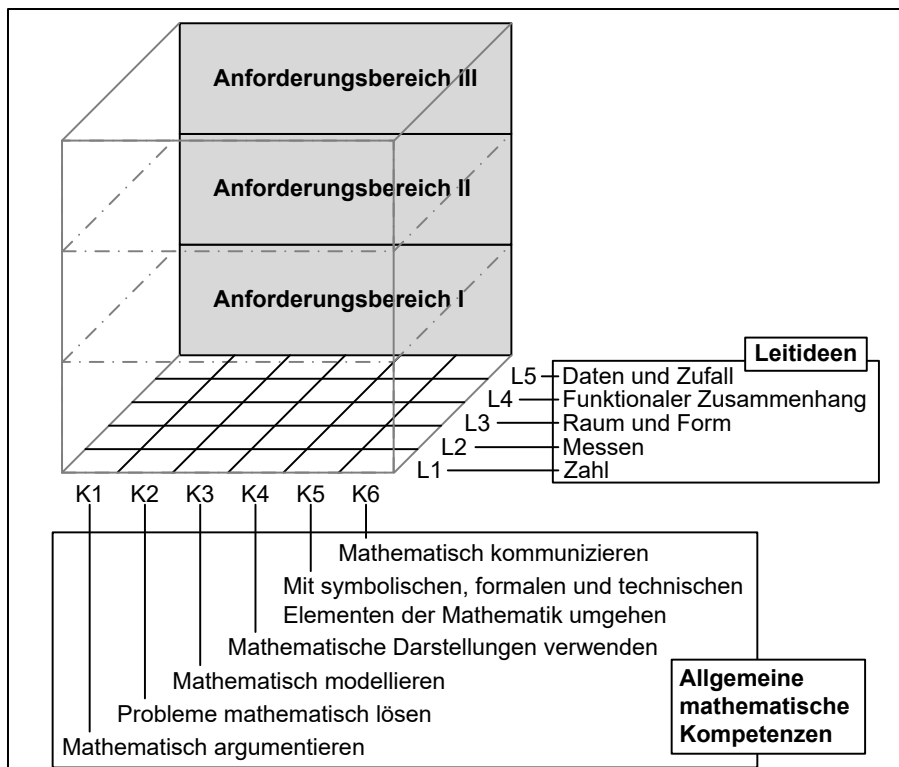


Abbildung 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards

Die *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* bilden die Prozessdimension des Modells. Dabei wird vom Grundgedanken ausgegangen, „das Können der Schüler an den *Kompetenzen* festzumachen, die sie beim Bearbeiten von Aufgaben zu aktivieren haben“ (Leiss & Blum, 2010, S. 33). Im Einzelnen sind dies die Kompetenzen *Mathematisch argumentieren* (K1), *Probleme mathematisch lösen* (K2), *Mathematisch modellieren* (K3), *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4), *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) und *Mathematisch kommunizieren* (K6). Diese *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* sollen differenziert betrachtet werden, auch wenn sie üblicherweise im Verbund erworben werden und häufig auch gemeinsam angewendet werden müssen. Insbesondere werden bei der Bearbeitung von komplexeren mathematischen Aufgaben oft mehrere dieser Kompetenzen benötigt. Mit der getrennten Betrachtung ist die Absicht verbunden, spezifische Eigenschaften und Anforderungen von Aufgaben im Mathematikunterricht transparent zu machen, was eine differenziertere Planung des Mathematikunterrichts ermöglicht. So kann ein mathematischer Inhalt den Schülerinnen und Schülern entlang verschiedener durchzuführender mathematischer Tätigkeiten zugänglich gemacht werden. Inhalte können durch die multiperspektivische und wiederholte Betrachtung eher in ihrer Gänze verstanden werden und mathematische Kompetenzen anhand unterschiedlichster Erscheinungen über den Inhalt hinaus erworben werden.

Jedoch reicht der Blick auf die *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* für eine produktive Gestaltung des Mathematikunterrichts nicht aus (Leiss & Blum, 2010). Daher bilden die

Leitideen eine zweite Dimension des Modells, die die mathematischen Inhalte umfasst. Die fünf Leitideen sind *Zahl* (L1), *Messen* (L2), *Raum und Form* (L3), *Funktionaler Zusammenhang* (L4) und *Daten und Zufall* (L5). In den Bildungsstandards wird zu den Leitideen erläutert:

„Eine Leitidee vereinigt Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete und durchzieht ein mathematisches Curriculum spiralförmig. Die Zuordnung einer inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz zu einer mathematischen Leitidee ist nicht in jedem Fall eindeutig, sondern davon abhängig, welcher Aspekt mathematischen Arbeitens im inhaltlichen Zusammenhang betont werden soll.“ (KMK, 2004, S. 9).

Leitideen folgen keinem fachdidaktischen Aufbau im Sinne einer zeitlichen Abfolge im Lernprozess („erst kommt das Zählen, dann kommt das Messen, usw.“), sondern sie erlauben es, bestimmte mathematische Inhalte unter einer Kategorie zusammenzufassen (Greefrath 2018, Blum 2010).

Die dritte Dimension enthält die drei *Anforderungsbereiche*. Sie beschreiben die Komplexität von Aufgaben, denn das Bearbeiten und Lösen von Aufgaben fordert mathematische Kompetenzen in unterschiedlichen Ausmaßen (KMK, 2004). Es werden dabei in der Regel drei Anforderungsbereiche unterschieden. Mit dem *Anforderungsbereich I* werden Anforderungen an allgemeine Kompetenzen beschrieben, die zum *Reproduzieren* unterrichtlicher Inhalte befähigen. Zum *Anforderungsbereich II* zählen solche Anforderungen an allgemeine Kompetenzen, die es Schülerinnen und Schülern ermöglichen, *Zusammenhänge herzustellen* und Gelerntes anzuwenden. In den *Anforderungsbereich III* gehören diejenigen Anforderungen, die es Schülerinnen und Schülern abverlangen, zu *verallgemeinern und zu reflektieren* (KMK, 2004).

Im Folgenden wird die Leitidee *Daten und Zufall* fokussiert.

3 Die Leitidee *Daten und Zufall*

In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den *Mittleren Schulabschluss* werden unter der Leitidee *Daten und Zufall* (L5) die folgenden, inhaltsbezogenen Kompetenzen zusammengefasst (KMK, 2004a, S. 12):

Die Schülerinnen und Schüler

- *werten graphische Darstellungen und Tabellen von statistischen Erhebungen aus,*
- *planen statistische Erhebungen,*
- *sammeln systematisch Daten, erfassen sie in Tabellen und stellen sie graphisch dar,*
- *auch unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel (wie Software),*
- *interpretieren Daten unter Verwendung von Kenngrößen,*
- *reflektieren und bewerten Argumente, die auf einer Datenanalyse basieren,*

- *beschreiben Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen,*
- *bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten.*

Diese Auflistung deckt sich mehrheitlich mit derjenigen für den *Hauptschulabschluss* (KMK, 2005), wobei vereinzelt Unterschiede identifiziert werden können. So hat in den Bildungsstandards für den *Hauptschulabschluss* die Datenanalyse einen geringeren Stellenwert. Dies wird dadurch ersichtlich, dass die Interpretation unter Verwendung von Kenngrößen sowie die bei einer Datenanalyse einhergehende Reflexion und Bewertung von Argumenten nicht explizit gefordert werden. Dass Schülerinnen und Schüler eine eigenständige Erhebung planen, wird ebenfalls nicht aufgegriffen. Stattdessen wird durch die inhaltsbezogenen Kompetenzen ein Alltagsbezug stärker betont. Schülerinnen und Schüler sollen sowohl (berechnete) Häufigkeiten und Mittelwerte als auch lebensnahe Wahrscheinlichkeitsaussagen im Kontext interpretieren können. Durch die aufgelisteten inhaltlichen Kompetenzen wird bereits ersichtlich, dass die Leitidee *Daten und Zufall* (L5) wesentliche Elemente der Stochastik enthält, darauf aber nicht beschränkt ist, sondern u.a. auch funktionale Zusammenhänge oder die Einführung in die Prozentrechnung beinhaltet.

Die Leitidee *Daten und Zufall* (L5) ist auch in alltäglichen Situationen präsent. Dabei lässt sich grundsätzlich zwischen den beiden Themenschwerpunkten *Daten* und *Zufall* unterscheiden. Das Themenfeld *Daten* ist in der heutigen Zeit durch die Verbreitung von Big Data, Data Science und künstlicher Intelligenz in alltäglichen Situationen besonders vertreten. Der Themenschwerpunkt *Zufall* beinhaltet Zufallserscheinungen sowie Wahrscheinlichkeitsberechnungen und lässt sich im Rahmen von Gesellschaftsspielen, wie *Mensch ärgere dich nicht*, im Rahmen des Shuffle-Modus von Musikstreamingdiensten oder in anderen Situationen wie der Interpretation medizinischer Tests wiederfinden.

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (KMK, 2004b) benennen die Leitidee *Daten, Häufigkeit* und *Wahrscheinlichkeit*, an die in der Sekundarstufe I die Leitidee *Daten und Zufall* (L5) anschließt. In der Primarstufe stehen dabei die Fähigkeiten im Fokus, durch Beobachtungen, Untersuchungen und einfache Experimente, Daten zu sammeln und diese z. B. in Schaubildern darzustellen. Dazu zählt auch, Grundbegriffe zu kennen und Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten einzuschätzen (KMK, 2004b). Zur Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung lassen sich zunächst subjektive Einschätzungen mit Begriffen wie *unmöglich*, *möglich* und *sicher* vornehmen, wie z. B. bei der Beurteilung von „Morgen wird es schneien.“, „Zwei Kinder einer Schule haben am selben Tag Geburtstag.“. Ebenso kann auf Grundlage von verschiedenen Ereignissen die Einschätzung von *zufällig* und *nicht zufällig* erfolgen, z. B. bei Aussagen wie „Bei 0° gefriert das Wasser.“ oder „Der Würfel zeigt eine Sechs.“ In den Bildungsstandards für die Sekundarstufe I werden daran anknüpfend das Beschreiben von Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen und das Bestimmen von

Wahrscheinlichkeiten bei (einfachen) Zufallsexperimenten genannt, wie z. B. das Ziehen einer ausgewählten Skatspielkarte.

Da der Alltag unvorhersehbar erscheinende Situationen bereithält, die aber auf Daten, Wahrscheinlichkeit und Zufall beruhen, ist es eine zentrale Aufgabe des Mathematikunterrichts, Schülerinnen und Schüler zu befähigen, solche Phänomene zu erkennen, zu unterscheiden und kritisch zu reflektieren. Indem die Schülerinnen und Schüler *dem Zufall auf die Spur* gehen, entwickeln sie ein tieferes Verständnis, wie Datenanalyse und stochastische Modelle unser tägliches Leben beeinflussen – von zufälligen Ereignissen über risikobehaftete Prognosen bis hin zu datenbasierten Entscheidungen.

Diese didaktische Handreichung setzt im Folgenden einen Schwerpunkt auf den Bereich *Zufall und Wahrscheinlichkeit*. Mit dem Fokus auf diese Teilthematik wird eine Differenzierung zwischen Zufall und Berechnung dargestellt. Zudem ist ein Wandel der Lehrpläne beobachtbar, der auf Basis der Bildungsstandards 2003/2004 zurückgeht und der die Elemente der Stochastik zentral und verbindlich verpflichtend stärker integriert (Krüger et al., 2015, S. 4).

3.1 Schwerpunktthema: Zufall

In Kapitel 2 dieser Handreichung werden die Grunderfahrungen genannt, die Schülerinnen und Schüler in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht erfahren sollten. Eine dieser Grunderfahrungen beschreibt, dass die Welt auf eine mathematische Weise wahrgenommen werden soll (Winter, 1995, S. 37). Ausgehend von der Prämisse, dass gerade Stochastikunterricht durch viele reale Beispiele sehr anwendungsbezogen sein kann, scheint dieser dazu prädestiniert zu sein, die eigene Umwelt auf mathematische Weise zu erfahren und einzuschätzen (Krüger et al., 2015).

Der hier gewählte Schwerpunkt *Zufall* ermöglicht das Erfahren der Mathematik in der persönlichen Umgebung besonders, da individuelle Vorstellungen im Fokus des Stochastikunterrichts stehen und die subjektiven Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler diesbezüglich stark ausgeprägt sind (Hauer-Typpelt, 2010, S. 12). Mit bekannten Spielen lassen sich stochastische Gesetzmäßigkeiten anwendungsorientiert vermitteln. Durch das Drehen von Glücksrädern, das Spielen von Kniffel oder das mögliche Hören des Lieblingssongs bei Musikstreamingdiensten im Shuffle-Modus kann ein experimenteller Zugang eröffnet werden. Mit dem Fokus, **dem Zufall auf der Spur** zu sein, lässt sich der Shuffle-Modus von Algorithmen abgrenzen, die auf Grundlage des bisherigen Hörverhaltens Songs datenbasiert zusammenstellen.

Vor der Durchführung genannter oder ähnlicher Zufallsexperimente empfiehlt sich aus fachdidaktischer Perspektive, die Schülerinnen und Schüler basierend auf ihren Erfahrungen erste Vorhersagen formulieren zu lassen. Anlehnend daran können Prognosen in Form von ersten

Schätzwerten und berechneten Wahrscheinlichkeiten erarbeitet werden (Greefrath et al., 2024, S. 253).

Für die *Wahrscheinlichkeit* und den *Zufall* existieren Grundvorstellungen, durch die der jeweilige Begriff inhaltlich gedeutet werden kann und die auf deskriptiver Statistik (Beschreiben der Daten) basieren. Tragfähige Grundvorstellungen sind notwendig, um ein tiefgründiges Verständnis mathematischer Begriffe aufzubauen (Greefrath, 2018). Zudem weisen sie eine Dynamik auf, da sie sich während der Schullaufbahn ändern können (Schmelzer, 2018). Wird der Begriff *zufällig* oder *Zufall* verwendet, ist anzunehmen, dass ein Ereignis nicht vorhersehbar ist. Die mathematische Definition des Zufalls ist jedoch nicht eindeutig (Hauer-Typpelt, 2010, S. 3.) Die subjektive Wirkung eines Zufalls ist in der Regel von der individuellen Deutung abhängig. So wird bei einem Würfelwurf beispielsweise das lange Ausbleiben der Augenzahl 6 fälschlicherweise als Ausgangspunkt genommen, im nächsten Wurf eine höhere Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 6 anzunehmen. Mit der individuellen Deutung von Zufall lässt sich an inhaltliche Themen aus außerschulischen Situationen im Unterricht anknüpfen, um das Verständnis des Zufallsbegriff weiter auszubauen und Fehlvorstellungen (wie das Beispiel mit dem Würfelwurf) zu korrigieren und entgegenzuwirken.

Damit ermöglichen der Begriff *Zufall* sowie seine subjektive Wirkung ein Ansetzen an außerschulischen Situationen im Unterricht. Spätestens bei der Einführung des Fachbegriffs *Zufallsexperiment* wird aber deutlich, dass damit eine Untersuchung von Daten sowie Bestimmung und Berechnung von Wahrscheinlichkeiten einhergehen. Die Zusammensetzung des Fachbegriffs aus *Zufall* und *Experiment* mag für Schülerinnen und Schüler irreführend sein, da das Wort *Zufall* im Wort *Zufallsexperiment* aus der alltäglichen Perspektive als willkürlich wahrgenommen werden kann. So wird das Wort *Zufall* im Alltag zum Beispiel dann willkürlich verwendet, wenn von vorgeschlagenen Inhalten auf Social-Media-Plattformen die Rede ist, welche jedoch nicht im mathematischen Sinne zufällig erscheinen, sondern auf Grundlage eines (uns unbekannten) Algorithmus. Die zugrundeliegende mathematische Struktur wird von den Schülerinnen und Schülern dabei nicht aufgegriffen. An dieser Stelle sollte auf solche Fehlvorstellungen oder sich weniger entwickelnde und kontextgebundene Grundvorstellungen geachtet werden (Krüger et al., 2015).

Der zuvor erwähnte Einbezug der Erfahrungen von Schülerinnen und Schülern bei der Durchführung von Zufallsexperimenten kann als *subjektivistischer Zugang* zum Wahrscheinlichkeitsbegriff verstanden werden. Dieser Zugang ist fachdidaktisch relevant, aber zugleich sehr herausfordernd. Eine mögliche Schwierigkeit bezieht sich auf das Modellieren der Realsituation, da die zuvor skizzierte subjektive Einschätzung des Zufalls die Grundlage des Modellierens individueller stochastischer Modelle bilden kann. Beispielsweise kann die subjektive Annahme, dass ausschließlich die Mitspielerinnen und Mitspieler eine Sechs würfeln und man

selbst nicht, die Durchführung der Realsituation erschweren. An dieser Stelle ist es sinnvoll, die Lernenden bei der Formulierung der Annahmen zu unterstützen und stärker zu begleiten.

Um die inhaltliche Ausprägung des *Wahrscheinlichkeitsbegriffs* zu fördern, können anfangs Ereignisse als *wahrscheinlich*, *möglich*, *unwahrscheinlich* oder *sicher* beschrieben und auf verschiedenen Skalen grafisch dargestellt werden. Dieses Vorgehen kennen die Schülerinnen und Schüler bereits aus der Grundschule (Krüger et al., 2015). Über theoretische Überlegungen können Ereignisse, die zuvor in der Primarstufe nur als *wahrscheinlich* – ohne konkreten Wert – beschrieben wurden, zu Beginn der Sekundarstufe durch die Wahrscheinlichkeitsberechnung exakt angegeben werden. Häufig zeigt sich die theoretische Annahme von gleichwahrscheinlichen Ereignissen, die sich aus Symmetrien ergibt, als ein erster Schritt im Aufbau des Wahrscheinlichkeitsbegriffs.

Als stochastische Modelle werden typischerweise zunächst Laplace-Modelle betrachtet. Während im vorherigen Abschnitt der *subjektivistische Zugang* zum Wahrscheinlichkeitsbegriff beschrieben wurde, wird mit dem Einsatz von Laplace-Modellen der *klassische Zugang* angesprochen. Für die Laplace-Formel gilt: *Wenn bei einem Vorgang mit mehreren möglichen Ergebnissen angenommen werden kann, dass alle Ergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen, so hat ein Ereignis A die Wahrscheinlichkeit:*

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}.$$

Die Definition beinhaltet eine Annahme und stellt damit einen erneuten Bezug zum Modellieren stochastischer Modelle her. Die Annahme der gleichwahrscheinlichen Ereignisse stellt eine theoretische Vereinfachung dar. Bei einigen Zufallsexperimenten erscheint die Annahme der Gleichverteilung fachdidaktisch sinnvoll, jedoch nicht immer realistisch sowie gerechtfertigt. Manche Alltagssituationen erfahren durch diese Vereinfachung eine Verfälschung (Krüger et al., 2015). Werden beispielsweise für eine Klassenverlosung kleine Zettel aus Papier geschnitten und gefaltet, um diese als Lose zu verwenden, so ist es möglich, dass diese Lose nicht alle gleich groß und gleich gefaltet werden, dennoch eine Gleichwahrscheinlichkeit angenommen wird.

Ist das Eintreten von Ereignissen nicht mehr gleichwahrscheinlich oder nicht direkt berechenbar wie beim klassischen Zugang, können durch Beobachtungen von vielfachem Durchführen von Experimenten absolute und relative Häufigkeiten strukturiert dargestellt werden. Damit wird der *frequentistische Zugang* zum Wahrscheinlichkeitsbegriff angesprochen. Auch zur Vermeidung von Fehlvorstellungen durch vereinfachte Annahmen ist der frequentistische Zugang weiterführend zu thematisieren. Beispielsweise können die Schülerinnen und Schüler beim Elfmeterschießen im Sportunterricht oder bei einer Analyse von UEFA-Spielen anhand notierter Häufigkeiten eine Wahrscheinlichkeit für die Verwandlung von Elfmern schätzen. Mit

zunehmender Frequenz der Durchführung der Experimente ändert sich die zuvor endliche Ergebnismenge des *klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs* zu einem beliebig großen Datenumfang. Das empirische Gesetz der großen Zahlen beschreibt die Gesetzmäßigkeit, dass sich „die Häufigkeit des Eintretens eines Zufallsereignisses mit zunehmender Anzahl an Durchführungen eines Zufallsereignisses stabilisiert“ (Greefrath et al., 2024, S. 255). Die Einführung des frequentistischen Zugangs erfolgt so über das Gütekriterium „je öfter, desto besser“. Durch die zunehmenden Wiederholungen wird das Eintreten des Ereignisses in Relation zur Gesamtanzahl an Durchführungen dargestellt. Da jedoch nicht eindeutig festgelegt ist, ab welcher Anzahl an Wiederholungen die Ergebnisse als „ausreichend stabil“ gelten können, bleibt das empirische Gesetz der großen Zahlen für Lernende oft abstrakt. Um diesen Annäherungsprozess greifbar zu machen, bietet es sich daher an, den Zusammenhang zwischen relativer Häufigkeit und Anzahl der Durchführungen anhand von Beispielen (z.B. Würfelwurf) mit unterschiedlich großen Stichprobenumfängen zu veranschaulichen. So können Schülerinnen und Schüler beobachten, wie sich die relative Häufigkeit mit zunehmender Wiederholungszahl an den theoretischen Wahrscheinlichkeitswert angleicht und welche Schwankungen bei kleineren Versuchszahlen noch auftreten. Beim frequentistischen Zugang bieten sich realitätsnahe Anwendungen auch mit Unterstützung digitaler Medien besonders an, da sie beliebig anwendbar sind und eine hohe Aktivität der Lernenden erzielen. Beispielsweise lassen sich stochastische Simulationen mit Tabellenkalkulationen einfach und unkompliziert im Unterricht einbeziehen. Da eine Software die Durchführung des Experiments übernimmt, liegt der Schwerpunkt für die Lernenden auf dem Interpretieren der Ergebnisse – das zugleich das inhaltliche Verständnis fördert (Greefrath et al., 2024).

Als weitere Idee für den frequentistischen Zugang können die Farbverteilung kleiner Gummibärchen in einer Vielzahl von Tüten untersucht und die absoluten und relativen Häufigkeiten in Diagrammen dargestellt werden. Über eine große Menge an Gummibärchentüten wird die Wahrscheinlichkeit einer jeden Farbe berechnet und die inhaltsbezogene mathematische Kompetenz wie z. B. das Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten bei (einfachen) Zufallsexperimenten angesprochen. Im Sinne der didaktischen Reduktion kann im Beispiel der Gummibärchen eine Farbe (Ereignis A) und das dazugehörige Gegenereignis $\bar{A}$ (alle anderen Farben) gewählt werden (Eichler & Vogel, 2013, S. 32).

Stochastische Simulationen sind typisch für den frequentistischen Zugang, wohingegen beim klassischen Zugang Baumdiagramme zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten eingesetzt werden. Baumdiagramme unterstützen Lernende bei der Verknüpfung von Elementarereignissen bei mehrstufigen Vorgängen und im heuristischen Vorgehen durch z. B. das graphisch-visuelle Abbilden erster kombinatorischer Überlegungen (z. B. Ziehen mit oder ohne Zurücklegen). Das systematische Zählen wird gefördert, indem die Frage nach der Menge aller mög-

lichen Ergebnisse beantwortet wird. Tabelle 1 zeigt eine Schrittfolge zur Erstellung von Baumdiagrammen, die im Unterricht eingesetzt werden kann. Zweistufige Prozesse werden hier häufig als Einstieg gewählt.

Tabelle 1: Schrittfolge als Orientierungsgrundlage (Krüger et al., 2015, S.133)

Schritt 1	Stelle dir den Sachverhalt vor und bestimme die Teilvorgänge, indem du dich fragst: „Was passiert zuerst und was passiert dann (und was danach...)?“ Oder: „Was passiert gleichzeitig?“
Schritt 2	Bestimme für jeden Teilvorgang das jeweils betrachtete Merkmal sowie dazu alle möglichen Ergebnisse: „Bei dem Teilvorgang kann das Ergebnis oder das Ergebnis oder ... eintreten.“
Schritt 3	Ordne die Teilvorgänge nacheinander an, nach Möglichkeit im zeitlichen Ablauf entsprechend.
Schritt 4	Zeichne ein Baumdiagramm, in dem jedes Ergebnis des ersten Teilvorgangs Ausgangspunkt für alle Ergebnisse des zweiten Teilvorgangs ist. Gibt es mehr als zwei Teilvorgänge, ist wieder jedes Ergebnis des zweiten Teilvorgangs Ausgangspunkt für alle Ergebnisse des dritten Teilvorgangs usw.
Schritt 5	Jedes Pfadende entspricht einem zusammengesetzten Ergebnis, das du in Kurzform hinter die Pfadenden schreibst.

Aus fachdidaktischer Perspektive fördert das Erstellen von Baumdiagrammen die Entwicklung des eigenständigen Lernprozesses. Ohne Hinweise von Mitschülerinnen und Mitschülern oder der Lehrkraft kann ein Baumdiagramm skizziert und nach vollständiger Darstellung durch das Anwenden der Summenregel überprüft werden (Kütting et al., 2011). Die Summenregel besagt, dass am Ende aller Pfade die möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments stehen und ihre Wahrscheinlichkeiten summiert 1 ergeben. In den höheren Jahrgängen liegt der Fokus auf dem systematischen Einsatz von Baumdiagrammen und Pfadregeln – auch bei bedingten Wahrscheinlichkeiten. Vierfeldertafeln und weitere Darstellungen können hier eingesetzt werden, um zusätzlich Abhängigkeiten und Zusammenhänge darzustellen. Die Konzepte von Unabhängigkeit und Erwartungswert werden eingeführt und angewendet.

3.2 Zufall in VERA-8

Im folgenden Abschnitt werden drei Beispielaufgaben aus vergangenen VERA-8-Erhebungen dargestellt, in denen die Leitidee *Daten und Zufall* (L5) mit dem Schwerpunkt *Zufall* angesprochen wird. Die Aufgaben werden nachfolgend hinsichtlich ihrer geforderten Kompetenz analysiert.

Beispielaufgabe 1: „Restaurantgewinnspiel“

Jedes Jahr in der Weihnachtszeit veranstaltet ein Restaurant ein Gewinnspiel. Der Wirt füllt dazu 100 Kugeln mit den Nummern 1 bis 100 in ein undurchsichtiges Gefäß und deckt dieses mit einem Tuch ab. Ein Gast, der die Rechnung bekommt, muss eine Zahl zwischen 1 und 100 nennen und dann, ohne hinzusehen, eine Kugel ziehen. Er zeigt dem Wirt die Nummer auf der Kugel und legt die Kugel wieder in das Gefäß zurück.

Teilaufgabe 1

Stimmt die Nummer der gezogenen Kugel mit der vom Gast genannten Zahl überein, muss der Gast die Rechnung nicht bezahlen.

Prüfe, ob die folgenden Aussagen richtig sind.

Kreuze jeweils an.

	richtig	falsch
Durchschnittlich jede einhundertste Rechnung muss nicht bezahlt werden.	☐	☐
Bei 100 Gästen darf mit Sicherheit einer umsonst essen.	☐	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Rechnung nicht bezahlt werden muss, liegt bei 1 %.	☐	☐
Jeden Abend muss mindestens ein Gast sein Essen nicht bezahlen.	☐	☐

Teilaufgabe 2

Enthält die Nummer auf der Kugel mindestens einmal die „Glücksziffer“ 7, bekommt der Gast einen Cappuccino gratis serviert.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen Cappuccino gratis zu bekommen?

Kreuze an.

☐

$$\frac{7}{100}$$

☐

$$\frac{10}{100}$$

☐

$$\frac{19}{100}$$

☐

$$\frac{20}{100}$$

☐

$$\frac{7}{10}$$

Die Aufgabe „Restaurantgewinnspiel“ beinhaltet das Beschreiben von Zufallsphänomenen in Realsituationen (Gewinnspiel) und die Beurteilung von Wahrscheinlichkeitsaussagen. Die in der Aufgabe gegebene Realsituation erfordert das Bilden eines mentalen Modells, das die Gewinnsituation – d.h. die Restaurantrechnung muss nicht bezahlt werden – mit verschiedenen Ausgängen erfasst. Nur auf Grundlage des passenden stochastischen Modells kann die Aufgabe korrekt gelöst werden. In allen drei Teilaufgaben wird die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) angesprochen, da die Schülerinnen und Schüler unter anderem erkennen

müssen, dass es sich um ein Laplace-Experiment handelt. Außerdem ist in allen drei Teilaufgaben die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) gefordert, da zum Beispiel dem Text die Information entnommen werden muss, dass bei dem Gewinnspiel das Ziehen mit Zurücklegen erfolgt.

In Teilaufgabe 1 ist die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) zusätzlich zum Prüfen richtiger oder falscher Aussagen über die Gewinnwahrscheinlichkeit erforderlich, da die Schülerinnen und Schüler relevante Begriffe wie *durchschnittlich*, *mit Sicherheit* oder *mindestens* den einzelnen Aussagen sinnentnehmend erfassen und auf ihr stochastisches Modell beziehen.

Die zweite Teilaufgabe schließt an der Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) an, da die Formulierung „mindestens einmal die Glücksziffer 7“ im gegebenen realen und mathematischen Modell gedeutet werden muss. Da es sich hier um ein mathematisches Problem handelt, das die Anwendung heuristischer Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien erfordert, wird ebenso die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2) gefördert.

Basierend auf der Ergebnismenge $\Omega = \{7, 17, \dots, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 87, 97\}$ ist für die Bestimmung der Anzahl der günstigen Ergebnisse im Verhältnis zur Gesamtanzahl der möglichen Ergebnisse eine geeignete Zählstrategie anzuwenden. Gleichzeitig werden die Schülerinnen und Schüler dazu aufgefordert, mit dem zuvor aufgestellten stochastischen Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit eine konkrete Wahrscheinlichkeit zu bestimmen. Dafür ist die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) gefragt.

Beide Teilaufgaben verwenden den klassischen Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff (vgl. Kapitel 3.1), da das Ziehen einer Kugel von 1 bis 100 als gleichwahrscheinlich angenommen wird. Ergänzend zu den ersten beiden Teilaufgaben, erweitert die dritte Teilaufgabe den Kompetenzerwerb im Bereich des Argumentierens.

Teilaufgabe 3

Der Wirt verrät einem Gast, dass an diesem Abend leider noch niemand gewonnen hat. Der Gast freut sich: „Prima, dann habe ich ja jetzt besonders gute Chancen.“

Hat der Gast Recht?

Kreuze an.

☐

Ja

☐

Nein

Begründe deine Antwort.

Copyright Text, Grafik und Teilaufgaben: IQB e. V., Lizenz: Creative Commons (CC BY).
Volltext unter: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode.de>

Die getroffene Annahme des Gastes aus Teilaufgabe 3 („Prima, dann habe ich jetzt ja besonders gute Chancen.“) müssen die Schülerinnen und Schüler zur korrekten Beantwortung der

Frage revidieren. An dieser Stelle sind verschiedene Begründungen denkbar, die die Kompetenz *Mathematisch argumentieren* (K1) ansprechen. Die Argumente werden schriftlich vorgenommen und lassen erkennen, ob sich die Schülerinnen und Schüler bei der Beantwortung der Frage auf ein stochastisches Modell oder fälschlicherweise auf subjektive Einschätzungen beziehen. Der Aussage in dieser Aufgabe liegt die Fehlvorstellung „Würfelgedächtnis“ zugrunde, welche den Glauben beinhaltet, dass sich frühere Ergebnisse auf Zukünftige auswirken. Daher sollte die Unabhängigkeit von Zufallsereignissen erneut angesprochen werden. Eine Begründung, die auf eine erhöhte Gewinnchance bei einer zuvor hohen Anzahl an Fehlzügen schließen lässt, repräsentiert das Formulieren und Beurteilen von Wahrscheinlichkeitsaussagen auf Basis der subjektiven Wirkung von Zufall und lässt die genannte Fehlvorstellung vermuten. Die Begründungen sollten sich jedoch auf die gleichbleibende Anzahl der Kugeln im Gefäß oder auf die Eigenschaft der Zufälligkeit des Ziehens beziehen, damit sie als korrekt gewertet werden können.

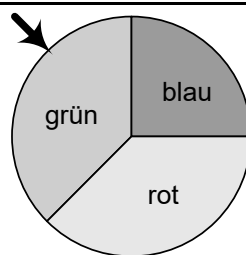
Im Unterricht können Fehlvorstellungen mit einer vertieften Auseinandersetzung des subjektivistischen Zugangs zum Wahrscheinlichkeitsbegriff vermieden werden. Denkbar ist auch eine Vereinfachung der Realsituation, indem das Zufallsexperiment mit einer reduzierten Anzahl an Kugeln simuliert wird. Mit diesem Zugang wird das Grundverständnis des stochastischen Modells der Laplace-Wahrscheinlichkeit vertieft und klar von dem subjektivistischen Zugang abgegrenzt.

Anders als in der obigen Aufgabe spricht die zweite Beispielaufgabe „*Glücksrad*“ einen anderen Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff an.

Beispielaufgabe 2: „Glücksrad“

Ein Glücksrad besteht aus drei Feldern: einem roten, einem grünen und einem blauen Feld.

Bei 180 Drehungen wies der Zeiger nach dem Stillstand des Glücksrades 66-mal auf das rote Feld und 54-mal auf das grüne Feld.



Teilaufgabe 1

Wie oft zeigte der Zeiger auf das blaue Feld?

Kreuze an.

☐

240-mal

☐

120-mal

☐

60-mal

☐

Das kann ich nicht entscheiden, weil das ja Zufall ist.

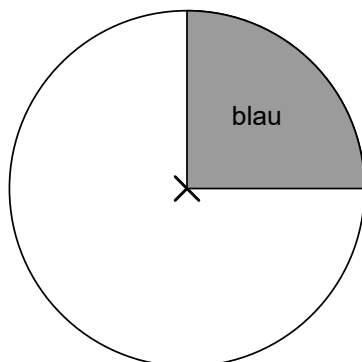
Das *klassische Glücksspiel* und die Notation der absoluten Häufigkeit der Farben Rot und Grün sollte den Schülerinnen und Schülern von möglichen experimentellen Zugängen zur Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten aus dem Unterricht vertraut sein. Wurde bei dieser Aufgabe die erste Antwortalternative (240-mal) angekreuzt, so wurde die Anzahl der Drehungen „blau“ zunächst vermutlich richtig berechnet, das Ergebnis jedoch zu den bereits erfolgten Drehungen addiert. Bei Auswahl der zweiten Antwortalternative (120-mal) wurde die Gesamtzahl der Drehungen von „rot“ und „grün“ berechnet. Bei Auswahl der letzten Antwortalternative („Das kann ich nicht entscheiden, weil das ja Zufall ist.“) wurde die Prognose über den Ausgang eines Zufallsversuchs mit der Analyse eines bereits abgeschlossenen Zufallsversuchs, wie er hier vorliegt, verwechselt. Damit wird in Teilaufgabe 1 lediglich die Anwendung bekannter Routineverfahren vorausgesetzt. Die Berechnung der fehlenden absoluten Häufigkeit für das blaue Feld kann über das Bestimmen der Differenz von 180 und $(66 + 54)$ erfolgen. Denkbar ist auch eine Lösung der Aufgabe über die Bestimmung des Gegenereignisses, das die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) erfordert. Nicht zwangsläufig müssen die Schülerinnen und Schüler bei dieser Aufgabe auf relative Häufigkeiten schließen. Die Lösung über eine Subtraktionsaufgabe zu ermitteln, ist ebenfalls zu erwarten: $180 - 66 - 54 = 60$.

Im Unterricht bietet diese Aufgabe eine Möglichkeit zur Weiterarbeit am frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff in Anlehnung an andere Zufallsexperimente. An der hohen Anzahl an Durchführungen kann angesetzt und die Aufgabe mit dem Ziel der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mittels relativer Häufigkeiten bearbeitet werden.

Teilaufgabe 2

Die Aufteilung der Felder im Glücksrad soll so verändert werden, dass der Zeiger bei etwa jeder zweiten Drehung auf dem grünen Feld steht.

Ergänze die Zeichnung.



Copyright Text, Grafik und Teilaufgaben: IQB e. V., Lizenz: Creative Commons (CC BY).
Volltext unter: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode.de>

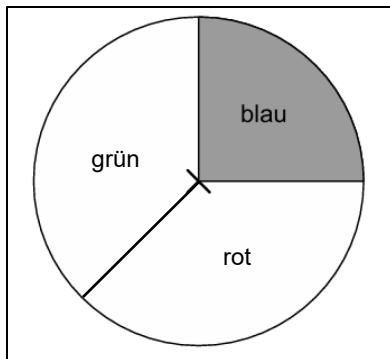


Abbildung 2: Antizipierte fehlerhafte Lösung zur Aufgabe „Glücksrad“ Teilaufgabe 2

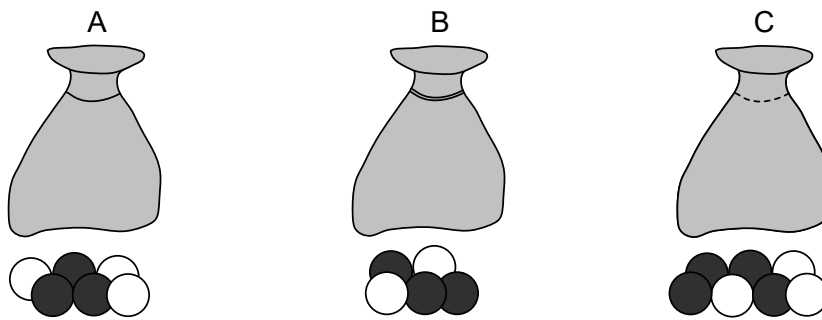
Die zweite Teilaufgabe spricht die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) an, da die Schülerinnen und Schüler die Formulierung „etwa jede zweite Drehung“ in die Wahrscheinlichkeit von 50 % übersetzen müssen. Mit dem Wissen müssen die Schülerinnen und Schüler das vorliegende Glücksrad zur Hälfte grün färben. Dass die Verteilung der grünen Fläche verschiedene Lösungen zulässt, hebt neben den Kompetenzen des Modellierens zudem die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) hervor. Mögliches Vernachlässigen des blauen Feldes oder anderweitige Fehler beim Lesen des Textes könnten zur Lösung in Abbildung 2 führen.

Bei der Analyse der vorhandenen Kompetenzen wird bei dieser Lösung deutlich, dass die Formulierung „etwa jede zweite Drehung“ mathematisch korrekt übersetzt wurde, aber nicht in die gegebene Darstellung übertragen werden konnte.

An dieser Stelle wäre es didaktisch sinnvoll, die Schülerinnen und Schüler dazu anzuleiten, ihre durch das Rückwärtsarbeiten ermittelte Lösung, eigenständig zu überprüfen. Mit dem selbstständigen Überprüfen wird die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) vertieft und gleichzeitig kann das Ergebnis durch die erneute Auseinandersetzung mit der Sachsituation überprüft werden.

Als letzte Aufgabe wurde die Beispielaufgabe „Glückssäckchen“ ausgewählt. Hier ist ausschließlich eine Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten über Routineverfahren gefordert.

Beispielaufgabe 3: „Glückssäckchen“



Bei einem Glücksspiel darf man sich von den drei Säckchen A, B, C eines auswählen. Unter den einzelnen Säckchen siehst du, mit welchen Kugeln sie gefüllt werden. In jedem Säckchen befinden sich dann schwarze und weiße Kugeln. Man zieht ohne hinzusehen aus seinem ausgewählten Säckchen eine Kugel; ist sie weiß, hat man gewonnen, ist sie schwarz, hat man verloren.

Teilaufgabe 1

Die Kugeln der drei Säckchen werden alle in einen größeren Sack zusammengeschüttet.

Nun wird aus diesem größeren Sack eine Kugel gezogen.

Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen?

Die Aufgabe „Glückssäckchen“ erfordert die Kompetenz *Mathematisch Modellieren* (K3), da Schülerinnen und Schüler die reale Situation – das Ziehen einer weißen Kugel als Gewinn – in ein stochastisches Modell, das Laplace-Modell, übersetzen und geeignete Verfahren zur Wahrscheinlichkeitsbestimmung anwenden. Zudem wird die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) benötigt, da Routineverfahren zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten ausgewählt werden. Ein typischer Fehler besteht darin, ausschließlich die weißen Kugeln als Ergebnismenge zu berücksichtigen und die schwarzen Kugeln zu übersehen. Dies weist auf Schwierigkeiten beim Aufbau eines vollständigen Ereignisraums und beim Verknüpfen realer und mathematischer Darstellung hin.

Die Aufgabe eignet sich, um Schülerinnen und Schüler systematisch beim Aufbau eines tragfähigen mentalen Modells des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zu unterstützen.

Der Übergang von Teilaufgabe 1 zu Teilaufgabe 2 bietet fachdidaktisches Potential, da sich sowohl die Anzahl der für das Ereignis A (gezogene Kugel ist weiß) günstigen Ausgänge als auch die Gesamtheit aller möglichen Ergebnisse verändert.

Teilaufgabe 2

Zwei andere Säckchen sind jeweils mit m Kugeln gefüllt. Im ersten Säckchen befinden sich n_1 weiße Kugeln, im zweiten Säckchen n_2 weiße Kugeln. Der Inhalt der beiden Säckchen wird wieder in einen großen Sack zusammengeschüttet und es wird aus dem großen Sack eine Kugel gezogen.

Welcher Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der man gewinnt?

Kreuze an.

☐ $\frac{n_1 + n_2}{m}$

☐ $\frac{n_1 \cdot n_2}{m}$

☐ $\frac{n_1 \cdot n_2}{2 \cdot m}$

☐ $\frac{n_1 + n_2}{2 \cdot m}$

Copyright Text, Grafik und Teilaufgaben: IQB e. V., Lizenz: Creative Commons (CC BY).
Volltext unter: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode.de>

In Teilaufgabe 2 müssen die Schülerinnen und Schüler mit gegebenen algebraischen Termen eine allgemeine Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in ähnlich gelagerten Situationen untersuchen. Zum einen wird damit die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) angesprochen. Zur Auswahl der korrekten Lösung sollten die Schülerinnen und Schüler berücksichtigen, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit – eine weiße Kugel zu ziehen – bereits für eine konkrete Gesamtmenge an Kugeln in Teilaufgabe 1 angesprochen wurde. Durch gedankliches Operieren und das Anwenden von heuristischen Strategien wird zum anderen die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2) angesprochen. Mit der bekannten Struktur aus Teilaufgabe 1 und über die Strategie des Verallgemeinerns können die Lernenden den korrekten Term auswählen: $\frac{n_1 + n_2}{m + m}$. Ergänzend besteht die Möglichkeit, über die Strategie des Zerlegens, erst den Zähler als die Summe aller günstigen Ereignisse zu deuten und im Anschluss den Quotienten in den Sachkontext zu übertragen.

4 Abschließende Anmerkungen

Die diesjährigen didaktischen Handreichungen beinhalten erneut zwei Themenschwerpunkte aus zwei Leitideen, die als Ergänzungsmodule für die VERA-8 Testung zur Auswahl stehen. Im Bereich der Leitidee *Messen* ist dies der Schwerpunkt *Ebene Figuren*, im Bereich der Leitidee *Daten und Zufall* der Schwerpunkt *Zufall*. Aus beiden Themen wurden zentrale Inhalte betrachtet, welche durch die Bildungsstandards vorgegeben werden. Für weitere Anregungen für die Unterrichtspraxis sei auf die Kommentare zu den einzelnen Aufgaben in Teil III der didaktischen Handreichungen verwiesen. Zudem wurden Beispielaufgaben zu den Schwerpunktthemen vorgestellt und aufgezeigt, mit welchen allgemeinen mathematischen Kompetenzen mit diesen einhergehen. Für weitere Beispiele und Anregungen stellt die in den vorangegangenen Kapiteln genannte Literatur eine gute Ausgangslage dar.

5 Literaturverzeichnis

Eichler, A. & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-00118-6>

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2024). *Digitalisierung im Mathematikunterricht*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-68682-9>

Greefrath, G. (2018). *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht: Didaktische Perspektiven zum Sachrechnen in der Sekundarstufe*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-57680-9>

Hauer-Typpelt, P. (2009). *Angemessene Grundvorstellung zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln – Vorschläge für den Stochastikunterricht*. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), 42.

KMK. (2004a). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003*. Wolters Kluwer.

KMK. (2004b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. Wolters Kluwer.

KMK. (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss. Beschluss vom 15.10.2004*. Wolters Kluwer.

Krüger, K., Sill, H.-D. & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43355-3>

Kütting, H., Sauer, M. J. & Padberg, F. (2011). *Elementare Stochastik*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2760-1>

Schmelzer, N. (2018). Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff. In Bender, P., & Wassong, T. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. 52. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. (S. 1611–1614). Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 21(61), 37–46. <https://doi.org/10.1515/dmvm-1996-0214>

6 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards	5
Abbildung 2: Antizipierte fehlerhafte Lösung zur Aufgabe „Glücksrad“ Teilaufgabe 2	17

7 Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Schrittfolge als Orientierungsgrundlage (Krüger et al., 2015, S.133)	12
---	----

8 Verzeichnis der Beispielaufgaben

Beispielaufgabe 1: „Restaurantgewinnspiel“	13
Beispielaufgabe 2: „Glücksrad“	15
Beispielaufgabe 3: „Glückssäckchen“	18