



Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten 2025

8. Jahrgangsstufe (VERA-8)

Mathematik

DIDAKTISCHE HANDREICHUNG

TEIL II

Fachdidaktische Orientierung

Leitidee *Raum und Form*



Inhaltsverzeichnis

1	EINLEITUNG	3
2	BILDUNGSSTANDARDS UND KOMPETENZMODELL IM FACH MATHEMATIK.....	4
3	DIE LEITIDEE RAUM UND FORM	7
3.1	SCHWERPUNKTTHEMA: RÄUMLICHE GEOMETRIE.....	8
3.2	RÄUMLICHE GEOMETRIE IN VERA-8	12
4	ABSCHLIEßENDE ANMERKUNGEN	17
5	LITERATURVERZEICHNIS.....	18
6	ABBILDUNGSVERZEICHNIS.....	20
7	TABELLENVERZEICHNIS	20
8	VERZEICHNIS DER BEISPIELAUFGABEN	20

Autorinnen und Autoren¹ der fachdidaktischen Erläuterungen in Teil II sind Marlena Meyer, Antonia Rewer und Laura Wirth. Die gezeigten Testaufgaben entstanden in Kooperation von Lehrkräften aus zehn Bundesländern und Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktikern unter Federführung der Arbeitsgruppe Prof. Greefrath, Universität Münster (fachdidaktische Leitung) und des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) e. V.

Haftungsausschluss:

Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle übernehmen wir keine Haftung für Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der eigenen Inhalte und der Inhalte externer Links. Für den Inhalt der verlinkten Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien
auch online finden können?

www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

¹ Aufgrund der dynamischen Diskussion zum sprachlichen Umgang mit geschlechtlicher Vielfalt sowie der Positionierung des Rats für deutsche Rechtschreibung und der Schulbehörden einiger Länder gegen Schreibweisen mit Wortbinnenzeichen (z. B. Genderstern) verwenden wir Doppelnennungen (z. B. Schülerinnen und Schüler) oder geschlechtsneutrale Formulierungen (z. B. Lehrkräfte). Hiermit sind ausdrücklich Personen aller Geschlechter gemeint.

1 Einleitung

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK, 2004, 2005, 2015) mit ihren Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen bilden die Grundlage für die VERgleichsArbeiten in der 8. Jahrgangsstufe (VERA-8) im Fach Mathematik. Diese didaktische Handreichung zu VERA-8 verfolgt das Ziel, Sie als Lehrkräfte im Bemühen um einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht zu unterstützen, indem einzelne Testaufgaben erläutert werden, Informationen zu Nutzungsmöglichkeiten der Vergleichsarbeiten im Unterricht gegeben werden sowie auf förderdiagnostische Materialien und auf entsprechende Literatur hingewiesen wird. Sie können daher besonders von Ihnen im Anschluss an die Vergleichsarbeiten genutzt werden, um Schülerinnen und Schülern spezifische Lernangebote zu machen. Es wird zunächst der Aufbau der Bildungsstandards vorgestellt. Da sich die Entwicklung der VERA-8 Aufgaben für das Jahr 2025 an den Bildungsstandards aus dem Jahr 2004 orientiert und eine Umstellung in VERA-8 auf die überarbeiteten Bildungsstandards aus dem Jahr 2022 erst zu einem späteren Zeitpunkt erfolgt, bezieht sich auch diese Handreichung auf die Bildungsstandards aus dem Jahr 2004. Anschließend wird einer der Schwerpunkte, die in den diesjährigen Ergänzungsmodulen zur Wahl stehen, näher erläutert: die Leitidee *Raum und Form* mit einem Fokus auf *Räumliche Geometrie*. Es werden insbesondere zu Aspekten des Schwerpunktes fachdidaktische Herausforderungen geschildert und Anregungen vorgestellt, wie mit diesen in der unterrichtlichen Praxis im Fach Mathematik umgegangen werden kann. In dem dazugehörigen Kapitel werden außerdem Aufgaben aus VERA-8 präsentiert, die sich der diesjährigen Schwerpunktsetzung zuordnen lassen. Diese ausgewählten Beispiele zeigen exemplarisch, wie bestimmte allgemeine Kompetenzen gezielt durch eine Testaufgabe geprüft werden können. Darüber hinaus werden Hinweise gegeben, inwiefern diese Aufgaben auch im Unterricht als Lerngelegenheit zur Förderung der Kompetenzen eingesetzt werden kann.

2 Bildungsstandards² und Kompetenzmodell im Fach Mathematik

Im Anschluss an die Ergebnisse großer internationaler Vergleichsstudien – wie etwa der PISA-Studie oder TIMSS – führte die Kultusministerkonferenz (KMK) ab dem Jahr 2003 Bildungsstandards für die Fächer Deutsch, Mathematik und die erste Fremdsprache (Englisch/Französisch) ein³. Eine grundlegende Wende stand bevor, da die Qualität von schulischer Arbeit durch nationale Bildungsstandards, welche verbindliche Anforderungen an das Lehren und Lernen in der Schule formulieren, gesichert und gesteigert werden soll (Klieme et al., 2003): Während zuvor der *Input* im Vordergrund stand, also Inhalte und Themen, sollte nun auch der *Output* stärkere Beachtung finden, also die konkreten Kompetenzen, Wissensstrukturen, Werte, über die Schülerinnen und Schüler nach dem Unterricht verfügen sollen. Inhalte sollten mit der Entwicklung von Persönlichkeitsmerkmalen verknüpft werden, die die Basis für ein lebenslanges Lernen legen und so persönliche Weiterentwicklung und gesellschaftliche Teilhabe ermöglichen (Klieme et al., 2003). Die OECD betont dabei den Anwendungscharakter von Mathematik:

„Mathematische Grundbildung umfasst die Fähigkeit einer Person zum mathematischen Argumentieren sowie Mathematik in einer Vielzahl von Alltagskontexten einzusetzen, in denen Problemstellungen mathematisch formuliert, bearbeitet und interpretiert werden. Dies beinhaltet mathematische Konzepte, Fakten und Methoden, um Phänomene zu beschreiben, zu erklären und vorauszusagen. Mathematikkompetenz hilft Personen zu erkennen, welche Rolle Mathematik in der Welt spielt, um fundierte Urteile abzugeben sowie gut begründete Entscheidungen zu treffen, so wie sie von konstruktiven, engagierten und reflektierten Bürgerinnen und Bürgern des 21. Jahrhunderts benötigt werden“ (OECD, 2023, Abschnitt Übersicht, Absatz 3, eigene Übersetzung).

Zu diesem Zweck benennen die Bildungsstandards Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe anhand zentraler Fachinhalte erworben haben sollen (KMK, 2004, 2005). Dabei sollte ein allgemeinbildender Mathematikunterricht Schülerinnen und Schülern die folgenden drei *Grunderfahrungen* ermöglichen (Winter, 1995, S. 37):

² Die Bildungsstandards für Mathematik wurden für den Ersten und Mittleren Schulabschluss weiterentwickelt und 2022 von der KMK verabschiedet (KMK, 2022). Die Didaktische Handreichung Teil II bezieht sich auf die Bildungsstandards, die 2004 und 2003 von der KMK beschlossen worden sind, da sich die Normierungsaufgaben für die neuen Bildungsstandards noch in der Entwicklung befinden.

³ <https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>

1. Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
2. mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
3. in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Die Bildungsstandards umfassen in ihrem Wesen die benannten Grunderfahrungen sowie Inhalte, Kompetenzen und Niveaustufen, wie das folgende Kompetenzmodell für das Fach Mathematik darlegt. Das Kompetenzmodell liefert einen *Handlungsrahmen* für Lehrpersonen und Schulen, zur Einhaltung verbindlicher Ziele sowie zur Weiterentwicklung von Schule und Unterricht (Klieme et al., 2003). Handlungsrahmen bedeutet insbesondere, dass im Vordergrund die verbindliche Einhaltung von konsensuell ausgehandelten Zielvorgaben steht, wobei den Schulen dabei Freiraum für die innerschulische Lernplanung gelassen wird, um diese Ziele zu erreichen. Es werden in diesem Modell zunächst die folgenden drei Dimensionen unterschieden (siehe Abbildung 1):

1. *Allgemeine mathematische Kompetenzen*
2. *Leitideen*
3. *Anforderungsbereiche*

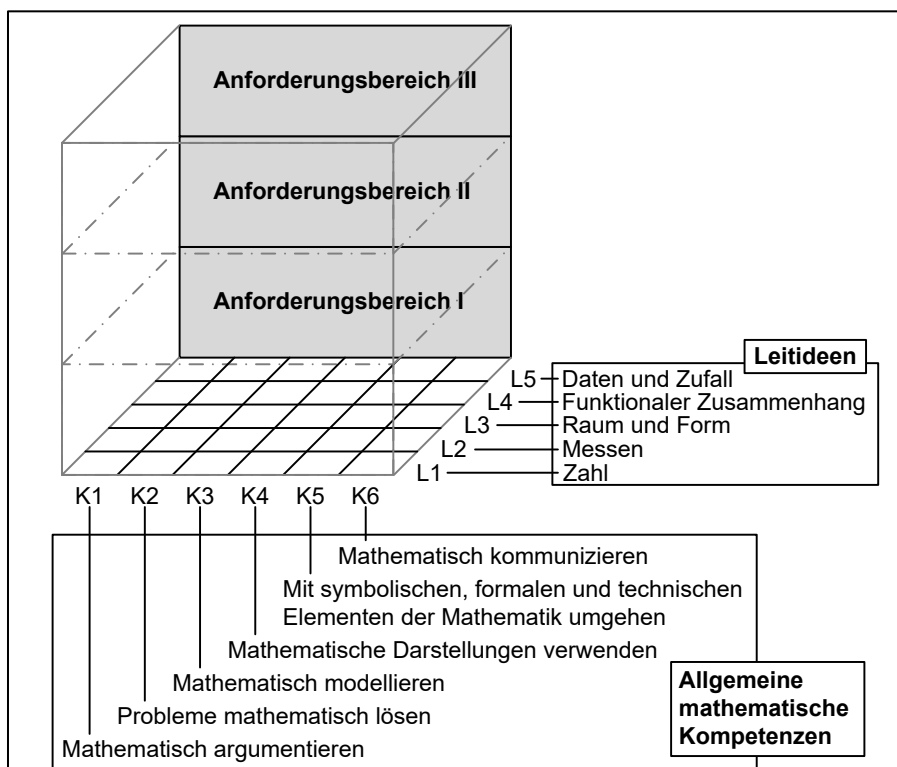


Abbildung 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards

Die *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* bilden die Prozessdimension des Modells. Dabei wird vom Grundgedanken ausgegangen, „das Können der Schüler an den *Kompetenzen* festzumachen, die sie beim Bearbeiten von Aufgaben zu aktivieren haben“ (Leiss & Blum, 2010, S. 33). Im Einzelnen sind dies die Kompetenzen *Mathematisch argumentieren* (K1), *Probleme mathematisch lösen* (K2), *Mathematisch modellieren* (K3), *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4), *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) und *Mathematisch kommunizieren* (K6). Diese *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* sollen differenziert betrachtet werden, auch wenn sie üblicherweise im Verbund erworben werden und häufig auch gemeinsam angewendet werden müssen. Insbesondere werden bei der Bearbeitung von komplexeren mathematischen Aufgaben oft mehrere dieser Kompetenzen benötigt. Mit der getrennten Betrachtung ist die Absicht verbunden, spezifische Eigenschaften und Anforderungen von Aufgaben im Mathematikunterricht transparent zu machen, was eine differenziertere Planung des Mathematikunterrichts ermöglicht. So kann ein mathematischer Inhalt den Schülerinnen und Schülern entlang verschiedener durchzuführender mathematischer Tätigkeiten zugänglich gemacht werden. Inhalte können durch die multiperspektivische und wiederholte Betrachtung eher in ihrer Gänze verstanden werden und mathematische Kompetenzen anhand unterschiedlichster Erscheinungen über den Inhalt hinaus erworben werden.

Jedoch reicht der Blick auf die *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* für eine produktive Gestaltung des Mathematikunterrichts nicht aus (Leiss & Blum, 2010). Daher bilden die *Leitideen* eine zweite Dimension des Modells. Die fünf Leitideen sind *Zahl* (L1), *Messen* (L2), *Raum und Form* (L3), *Funktionaler Zusammenhang* (L4) und *Daten und Zufall* (L5). In den Bildungsstandards wird zu den Leitideen erläutert:

„Eine Leitidee vereinigt Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete und durchzieht ein mathematisches Curriculum spiralförmig. Die Zuordnung einer inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz zu einer mathematischen Leitidee ist nicht in jedem Fall eindeutig, sondern davon abhängig, welcher Aspekt mathematischen Arbeitens im inhaltlichen Zusammenhang betont werden soll.“ (KMK, 2004, S. 9).

Leitideen folgen keinem fachdidaktischen Aufbau im Sinne einer zeitlichen Abfolge im Lernprozess („erst kommt das Zählen, dann kommt das Messen, usw.“), sondern sie erlauben es, bestimmte mathematische Inhalte unter einer Kategorie zusammenzufassen. Auch soll durch die Betonung von Leitideen deutlich werden, dass sich aus mathematischen Phänomenen wie dem Zählen, dem Messen oder dem Umgang mit Zufällen mathematische Sachgebiete herausgebildet haben (Greefrath 2018, Blum 2010).

Die dritte Dimension enthält die drei *Anforderungsbereiche*. Sie beschreiben die Komplexität von Aufgaben, denn das Bearbeiten und Lösen von Aufgaben fordert mathematische Kompetenzen in unterschiedlichen Ausmaßen (KMK, 2004). Es werden dabei in der Regel drei Anforderungsbereiche unterschieden. Mit dem *Anforderungsbereich I* werden Anforderungen

an allgemeine Kompetenzen beschrieben, die zum *Reproduzieren* unterrichtlicher Inhalte befähigen. Zum *Anforderungsbereich II* zählen solche Anforderungen an allgemeine Kompetenzen, die es Schülerinnen und Schülern ermöglichen, *Zusammenhänge herzustellen* und Gelerntes anzuwenden. In den *Anforderungsbereich III* gehören diejenigen Anforderungen, die es Schülerinnen und Schülern abverlangen, zu *verallgemeinern und zu reflektieren*.

Im Folgenden wird exemplarisch ein Aspekt der Leitidee *Raum und Form* herausgegriffen und erläutert. Eine Orientierung des Mathematikunterrichts an den *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* – also der Prozessdimension des Kompetenzmodells – ist eine maßgebliche Errungenschaft der Bildungsstandards, die jedoch auch bei exemplarischer Betrachtung einzelner Leitideen nicht in den Hintergrund geraten sollte.

3 Die Leitidee *Raum und Form*

Für die Leitidee *Raum und Form* werden die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen in den Bildungsstandards für den *mittleren Schulabschluss* folgendermaßen konkretisiert (KMK, 2004, S. 11):

Die Schülerinnen und Schüler

- *erkennen und beschreiben geometrische Strukturen in der Umwelt,*
- *operieren gedanklich mit Strecken, Flächen und Körpern,*
- *stellen geometrische Figuren im kartesischen Koordinatensystem dar,*
- *stellen Körper (z.B. als Netz, Schrägbild oder Modell) dar und erkennen Körper aus ihren entsprechenden Darstellungen,*
- *analysieren und klassifizieren geometrische Objekte der Ebene und des Raumes,*
- *beschreiben und begründen Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte (wie Symmetrie, Kongruenz, Ähnlichkeit, Lagebeziehungen) und nutzen diese im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachzusammenhängen,*
- *wenden Sätze der ebenen Geometrie bei Konstruktionen, Berechnungen und Beweisen an, insbesondere den Satz des Pythagoras und den Satz des Thales,*
- *zeichnen und konstruieren geometrische Figuren unter Verwendung angemessener Hilfsmittel wie Zirkel, Lineal, Geodreieck oder dynamische Geometriesoftware,*
- *untersuchen Fragen der Lösbarkeit und Lösungsvielfalt von Konstruktionsaufgaben und formulieren diesbezüglich Aussagen,*
- *setzen geeignete Hilfsmittel beim explorativen Arbeiten und Problemlösen ein.*

In den Bildungsstandards Mathematik für den Hauptschulabschluss finden sich viele der genannten Aspekte wieder, es wird jedoch weniger der Fokus auf Problemlöse- und Beweisprozesse gelegt (KMK, 2004). Ebenso finden fachliche Analysen und exploratives

Arbeiten dort keine direkte Erwähnung, obgleich sich empirisch zeigt, dass konstruktivistische, explorative Ansätze besonders für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler wirksam sind (u.a. Reiss et al., 2006). Besonders hervorgehoben werden in beiden Versionen der Bildungsstandards das Analysieren und Anfertigen verschiedener Darstellungen von Körpern. In diesem Rahmen sollen die Schülerinnen und Schüler auch gedanklich mit Körpern operieren (z.B. gedankliche Rotationen von Körpern durchführen) und Körper aus verschiedenen Darstellungen (z.B. Schrägbild oder Körpernetz) erkennen können.

In den folgenden zwei Unterkapiteln wird zunächst das Schwerpunktthema der diesjährigen VERA-8 Erhebung *Räumliche Geometrie* näher betrachtet. Schülerinnen und Schüler werden in ihrem alltäglichen Leben ständig mit der räumlichen Geometrie konfrontiert, da sich unser Leben in einem dreidimensionalen Raum abspielt. Um sich in der Umwelt zu orientieren oder sich selbst in der Umwelt wahrzunehmen, ist ein räumliches Vorstellungsvermögen notwendig. Die Förderung eines solchen räumlichen Vorstellungsvermögens ist ein Ziel des Geometrieunterrichts in der Schule (Weigand, 2018). In den folgenden Unterkapiteln wird zunächst dargestellt, wie Inhalte der *räumlichen Geometrie* im Unterricht thematisiert werden können. Im Anschluss daran werden Beispiele zu VERA-8 Aufgaben aus dem Bereich der *räumlichen Geometrie* vorgestellt. Die Aufgaben werden auf die benötigten inhaltlichen Fähigkeiten aus dem Bereich *Räumliche Geometrie* untersucht sowie die erforderlichen prozessbezogenen Kompetenzen beschrieben.

3.1 Schwerpunktthema: *Räumliche Geometrie*

Der Mathematikunterricht soll drei Grunderfahrungen (Winter, 1995) ermöglichen (vgl. Kapitel 2) und somit zur Bildung der Schülerinnen und Schüler beitragen (KMK, 2004). Zur Ermöglichung dieser Grunderfahrungen kann auch die Geometrie beitragen: So soll beispielsweise im Rahmen der ersten Grunderfahrungen die Umwelt mithilfe der Geometrie erschlossen werden (Weigand, 2018). Das heißt: Die uns umgebende Welt soll unter einer geometrischen Perspektive gesehen, geometrische Figuren und Körper in unserer Umwelt (z.B. in Verpackungen) erkannt und bezüglich ihrer Funktion und Bedeutung analysiert werden. Das Konstruieren mit Zirkel und Lineal bietet Einblicke in die deduktive Welt der Mathematik und das Erfahren typischer mathematischer Arbeitsweisen, womit die zweite Grunderfahrung ermöglicht wird. Im Rahmen der dritten Grunderfahrung soll das Problemlösen mit Geometrie erlernt werden, welches als eine der Grunderfahrungen eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts zählt. Für das Problemlösen stellt die Geometrie ein geeignetes Übungsfeld dar, da viele geometrische Probleme in Modellen oder Zeichnungen veranschaulicht werden können und Handlungen (beispielsweise mit Zirkel und Lineal) verständlich nachzuvollziehen sind (Weigand, 2018).

Da das alltägliche Leben im dreidimensionalen Raum abläuft, kommt der Thematisierung der räumlichen Geometrie im Schulunterricht eine besondere Bedeutung zu (Weigand, 2018).

Sollen raumgeometrische Objekte auf einem Zeichenblatt oder einem Computerbildschirm dargestellt werden, so ist die Projektion der dreidimensionalen Objekte in die Ebene erforderlich (Weigand, 2018). Um auch im Unterricht mit raumgeometrischen Objekten zu arbeiten, kann dynamische Geometriesoftware für die Raumgeometrie verwendet werden. Ein Beispiel dafür ist der 3D-Modus in GeoGebra. Eine weitere Möglichkeit, Modelle von raumgeometrischen Objekten im Mathematikunterricht zu erzeugen, ist die 3D-Druck-Technologie. Mithilfe des 3D-Drucks können individuelle Anschauungsobjekte durch Lehrkräfte oder auch selbstständig durch Schülerinnen und Schüler erzeugt werden. Auf diese Weise kann auch das forschend-entdeckende Lernen von Schülerinnen und Schülern gefördert werden (Witzke & Hoffart, 2018). Zudem kann die Bedeutung und Erstellung von Modellen von realweltlichen Objekten thematisiert werden. An dieser Stelle lässt sich somit eine Parallele zwischen der Arbeit mit der 3D-Druck Technologie bzw. dem Entwicklungsprozess von Modellen für den 3D-Druck und dem *Mathematischen Modellieren* (K3) ziehen.

Modelle sind auch bei der Thematisierung von Körpern im Mathematikunterricht von großer Bedeutung. Modelle dienen, beispielsweise bei Berechnungen, als Anschauungshilfen und können das räumliche Vorstellungsvermögen unterstützen. Es gibt verschiedene Modelle raumgeometrischer Objekte, denen jeweils unterschiedliche didaktische Bedeutungen zugeschrieben werden (Roth & Wittmann, 2018). Zum Einstieg in das Thema Körper bieten sich sogenannte *Kompaktmodelle* bzw. *Vollmodelle* an. Diese stellen Prototypen der Körper dar und bieten sich zum Beschreiben der Eigenschaften eines Körpers an (zum Beispiel, um die Anzahl der Ecken eines Quaders zu beschreiben). So können Alltagsgegenstände im Schulunterricht als Vollmodelle dienen. Um einen Einblick in das Innere eines Körpers zu erhalten oder die Kanten eines Körpers stärker zu fokussieren, bietet sich die Arbeit mit *Kantenmodellen* an. Bei diesen fehlen die Flächen des Körpers. Ein Kantenmodell kann aus Holzstäbchen selbst angefertigt werden. Zudem bietet die Arbeit mit *Flächenmodellen* die Möglichkeit, Körpernetze darzustellen. Diese können ebenfalls eigenständig, beispielsweise aus Papier, angefertigt werden. Des Weiteren eignen sich Körpernetze, um den Zusammenhang zwischen räumlicher und ebener Geometrie herzustellen, indem die Oberfläche der Körper in die Ebene abgewickelt wird. Da Gegenstände der realen Umwelt zunächst als Körper erfasst werden und man erst in einem zweiten Schritt, zum Beispiel durch Betrachtung der Oberfläche eines Körpers oder von bildlichen Darstellungen, zur Zeichenebene gelangt ist, eine parallele Betrachtung von ebenen Figuren und Körpern sinnvoll (Roth & Wittmann, 2018). Eine Gegenüberstellung der verschiedenen Modelle raumgeometrischer Objekte ist in Tabelle 1 anhand eines Würfels beispielhaft dargestellt.

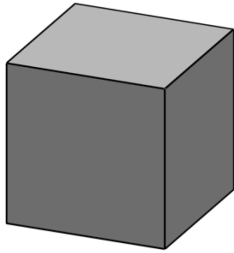
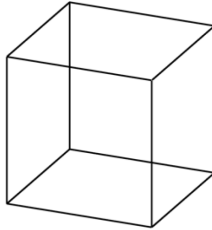
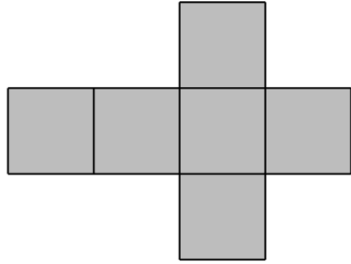
Vollmodell	Kantenmodell	Flächenmodell
		

Tabelle 1: Verschiedene Modelle eines Würfels

Sind die Schülerinnen und Schüler bereits ein wenig mit Körpern vertraut, können Körpernetze oder in der Ebene dargestellte Vollmodelle auch zur Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens oder im Rahmen der Kopfgeometrie eingesetzt werden (Roth & Wittmann, 2018), um somit das gedankliche Operieren mit Körpern zu fördern. Unter dem räumlichen Vorstellungsvermögen wird die Fähigkeit verstanden, sich Objekte vorzustellen und in Gedanken damit zu operieren (z.B. Zusammenfalten eines Würfelnetzes oder Drehen eines Würfels). Voraussetzung dafür ist, dass Objekte zuvor visuell wahrgenommen und Vorstellungsbilder aufgebaut werden. Schülerinnen und Schüler können nur dann in Gedanken mit Objekten operieren, wenn sie diese bereits visuell wahrgenommen und im visuellen Gedächtnis gespeichert haben. Indem sichtbare Objekte wahrgenommen werden, also beispielsweise (wieder) erkannt und Gemeinsamkeiten und Unterschiede verschiedener Objekte erfasst werden, können solche Vorstellungsbilder aufgebaut werden. Die Fähigkeit des räumlichen Vorstellungsvermögens besteht aus den fünf Komponenten: *Räumliche Wahrnehmung*, *Veranschaulichung*, *Mentale Rotation*, *Räumliche Beziehungen*, *Räumliche Orientierung*. Diese Komponenten beschreiben verschiedene Fähigkeiten des räumlichen Vorstellungsvermögens, zum Beispiel die Fähigkeit, sich gedanklich Aktivitäten wie das Falten oder Schneiden von räumlichen Objekten oder Objektteilen vorzustellen (*Veranschaulichung*) oder die Fähigkeit, sich Rotationen von Objekten vorzustellen (*Mentale Rotation*) (Maier, 1999). Ein Beispiel für eine Diagnoseaufgabe zur Komponente *Mentale Rotation* ist in Abbildung 2 zu sehen. Eine ausführliche Beschreibung der Komponenten sowie weitere Diagnoseaufgaben werden in Maier, 1999 und Roth und Wittmann, 2018 beschrieben.

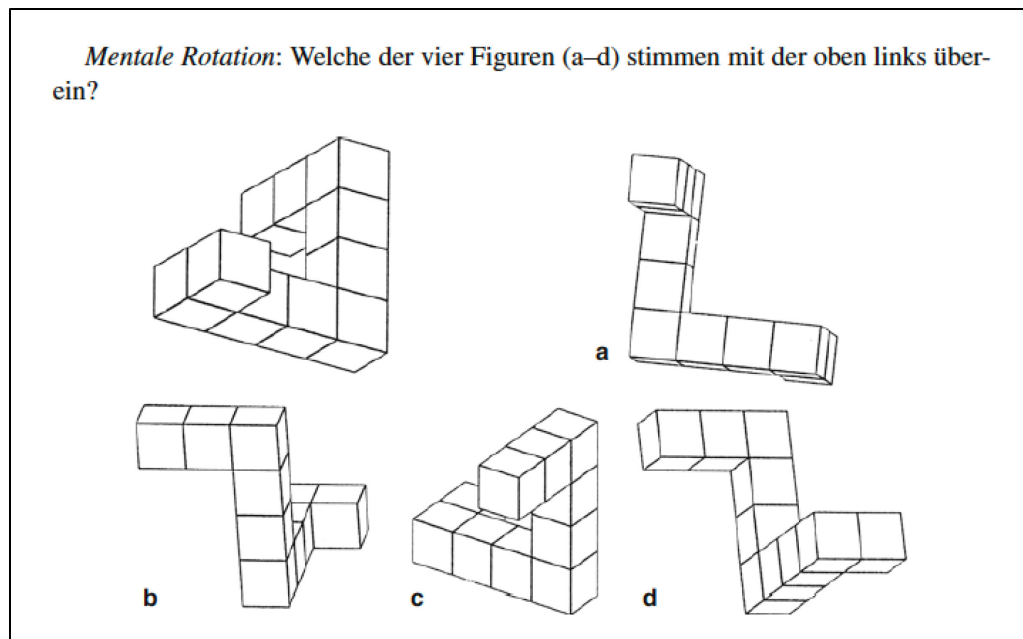


Abbildung 2: Diagnoseaufgabe zur Komponente Mentale Rotation (Roth & Wittmann, 2018)

Um das räumliche Vorstellungsvermögen zu fördern, sollte vor allem die Vorstellung von Bewegungen, wie zum Beispiel Rotationen, geschult werden. Dies kann unter anderem mit der Kopfgeometrie unterstützt werden (Roth & Wittmann, 2018). Mithilfe der Kopfgeometrie werden geometrische Probleme ohne die Nutzung von Hilfsmitteln im Kopf gelöst. Dadurch kann neben der Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens auch Sicherheit im Gebrauch der Fachsprache gewonnen werden, Grundvorstellungen zu geometrischen Begriffen können aufgebaut und angewendet sowie geometrische Grundbegriffe gesichert und vertieft werden (Roth & Wittmann, 2018). Ein Beispiel für eine Aufgabe zur Kopfgeometrie ist in Abbildung 3 zu sehen.

- Ein Würfel steht auf einer Ebene, die Vorderfläche zeigt zu dir.
- Zeichne die beiden Diagonalen der rechten Fläche. Ihr Schnittpunkt heißt M .
- Der Würfeckpunkt H liegt links, hinten, oben.
- Zeichne eine Gerade g durch H und M , sie schneidet die Ebene, auf der der Würfel steht, im Punkt S .
- Wie weit ist S vom Würfel entfernt?
- Kannst du die Lage von S genauer beschreiben?

Abbildung 3: Beispielaufgabe zur Kopfgeometrie (Roth & Wittmann, 2018, S. 144)

Für die Arbeit mit Aufgaben zur Kopfgeometrie werden drei Phasen erläutert (Senftleben, 1996; Roth und Wittmann, 2018): In der ersten Phase verbalisiert die Lehrkraft eine Aufgabenstellung. In der zweiten Phase wird im Kopf mit Objekten operiert. In der dritten Phase werden Ergebnisse präsentiert und diskutiert. Zur Unterstützung ist es möglich, zunächst Hilfsmittel einzusetzen (Senftleben, 1996). So kann die Lehrkraft in der ersten Phase ein Bild oder ein

konkretes Modell eines geometrischen Objekts zur Verdeutlichung der Aufgabenstellung zu Hilfe nehmen. In der dritten Phase können die Schülerinnen und Schüler bei der Präsentation der Ergebnisse ihr Ergebnis aufzeichnen oder zum Beispiel aus Papier oder Knete nachbauen.

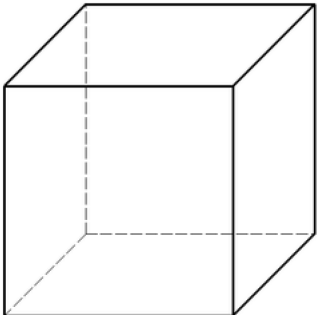
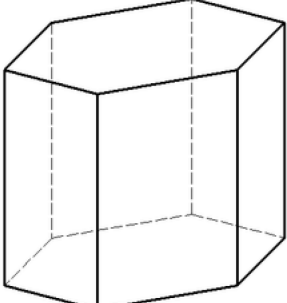
3.2 Räumliche Geometrie in VERA-8

Im folgenden Abschnitt werden drei Beispielaufgaben zur räumlichen Geometrie dargestellt. Zudem wird erläutert, auf welche *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* der Bildungsstandards diese jeweils abzielen und wie diese Aufgaben vertiefend im Unterricht genutzt werden können. Die erste Aufgabe „Ecken und Kanten“ fokussiert das Analysieren von geometrischen Objekten des Raumes. In der zweiten Aufgabe „Würfelnetz“ steht das Erkennen von Körpern aus entsprechenden Darstellungen (hier aus dem Netz eines Körpers) im Vordergrund. Die dritte Aufgabe „Lage der Würfel“ thematisiert das gedankliche Operieren mit Körpern.

Im Folgenden ist die Aufgabe „Ecken und Kanten“ dargestellt.

Beispielaufgabe 1: „Ecken und Kanten“

Ergänze die Tabelle.

	Gesamtzahl der Ecken	Gesamtzahl der Kanten
Würfel 	8	
Prisma mit sechseckiger Grundfläche 		18

Die Aufgabe „Ecken und Kanten“ spricht die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) an: Die Schülerinnen und Schüler bestimmen mithilfe von perspektivischen Zeichnungen der Körper Würfel und Prisma die Anzahl der Ecken bzw. Kanten dieser Körper. Fehler bei der Bearbeitung der Aufgabe können sich dadurch ergeben, wenn Schülerinnen

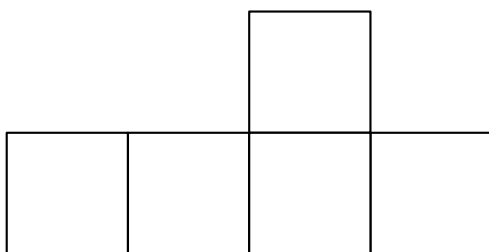
und Schüler Schwierigkeiten mit den Begriffen *Ecken* und *Kanten* haben. Um die Begriffe einführend zu thematisieren, können diese anhand von haptischem Material veranschaulicht werden.

Die Aufgabe kann im Unterricht dazu genutzt werden, um mit Schülerinnen und Schülern perspektivische Darstellungen und verschiedene Arten von Projektionen zu thematisieren. Lernende können an perspektivische Darstellungen herangeführt werden, indem sie zunächst vorgefertigte Zeichnungen vervollständigen. Zum tieferen Verständnis kann es hilfreich sein, wenn die eigentlich nicht sichtbaren Kanten, welche in der Aufgabe „Ecken und Kanten“ gestrichelt dargestellt sind, zunächst gar nicht vorzugeben, sondern diese von den Schülerinnen und Schülern selbst einzeichnen zu lassen. Zudem kann die Aufgabe im Unterricht dahingehend erweitert werden, dass die Tabelle für weitere Körper fortgeführt wird. Auch das Zeichnen eines bestimmten Körpers anhand einer vorgegebenen Anzahl von Ecken und/ oder Kanten ist denkbar. So können Schülerinnen und Schüler beispielsweise dazu aufgefordert werden, ein Prisma mit 6 Ecken und 9 Kanten zu zeichnen, was zusätzlich Problemlösefähigkeiten erfordert. Zudem können solche perspektivischen Darstellungen im Unterricht genutzt werden, um mit den Schülerinnen und Schülern Kantenmodelle nachzubauen (siehe auch Kapitel 3.1). Dazu können beispielsweise Strohhalme, Holzstäbchen oder Ähnliches als Kanten dienen, die mit Pfeifenputzern oder Knete verbunden werden. Weiterführend können die konstruierten Modelle dann aus verschiedenen Perspektiven (zum Beispiel aus der Vorderansicht, der Draufsicht oder als Schrägbild) auf ein Zeichenblatt übertragen werden und so verschiedene perspektivische Darstellungen thematisiert werden.

Die Beispielaufgabe 2 „Würfelnetz“ thematisiert Körpernetze, indem die Schülerinnen und Schüler zum Vervollständigen eines Würfelnetzes aufgefordert werden.

Beispielaufgabe 2: „Würfelnetz“

Paul hat begonnen, ein Würfelnetz zu zeichnen. Er muss noch ein einzelnes Quadrat an das Netz zeichnen, um ein intaktes Würfelnetz zu erhalten.



Kreuze alle Kanten an, an denen Paul das Quadrat zeichnen könnte, um ein Würfelnetz zu erhalten.

Zur Lösung der Aufgabe „Würfelnetz“ ist die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) erforderlich, da Schülerinnen und Schüler beurteilen, wie das Netz zu einem Würfelnetz vervollständigt werden kann. Zudem wird die Kompetenz *Probleme mathematisch*

lösen (K2) benötigt, da es sich um ein Problem handelt, welches es strategisch zu lösen gilt, beispielsweise mithilfe eines zeichnerischen Ansatzes oder einer gedanklichen Operation. Die Schülerinnen und Schüler können zum Finden der verschiedenen Lösungsmöglichkeiten Heuristiken (z.B. systematisches Probieren, Skizzen erstellen) verwenden.

Eine Herausforderung bei dieser Aufgabe ist der erforderliche gedankliche Wechsel zwischen einer Darstellung der Oberfläche eines Körpers und seiner räumlichen Gestalt. Es ist anzunehmen, dass den Lernenden dieser Wechsel leichter zugänglich gemacht werden kann, indem sie ihn auch handelnd erfahren. Dazu kann beispielsweise mithilfe dynamischer Geometriesoftware der Übergang vom Netz eines Körpers zu seiner räumlichen Gestalt visualisiert werden. Mithilfe von folgendem GeoGebra-Applet können verschiedene Netze eines Würfels betrachtet und zu einem Würfel zusammengeklappt werden. Zudem können der Würfel und das Würfelnetz gedreht und rotiert und so von verschiedenen Seiten betrachtet werden:

<https://www.geogebra.org/m/teCkgD2S>

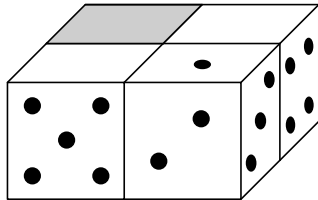
Solche Körpernetze können im 3D Grafikrechner von GeoGebra (mit der Funktion „Netz“) auch zu anderen Körpern selbst erstellt werden. Durch die Möglichkeit, in GeoGebra verschiedene geometrische Körper zu erstellen und diese zu drehen und rotieren, kann das räumliche Vorstellungsvermögen unterstützt werden.

Ebenso können Schülerinnen und Schüler auch eigenständig entsprechende Aufgaben formulieren, indem sie verschiedene Körpernetze zeichnen und sich diese gegenseitig vorlegen. Die Lernenden erhalten durch dieses Vorgehen nicht nur eine Lösungsstrategie für dieses Problem, sondern können das Verfahren des Bastelns eines Modells, entsprechend angeleitet und unterrichtlich gesichert, zur Überprüfung von Annahmen oder zur Lösung von Problemen auch anderweitig anwenden.

Die nächste Aufgabe fokussiert das Analysieren geometrischer Objekte des Raumes sowie das gedankliche Operieren mit Würfeln. Im Folgenden ist die Beispielaufgabe 3 „Lage der Würfel“ dargestellt.

Beispielaufgabe 3: „Lage der Würfel“

Die Abbildung zeigt vier Spielwürfel, die alle in der gleichen Weise beschriftet sind. Die Augenzahlen gegenüberliegender Seiten ergänzen sich immer zu 7. Daher liegen jeweils die Augenzahlen 1 und 6 einander räumlich gegenüber, die Augenzahlen 2 und 5 sowie 3 und 4 ebenfalls.

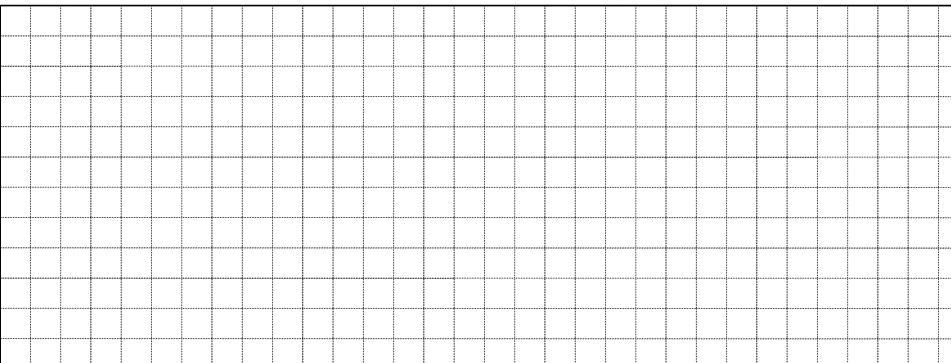


Diejenigen Seitenflächen dieser Spielwürfel, die sich vollständig berühren, haben immer die gleiche Augenzahl. Einige Augenzahlen fehlen in der Abbildung.

Gib an, welche Augenzahl auf der grauen Seitenfläche fehlt.

Auf der grauen Seitenfläche fehlt die Augenzahl

Schreibe die einzelnen Schritte auf, wie du zu deiner Lösung gekommen bist.

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 15 rows of squares, intended for drawing a picture.

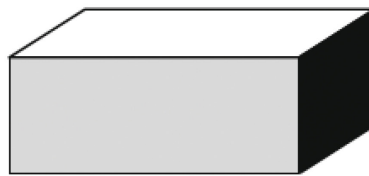
Für die Aufgabe „Lage der Würfel“ ist die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2) erforderlich, da das dargestellte Problem ein strategiegestütztes Vorgehen erfordert. Die zu berücksichtigenden Zusammenhänge zwischen der dargestellten räumlichen Anordnung der vier Würfel und den gegebenen Bedingungen für die Augenzahlen sind dabei die entscheidende Hürde. Zudem erfordert die Aufgabe die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4), da mit der Darstellung mehrerer Würfel gearbeitet wird. Zur Lösung der Aufgabe können Heuristiken verwendet werden. So kann die für die graue Seite passende Augenzahl beispielsweise durch Vorwärtsarbeiten gefunden werden, indem sich die Schülerinnen und Schüler Schritt für Schritt die fehlenden Augenzahlen auf den Würfelseiten überlegen und sich so dem Ziel, der Augenzahl auf der grauen Würfelseite, nähern. Dabei können sich die Schülerinnen und Schüler folgende Fragen stellen (Kuzle & Bruder, 2016): „Was ist gegeben? Was kann ich aus dem folgern, was ich schon weiß?“ Auch durch systematisches Probieren kann die gesuchte Augenzahl gefunden werden, indem die sichtbaren weißen Würfelseiten vervollständigt, mögliche Augenzahlen der grauen Seitenfläche ausprobiert und die in der Aufgabenstellung geforderten Bedingungen geprüft werden. Als weitere Unterstützung können Lernenden

Spielwürfel zur Verfügung gestellt werden, sodass diese wie in der Aufgabe dargestellt angeordnet werden können und die fehlenden Augenzahlen erkundet werden können. So können die Schülerinnen und Schüler beispielsweise auch entdecken, dass die gesuchte Augenzahl sowohl eine eins als auch eine sechs sein kann.

Wird die Aufgabe ohne haptisches Material bearbeitet, so erfordert die Aufgabe räumliches Vorstellungsvermögen, da es notwendig ist, sich die Rückseiten der Würfel beziehungsweise die Augenzahlen auf den sich berührenden Seiten vorzustellen. Wie bereits in Kapitel 3.1 beschrieben, kann das räumliche Vorstellungsvermögen mithilfe der Kopfgeometrie unterstützt werden. Eine weitere Beispielaufgabe zur Kopfgeometrie, welche ebenfalls die Seitenflächen eines Quaders thematisiert, zeigt Abbildung 4.

Beispiel 6.28: Kopfgeometrie: Quader kippen

Der abgebildete Quader soll gekippt werden, erst nach rechts, dann nach hinten und schließlich noch zweimal nach rechts:



Der Quader ist in der Anfangslage vorn grau, rechts schwarz, hinten grün, links rot, oben weiß und unten gelb. Kippt nun *in Gedanken* den Quader wie oben beschrieben.

Ihr dürft den Quader ansehen, aber nicht in die Hand nehmen. Notiert für jede Zwischenlage und die Endlage die Farben der Flächen vorne, rechts hinten, links, oben und unten.

Abbildung 4: Beispielaufgabe zur Kopfgeometrie (Roth & Wittmann, 2018, S. 145)

Zusammenfassend gibt es beim Arbeiten mit der räumlichen Geometrie also eine Vielzahl an Möglichkeiten, wie mit dreidimensionalen Objekten gearbeitet werden kann. Um das räumliche Vorstellungsvermögen zu schulen und das gedankliche Operieren mit Körpern zu ermöglichen, ist es hilfreich, mit Modellen, Netzen, Schrägbildern oder Ähnlichem und haptischem Material zu arbeiten. In diesem Rahmen können auch Zusammenhänge zwischen der ebenen und räumlichen Geometrie thematisiert und der Wechsel zwischen diesen erleichtert werden.

4 Abschließende Anmerkungen

Die diesjährigen didaktischen Handreichungen beinhalten erneut zwei Themenschwerpunkte aus zwei Leitideen, die als Ergänzungsmodule für die VERA-8 Testung zur Auswahl stehen. Im Bereich der Leitidee *Raum und Form* ist dies der Schwerpunkt *Räumliche Geometrie*, im Bereich der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* der Schwerpunkt *Proportionale und anti-proportionale Zuordnungen*. Aus beiden Themen wurden zentrale Inhalte betrachtet, welche durch die Bildungsstandards vorgegeben werden. Für weitere Anregungen für die Unterrichtspraxis sei auf die Kommentare zu den einzelnen Aufgaben in Teil III der didaktischen Handreichungen verwiesen. Zudem wurde aufgezeigt, welche Aufgabenmerkmale mit welchen allgemeinen mathematischen Kompetenzen einhergehen. Für weitere Beispiele und Anregungen stellt die in den vorangegangenen Kapiteln genannte Literatur eine gute Ausgangslage dar.

5 Literaturverzeichnis

- Blum, W. (2010). Einführung. In W. Blum, C. Drücke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: Konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*. Cornelsen Scriptor.
- Greefrath, G. (2018). *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht: Didaktische Perspektiven zum Sachrechnen in der Sekundarstufe*. Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-57680-9>
- Klieme, Eckhard; Avenarius, Hermann; Blum, Werner; Döbrich, Peter; Gruber, Hans; Prenzel, Manfred; Reiss, Kristina; Riquarts, Kurt; Rost, Jürgen; Tenorth, Heinz-Elmar; Vollmer, Helmut J.; Bundesministerium für Bildung und Forschung. (2003). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise*. Bonn, Berlin.
- KMK. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003*. Wolters Kluwer.
- KMK. (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss. Beschluss vom 15.10.2004*. Wolters Kluwer.
- KMK. (2015). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012*. Wolters Kluwer.
- Kuzle, A., & Bruder, R. (2016). Probleme lösen lernen im Themenfeld Geometrie. *mathematik lehren*, 196, 2–9.
- Leiss, D., & Blum, W. (2010). Beschreibung zentraler Kompetenzen. In W. Blum, C. Drücke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: Konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*. Cornelsen Scriptor.
- Maier, P. H. (1999): Raumgeometrie mit Raumvorstellung – Thesen zur Neustrukturierung des Geometrieunterrichts. *Mathematikunterricht*, 45(3), 3-18.
- OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing.

- Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F., & Renkl, A. (2006). Mathematiklernen mit heuristischen Lösungsbeispielen. In M. Prenzel, L. Allolio-Näcke, & Deutsche Forschungsgemeinschaft (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule: Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S. 194–208). Waxmann.
- Roth, J., & Wittmann, G. (2018). Ebene Figuren und Körper. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme, & G. Wittmann, *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 107–148). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8>
- Senftleben, H.-G. (1996). Erkundungen zur Kopfgeometrie (unter besonderer Beachtung der Einbeziehung kopfgeometrischer Aufgaben in den Mathematikunterricht der Grundschule). *Journal für Mathematik-Didaktik*, 17(1), 49–72. <https://doi.org/10.1007/BF03339309>
- Weigand, H.-G. (2018). Ziele des Geometrieunterrichts. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme, & G. Wittmann, *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 1–20). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8>
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 21(61), 37–46. <https://doi.org/10.1515/dmvm-1996-0214>
- Witzke, I., & Hoffart, E. (2018). 3D-Drucker: Eine Idee für den Mathematikunterricht? Mathematikdidaktische Perspektiven auf ein neues Medium für den Unterricht. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018*, 2015–2018.

6 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards	5
Abbildung 2: Diagnoseaufgabe zur Komponente Mentale Rotation (Roth & Wittmann, 2018)	11
Abbildung 3: Beispielaufgabe zur Kopfgeometrie (Roth & Wittmann, 2018, S. 144)	11
Abbildung 4: Beispielaufgabe zur Kopfgeometrie (Roth & Wittmann, 2018, S. 145)	16

7 Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Verschiedene Modelle eines Würfels	10
---	----

8 Verzeichnis der Beispielaufgaben

Beispielaufgabe 1: „Ecken und Kanten“ (IQB)	12
Beispielaufgabe 2: „Würfelnetz“ (IQB)	13
Beispielaufgabe 3: „Lage der Würfel“ (IQB)	15



Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten 2025
8. Jahrgangsstufe (VERA-8)
Mathematik
DIDAKTISCHE HANDREICHUNG
TEIL II

Fachdidaktische Orientierung
Leitidee *Funktionaler*
Zusammenhang



Inhaltsverzeichnis

1	EINLEITUNG	3
2	BILDUNGSSTANDARDS UND KOMPETENZMODELL IM FACH MATHEMATIK.....	4
3	DIE LEITIDEE FUNKTIONALER ZUSAMMENHANG	7
3.1	SCHWERPUNKTTHEMA: PROPORTIONALE UND ANTIPROPORTIONALE ZUORDNUNGEN	9
3.2	PROPORTIONALE UND ANTIPROPORTIONALE ZUORDNUNGEN IN VERA-8	12
4	ABSCHLIEßENDE ANMERKUNGEN	16
5	LITERATURVERZEICHNIS.....	17
6	ABBILDUNGSVERZEICHNIS.....	18
7	TABELLENVERZEICHNIS	19
8	VERZEICHNIS DER BEISPIELAUFGABEN	19

Autorinnen und Autoren⁴ der fachdidaktischen Erläuterungen in Teil II sind Marlena Meyer, Antonia Rewer und Laura Wirth. Die gezeigten Testaufgaben entstanden in Kooperation von Lehrkräften aus zehn Bundesländern und Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktikern unter Federführung der Arbeitsgruppe Prof. Greefrath, Universität Münster (fachdidaktische Leitung) und des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) e. V.

Haftungsausschluss:

Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle übernehmen wir keine Haftung für Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der eigenen Inhalte und der Inhalte externer Links. Für den Inhalt der verlinkten Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien
auch online finden können?

www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

⁴ Aufgrund der dynamischen Diskussion zum sprachlichen Umgang mit geschlechtlicher Vielfalt sowie der Positionierung des Rats für deutsche Rechtschreibung und der Schulbehörden einiger Länder gegen Schreibweisen mit Wortbinnenzeichen (z. B. Genderstern) verwenden wir Doppelnennungen (z. B. Schülerinnen und Schüler) oder geschlechtsneutrale Formulierungen (z. B. Lehrkräfte). Hiermit sind ausdrücklich Personen aller Geschlechter gemeint.

1 Einleitung

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK, 2004, 2005, 2015) mit ihren Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen bilden die Grundlage für die VERgleichsArbeiten in der 8. Jahrgangsstufe (VERA-8) im Fach Mathematik. Diese didaktische Handreichung zu VERA-8 verfolgt das Ziel, Sie als Lehrkräfte im Bemühen um einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht zu unterstützen, indem einzelne Testaufgaben erläutert werden, Informationen zu Nutzungsmöglichkeiten der Vergleichsarbeiten im Unterricht gegeben werden sowie auf förderdiagnostische Materialien und auf entsprechende Literatur hingewiesen wird. Sie können daher besonders von Ihnen im Anschluss an die Vergleichsarbeiten genutzt werden, um Schülerinnen und Schülern spezifische Lernangebote zu machen. Es wird zunächst der Aufbau der Bildungsstandards vorgestellt. Da sich die Entwicklung der VERA-8 Aufgaben für das Jahr 2025 an den Bildungsstandards aus dem Jahr 2004 orientiert und eine Umstellung in VERA-8 auf die überarbeiteten Bildungsstandards aus dem Jahr 2022 erst zu einem späteren Zeitpunkt erfolgt, bezieht sich auch diese Handreichung auf die Bildungsstandards aus dem Jahr 2004. Anschließend wird einer der Schwerpunkte, die in den diesjährigen Ergänzungsmodulen zur Wahl stehen, näher erläutert: die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* mit einem Fokus auf das Thema *Proportionale und antiproportionale Zuordnungen*. Es werden insbesondere zu Aspekten des Schwerpunktes fachdidaktische Herausforderungen geschildert und Anregungen vorgestellt, wie mit diesen in der unterrichtlichen Praxis im Fach Mathematik umgegangen werden kann. In dem dazugehörigen Kapitel werden außerdem Aufgaben aus VERA-8 präsentiert, die sich der diesjährigen Schwerpunktsetzung zuordnen lassen. Diese ausgewählten Beispiele zeigen exemplarisch, wie bestimmte allgemeine Kompetenzen gezielt durch eine Testaufgabe geprüft werden können. Darüber hinaus werden Hinweise gegeben, inwiefern diese Aufgaben auch im Unterricht als Lerngelegenheit zur Förderung der Kompetenzen eingesetzt werden kann.

2 Bildungsstandards⁵ und Kompetenzmodell im Fach Mathematik

Im Anschluss an die Ergebnisse großer internationaler Vergleichsstudien – wie etwa der PISA-Studie oder TIMSS – führte die Kultusministerkonferenz (KMK) ab dem Jahr 2003 Bildungsstandards für die Fächer Deutsch, Mathematik und die erste Fremdsprache (Englisch/Französisch) ein⁶. Eine grundlegende Wende stand bevor, da die Qualität von schulischer Arbeit durch nationale Bildungsstandards, welche verbindliche Anforderungen an das Lehren und Lernen in der Schule formulieren, gesichert und gesteigert werden soll (Klieme et al., 2003): Während zuvor der *Input* im Vordergrund stand, also Inhalte und Themen, sollte nun auch der *Output* stärkere Beachtung finden, also die konkreten Kompetenzen, Wissensstrukturen, Werte, über die Schülerinnen und Schüler nach dem Unterricht verfügen sollen. Inhalte sollten mit der Entwicklung von Persönlichkeitsmerkmalen verknüpft werden, die die Basis für ein lebenslanges Lernen legen und so persönliche Weiterentwicklung und gesellschaftliche Teilhabe ermöglichen (Klieme et al., 2003). Die OECD betont dabei den Anwendungscharakter von Mathematik:

„Mathematische Grundbildung umfasst die Fähigkeit einer Person zum mathematischen Argumentieren sowie Mathematik in einer Vielzahl von Alltagskontexten einzusetzen, in denen Problemstellungen mathematisch formuliert, bearbeitet und interpretiert werden. Dies beinhaltet mathematische Konzepte, Fakten und Methoden, um Phänomene zu beschreiben, zu erklären und vorauszusagen. Mathematikkompetenz hilft Personen zu erkennen, welche Rolle Mathematik in der Welt spielt, um fundierte Urteile abzugeben sowie gut begründete Entscheidungen zu treffen, so wie sie von konstruktiven, engagierten und reflektierten Bürgerinnen und Bürgern des 21. Jahrhunderts benötigt werden“ (OECD, 2023, Abschnitt Übersicht, Absatz 3, eigene Übersetzung).

Zu diesem Zweck benennen die Bildungsstandards Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe anhand zentraler Fachinhalte erworben haben sollen (KMK, 2004, 2005). Dabei sollte ein allgemeinbildender Mathematikunterricht Schülerinnen und Schülern die folgenden drei *Grunderfahrungen* ermöglichen (Winter, 1995, S. 37):

⁵ Die Bildungsstandards für Mathematik wurden für den Ersten und Mittleren Schulabschluss weiterentwickelt und 2022 von der KMK verabschiedet (KMK, 2022). Die Didaktische Handreichung Teil II bezieht sich auf die Bildungsstandards, die 2004 und 2003 von der KMK beschlossen worden sind, da sich die Normierungsaufgaben für die neuen Bildungsstandards noch in der Entwicklung befinden.

⁶ <https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>

4. Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
5. mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
6. in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Die Bildungsstandards umfassen in ihrem Wesen die benannten Grunderfahrungen sowie Inhalte, Kompetenzen und Niveaustufen, wie das folgende Kompetenzmodell für das Fach Mathematik darlegt. Das Kompetenzmodell liefert einen *Handlungsrahmen* für Lehrpersonen und Schulen, zur Einhaltung verbindlicher Ziele sowie zur Weiterentwicklung von Schule und Unterricht (Klieme et al., 2003). Handlungsrahmen bedeutet insbesondere, dass im Vordergrund die verbindliche Einhaltung von konsensuell ausgehandelten Zielvorgaben steht, wobei den Schulen dabei Freiraum für die innerschulische Lernplanung gelassen wird, um diese Ziele zu erreichen. Es werden in diesem Modell zunächst die folgenden drei Dimensionen unterschieden (siehe Abbildung 1):

4. *Allgemeine mathematische Kompetenzen*
5. *Leitideen*
6. *Anforderungsbereiche*

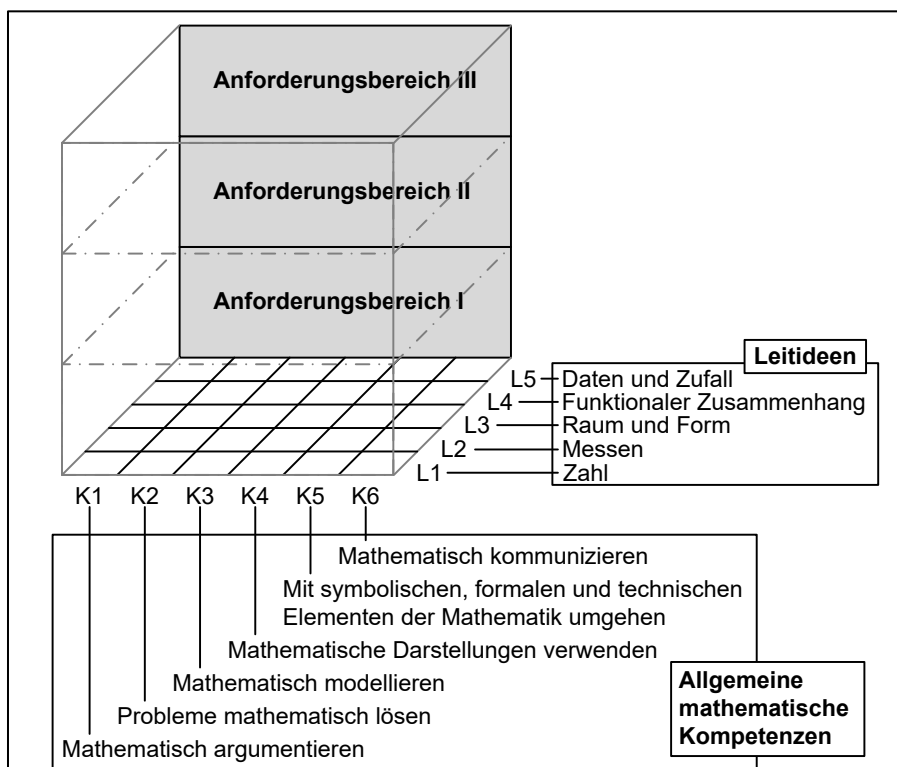


Abbildung 5: Kompetenzmodell der Bildungsstandards

Die *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* bilden die Prozessdimension des Modells. Dabei wird vom Grundgedanken ausgegangen, „das Können der Schüler an den *Kompetenzen* festzumachen, die sie beim Bearbeiten von Aufgaben zu aktivieren haben“ (Leiss & Blum, 2010, S. 33). Im Einzelnen sind dies die Kompetenzen *Mathematisch argumentieren* (K1), *Probleme mathematisch lösen* (K2), *Mathematisch modellieren* (K3), *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4), *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) und *Mathematisch kommunizieren* (K6). Diese *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* sollen differenziert betrachtet werden, auch wenn sie üblicherweise im Verbund erworben werden und häufig auch gemeinsam angewendet werden müssen. Insbesondere werden bei der Bearbeitung von komplexeren mathematischen Aufgaben oft mehrere dieser Kompetenzen benötigt. Mit der getrennten Betrachtung ist die Absicht verbunden, spezifische Eigenschaften und Anforderungen von Aufgaben im Mathematikunterricht transparent zu machen, was eine differenziertere Planung des Mathematikunterrichts ermöglicht. So kann ein mathematischer Inhalt den Schülerinnen und Schülern entlang verschiedener durchzuführender mathematischer Tätigkeiten zugänglich gemacht werden. Inhalte können durch die multiperspektivische und wiederholte Betrachtung eher in ihrer Gänze verstanden werden und mathematische Kompetenzen anhand unterschiedlichster Erscheinungen über den Inhalt hinaus erworben werden.

Jedoch reicht der Blick auf die *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* für eine produktive Gestaltung des Mathematikunterrichts nicht aus (Leiss & Blum, 2010). Daher bilden die *Leitideen* eine zweite Dimension des Modells. Die fünf Leitideen sind *Zahl* (L1), *Messen* (L2), *Raum und Form* (L3), *Funktionaler Zusammenhang* (L4) und *Daten und Zufall* (L5). In den Bildungsstandards wird zu den Leitideen erläutert:

„Eine Leitidee vereinigt Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete und durchzieht ein mathematisches Curriculum spiralförmig. Die Zuordnung einer inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz zu einer mathematischen Leitidee ist nicht in jedem Fall eindeutig, sondern davon abhängig, welcher Aspekt mathematischen Arbeitens im inhaltlichen Zusammenhang betont werden soll.“ (KMK, 2004, S. 9).

Leitideen folgen keinem fachdidaktischen Aufbau im Sinne einer zeitlichen Abfolge im Lernprozess („erst kommt das Zählen, dann kommt das Messen, usw.“), sondern sie erlauben es, bestimmte mathematische Inhalte unter einer Kategorie zusammenzufassen. Auch soll durch die Betonung von Leitideen deutlich werden, dass sich aus mathematischen Phänomenen wie dem Zählen, dem Messen oder dem Umgang mit Zufällen mathematische Sachgebiete herausgebildet haben (Greefrath 2018, Blum 2010).

Die dritte Dimension enthält die drei *Anforderungsbereiche*. Sie beschreiben die Komplexität von Aufgaben, denn das Bearbeiten und Lösen von Aufgaben fordert mathematische Kompetenzen in unterschiedlichen Ausmaßen (KMK, 2004). Es werden dabei in der Regel drei Anforderungsbereiche unterschieden. Mit dem *Anforderungsbereich I* werden Anforderungen

an allgemeine Kompetenzen beschrieben, die zum *Reproduzieren* unterrichtlicher Inhalte befähigen. Zum *Anforderungsbereich II* zählen solche Anforderungen an allgemeine Kompetenzen, die es Schülerinnen und Schülern ermöglichen, *Zusammenhänge herzustellen* und Gelerntes

anzuwenden. In den *Anforderungsbereich III* gehören diejenigen Anforderungen, die es Schülerinnen und Schülern abverlangen, zu *verallgemeinern* und zu *reflektieren*.

Im Folgenden wird exemplarisch ein Aspekt der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* herausgegriffen und erläutert. Eine Orientierung des Mathematikunterrichts an den *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* – also der Prozessdimension des Kompetenzmodells – ist eine maßgebliche Errungenschaft der Bildungsstandards, die jedoch auch bei exemplarischer Betrachtung einzelner Leitideen nicht in den Hintergrund geraten sollte.

3 Die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang*

In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss werden unter der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* die folgenden, inhaltsbezogenen Kompetenzen zusammengefasst (KMK, 2004):

Die Schülerinnen und Schüler

- *nutzen Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge,*
- *erkennen und beschreiben funktionale Zusammenhänge und stellen diese in sprachlicher, tabellarischer oder graphischer Form sowie gegebenenfalls als Term dar,*
- *analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche Darstellungen funktionaler Zusammenhänge (wie lineare, proportionale und antiproportionale),*
- *lösen realitätsnahe Probleme im Zusammenhang mit linearen, proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen,*
- *interpretieren lineare Gleichungssysteme graphisch,*
- *lösen Gleichungen, und lineare Gleichungssysteme kalkülmäßig bzw. algorithmisch, auch unter Einsatz geeigneter Software, und vergleichen ggf. die Effektivität ihres Vorgehens mit anderen Lösungsverfahren (wie mit inhaltlichem Lösen oder Lösen durch systematisches Probieren),*
- *untersuchen Fragen der Lösbarkeit und Lösungsvielfalt von linearen und quadratischen Gleichungen sowie linearen Gleichungssystemen und formulieren diesbezüglich Aussagen,*
- *bestimmen kennzeichnende Merkmale von Funktionen und stellen Beziehungen zwischen Funktionsterm und Graph her,*

- *wenden insbesondere lineare und quadratische Funktionen sowie Exponentialfunktionen bei der Beschreibung und Bearbeitung von Problemen an,*
- *verwenden die Sinusfunktion zur Beschreibung von periodischen Vorgängen,*
- *beschreiben Veränderungen von Größen mittels Funktionen, auch unter Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms,*
- *geben zu vorgegebenen Funktionen Sachsituationen an, die mit Hilfe dieser Funktion beschrieben werden können.*

Auch in den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss (KMK, 2005) finden sich die aufgeführten inhaltsbezogenen Kompetenzen wieder, wobei prozentuaalem Wachstum und Maßstäben in den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss eine größere Bedeutung zugeschrieben wird. Lineare Gleichungssysteme, quadratische Funktionen, Exponentialfunktionen sowie periodische Vorgänge sind in den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss nicht aufgeführt. Da ebendiese inhaltsbezogenen Kompetenzen keinen Bestandteil der VERA-8 Erhebung darstellen, beinhalten die Bildungsstandards beider Abschlüsse für den Lernstand der Jahrgangsstufe 8 im Wesentlichen die gleichen inhaltsbezogenen Kompetenzen.

Funktionale Zusammenhänge sind allgegenwärtig, zum Beispiel die Strecke beim Busfahren, die in einer bestimmten Zeit zurückgelegt wird, oder der Einkaufspreis beim Bäcker in Abhängigkeit von der Anzahl der Brötchen. Immer dann, wenn „eine Größe von einer anderen Größe abhängt“ (Greefrath et al., 2016, S. 36), kommen wir auf natürliche Weise in Kontakt damit. Bereits in der Grundschule werden erste funktionale Denkweisen vermittelt (Vollrath, 1989). Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (KMK, 2005b) beschreiben in dieser Hinsicht die Leitidee *Muster und Strukturen*, an die in der Sekundarstufe I unter anderem die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* anschließt. In der Primarstufe stehen dabei unter anderem die Fähigkeiten im Fokus, funktionale Beziehungen in Sachsituationen zu erkennen, sprachlich zu beschreiben und in Tabellen darzustellen. In der Sekundarstufe I werden daran anknüpfend das kartesische Koordinatensystem und Variablen eingeführt und funktionale Zusammenhänge auch mithilfe von Termen sowie Funktionsgraphen dargestellt. Der Umgang mit proportionalen und antiproportionalen funktionalen Zusammenhängen wird explizit als inhaltsbezogene Kompetenz genannt. Die Schülerinnen und Schüler sollen diese speziellen Arten von funktionalen Zusammenhängen analysieren, interpretieren und vergleichen können. Darüber hinaus sollen sie lernen, realitätsnahe Probleme, denen ein proportionaler oder antiproportionaler Zusammenhang zugrunde liegt, zu lösen. Proportionale sowie anti-proportionale Zuordnungen gehören zu den ersten funktionalen Zusammenhängen, auf die Schülerinnen und Schüler im Unterricht stoßen (Heiderich & Hussmann, 2013) und stellen in den diesjährigen VERA-8 Erhebungen ein Schwerpunktthema dar.

3.1 Schwerpunktthema: *Proportionale und antiproportionale Zuordnungen*

Proportionale und antiproportionale Zuordnungen stellen einen wichtigen alltagsrelevanten Inhalt des Mathematikunterrichts dar (Hafner, 2012). Oftmals werden proportionale Zuordnungen mit Modellierungen im Kontext *Einkaufen* eingeführt. Der Anzahl oder der Menge eines Artikels wird der zugehörige Preis zugeordnet. Hierbei wird üblicherweise vereinfachend angenommen, dass es keine Aktionen oder Rabatte auf diesen Artikel gibt. Aber auch eine Autofahrt mit konstanter Geschwindigkeit kann mit den Größen *zurückgelegte Strecke* und *benötigte Zeit* durch eine proportionale Zuordnung modelliert werden. Demgegenüber stehen Situationen, die mithilfe von antiproportionalen Zuordnungen beschrieben werden können, welche sich in der Realität ebenfalls finden. Konkret lässt sich das Abpumpen eines Wasserbeckens, für das je nach Anzahl identischer Pumpen unterschiedlich viel Zeit benötigt wird, mittels antiproportionaler Zuordnung modellieren. Im Unterricht sollte im Zusammenhang mit proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen immer die entsprechende Modellierung thematisiert werden und oben genannte Vereinfachungen sollten explizit diskutiert werden, um deutlich zu machen, dass die Realität oftmals nur in Grenzen durch ein Modell abgebildet werden kann (Greefrath, 2018). Proportionale und antiproportionale Zuordnungen sollten im Unterricht nicht isoliert voneinander behandelt werden, sondern gerade das Wechselspiel und der Vergleich zwischen ihnen sollten fokussiert werden. Darüber hinaus sollten ebenfalls ausreichend Beispiele herangezogen werden, die der Fehlvorstellung entgegenwirken, dass eine Zuordnung entweder proportional oder antiproportional sein muss. In diesem Zusammenhang könnte beispielsweise thematisiert werden, dass in Supermärkten oft mit verhältnismäßig niedrigeren Preisen für größere Mengen geworben wird. Durch diesen „Mengenrabatt“ wird die Proportionalität aufgehoben.

Je nach Problemsituation können verschiedene Lösungsstrategien verwendet werden, um Aufgabenstellungen, denen ein proportionaler oder antiproportionaler Zusammenhang zugrunde liegt, zu lösen (Hafner, 2012). Diese Lösungsstrategien hängen eng mit den Grundvorstellungen zu proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen zusammen, sodass der Aufbau tragfähiger und vielfältiger Grundvorstellungen dazu beiträgt, dass Problemsituationen adäquat gelöst werden können.

Sowohl für proportionale als auch für antiproportionale Zuordnungen existieren verschiedene Grundvorstellungen, durch die der jeweilige Begriff inhaltlich gedeutet werden kann. Der Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen ist notwendig, um ein tiefgründiges Verständnis mathematischer Begriffe aufzubauen (Greefrath, 2018).

Bei den Grundvorstellungen von proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen handelt es sich um abstrahierte Handlungsvorstellungen. Sie basieren auf den fachlich charakteristischen Eigenschaften.

Die Grundvorstellungen zu proportionalen Zuordnungen sind in Abbildung 2 anhand einer Tabelle veranschaulicht. Die *Vervielfachungsvorstellung* beinhaltet, dass bei einer Vervielfachung der Ausgangsgröße (z.B. Anzahl) auch die zugeordnete Größe (z.B. Preis in €) um denselben Faktor vervielfacht wird. Die *Verhältnissvorstellung* besagt, dass der Quotient zweier Ausgangsgrößen und der Quotient derer zugeordneter Größen gleich ist. Die *Quotientenvorstellung* hingegen basiert darauf, dass der Quotient von zugeordneter Größe und der jeweiligen Ausgangsgröße immer konstant ist. Der Faktor, mit dem die Ausgangsgröße multipliziert wird, um die zugeordnete Größe zu erhalten, nennt sich Proportionalitätsfaktor. Dieser ist charakterisierend für die *Proportionalitätsvorstellung*.

Bei der *Additionsvorstellung* gilt: Werden zwei Ausgangsgrößen miteinander addiert, so erhält man eine neue Ausgangsgröße. Werden die jeweilig zugeordneten Größen der zwei Ausgangsgrößen miteinander addiert, so erhält man die zugeordnete Größe der neuen Ausgangsgröße (Greefrath, 2018; Hafner 2012).

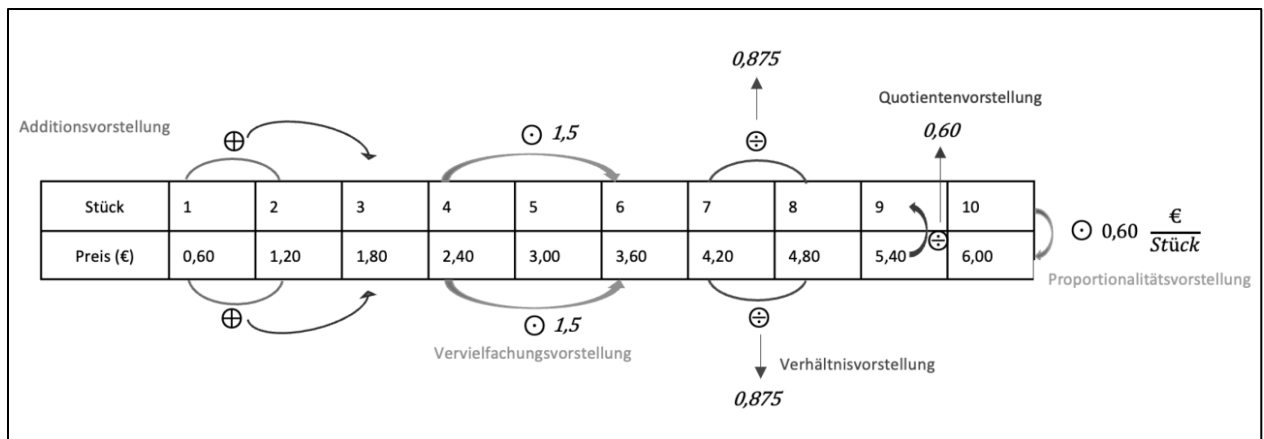


Abbildung 6: Grundvorstellungen proportionaler Zuordnungen am Beispiel „Einkaufen“

Die Grundvorstellungen zu antiproportionalen Zuordnungen lassen sich mit Ausnahme der *Additionsvorstellung* analog herleiten (Abbildung 3).

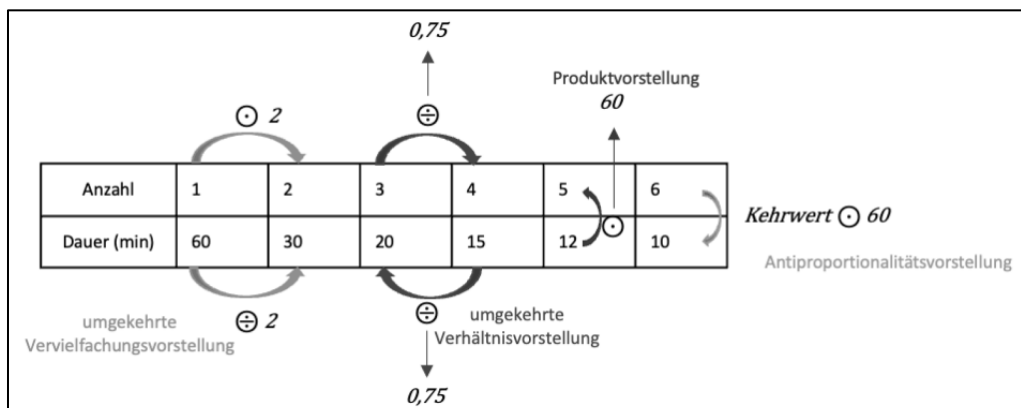


Abbildung 7: Grundvorstellungen antiproportionaler Zuordnungen am Beispiel „Abpumpen“

Alle im Folgenden angeführten Strategien zur Lösung von Aufgaben, für die Proportionalität vorausgesetzt wird (Tabelle 1), können analog auf Aufgaben mit antiproportional zugrunde liegendem Zusammenhang übertragen werden. In der Tabelle 1 wird das Standardverfahren für jede Strategie beispielhaft skizziert. Die genannten Strategien können jedoch auch nicht standardisiert, d.h. zum Beispiel ohne sie konkret in dieser Art zu notieren, durchgeführt werden. Das Aktivieren und Entwickeln solcher eher informeller Strategien fördert ein intuitives proportionales Verständnis (Prediger et al., 2017; Pöhler & Prediger, 2017).

Bei dem *individuellen Dreisatz* kommt die *Vervielfachungsvorstellung* zum Tragen. Ausgehend von dem gegebenen Wertepaar wird durch Multiplikation (Hochrechnen) mit dem passenden Faktor der gesuchte Wert zur Ausgangsgröße ermittelt. Diese Methode bietet sich vor allem dann an, wenn der passende Faktor leicht ersichtlich ist, wie zum Beispiel bei einer Verdoppelung. In anderen Beispielen kann es sich jedoch auch anbieten, ausgehend vom gegebenen Wert durch Division (Runterrechnen) den gesuchten Wert zu ermitteln. Auch eine Kombination aus Hoch- und Runterrechnen ist eine individuelle Anwendung des Dreisatzes. Bei der *Operatormethode* wird der Proportionalitätsfaktor genutzt, um den zugehörigen Wert zur Ausgangsgröße zu berechnen. Bei der *Bruch-/ Verhältnisgleichung* wird von der *Verhältnissvorstellung* oder der *Quotientenvorstellung* Gebrauch gemacht, um eine Bruchgleichung aufzustellen und so den gesuchten Wert zu bestimmen. Bei dem bekannten *klassischen Dreisatz* wird, um von einem gegebenen Wertepaar auf das gesuchte Wertepaar zu kommen, ein Zwischenschritt gemacht. In diesem Zwischenschritt wird das Wertepaar ermittelt, bei dem der erste Wert die Maßzahl 1 hat. Im nächsten Schritt wird das Wertepaar mit dem gesuchten Wert ermittelt. Insgesamt wird also zweimal hintereinander die *Vervielfachungsvorstellung* genutzt.

Individueller Dreisatz	Operatormethode	Bruch-/ Verhältnisgleichung	Klassischer Dreisatz
$\cdot 2 \left(\begin{array}{l} 3 \text{ Stück} \triangleq 1,80 \text{ €} \\ 6 \text{ Stück} \triangleq 3,60 \text{ €} \end{array} \right) \cdot 2$	$3 \text{ Stück} \xrightarrow{\cdot 0,60 \frac{\text{€}}{\text{Stück}}} x$ $x = 3 \cdot 0,60 \text{ €} = 1,80 \text{ €}$	$\frac{1,80 \text{ €}}{3 \text{ Stück}} = \frac{x}{5 \text{ Stück}}$ $x = \frac{1,80 \text{ €} \cdot 5 \text{ Stück}}{3 \text{ Stück}} = 3,00 \text{ €}$	$\begin{array}{l} :3 \left(\begin{array}{l} 3 \text{ Stück} \triangleq 1,80 \text{ €} \\ 1 \text{ Stück} \triangleq 0,60 \text{ €} \end{array} \right) :3 \\ \cdot 6 \left(\begin{array}{l} 1 \text{ Stück} \triangleq 0,60 \text{ €} \\ 6 \text{ Stück} \triangleq 3,60 \text{ €} \end{array} \right) \cdot 6 \end{array}$

Tabelle 2: Lösungsstrategien am Beispiel „Einkaufen“

Welche Strategie gewählt wird, hängt einerseits von der konkreten Aufgabe und dem darin gegebene Zahlenmaterial ab und andererseits von individuellen Präferenzen der Schülerinnen und Schüler (Hafner, 2012).

Durch die Vermittlung von tragfähigen Grundvorstellungen kann das flexible Einsetzen verschiedener Lösungsstrategien gefördert und der reinen Anwendung auswendig gelernter Schemata ohne tiefgründiges Verständnis entgegengewirkt werden.

Sowohl proportionale als auch antiproportionale Zuordnungen können in unterschiedlichen Formen dargestellt werden: algebraisch, graphisch, tabellarisch und verbal. Um mit unterschiedlichen Problemsituationen umgehen zu können, ist die Fähigkeit erforderlich, flexibel zwischen Darstellungsformen wechseln zu können. Da Darstellungswechsel Schülerinnen und Schülern häufig Schwierigkeiten bereiten (Nitsch, 2015), sollten diese im Unterricht besonders intensiv betrachtet werden. Anwendungsbezogene Aufgaben im Zusammenhang mit proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen sollten zum Beispiel nicht immer nur die reine Übersetzung von Text zu Tabelle erfordern (Greefrath, 2018), sondern auch andere Darstellungswechsel in den Fokus rücken.

3.2 Proportionale und antiproportionale Zuordnungen in VERA-8

Im Folgenden werden Aufgaben aus vergangenen VERA-8 Erhebungen dargestellt, in denen Proportionalität bzw. Antiproportionalität eine Rolle spielen. Diese Aufgaben werden hinsichtlich ihrer geforderten Kompetenzen analysiert.

Bei der Aufgabe „Tropfender Wasserhahn“ geht es um den proportionalen Zusammenhang zwischen vergangener Zeit nach Beginn der Beobachtung eines tropfenden Wasserhahns und der Menge Wasser, die in dieser Zeit aus dem Hahn getropft ist. Für beide Teilaufgaben ist es notwendig, den Aufgabentext und die Tabelle in Teilaufgabe 1 und die Graphen in Teilaufgabe 2 sinnentnehmend zu erfassen (*Mathematisch kommunizieren* - K6) und zu erkennen, dass das gleichmäßige Tropfen mathematisch als ein proportionales Wachstum modelliert werden kann (*Mathematisch modellieren* - K3).

Beispielaufgabe 4: „Tropfender Wasserhahn“

Bei Familie Rector tropft seit einigen Tagen ein undichter Wasserhahn. Ben, der Sohn der Familie, will untersuchen, wie viel Wasser dabei verloren geht. Er fängt das gleichmäßig tropfende Wasser in einem Messbecher auf.

Teilaufgabe 1:

Ben sieht ab und zu nach, wie viel Wasser inzwischen im Messbecher ist. Die Tabelle zeigt Bens Messergebnisse.

Zeit in h	0,5	4
Wasser in cm ³	150	1200

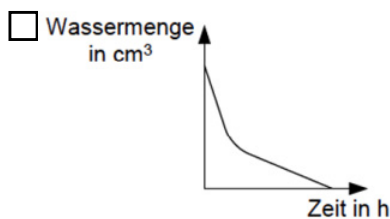
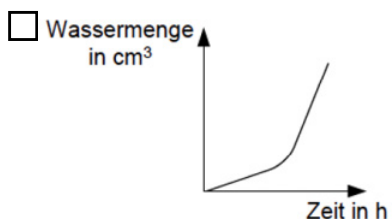
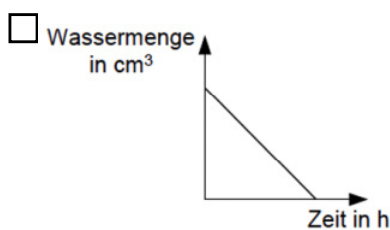
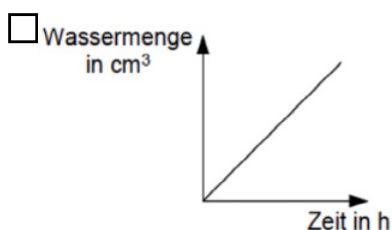
Gib an, wie viel nach zwei Stunden im Messbecher war.

..... cm³

Teilaufgabe 2:

Welches Diagramm stellt die verlorene Wassermenge in Abhängigkeit von der Zeit am besten dar?

Kreuze an.



In Teilaufgabe 1 soll dann die Wassermenge nach 2 Stunden bestimmt werden. Für die Berechnung müssen die Schülerinnen und Schüler eines der in der Tabelle angegebenen Wertepaare nutzen. Mit einer der oben genannten Strategien (*individueller Dreisatz, Operatormethode, Bruch-/ Verhältnisgleichung, klassischer Dreisatz*) oder auch nicht standardisierten Variationen können sie dann den fehlenden Wert bestimmen. Hierbei handelt es sich um die Anwendung eines Routineverfahrens, weshalb ebenfalls die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) in geringem Maß gefordert wird. Auch wenn in der Erhebung nur das Ergebnis erfasst wird, macht es bei ähnlichen Aufgaben im Unterricht Sinn, den Lösungsweg der Schülerinnen und Schüler zu betrachten

und verschiedene Lösungswege zu thematisieren. Auf diese Weise können unterschiedliche Grundvorstellungen zu proportionalen Zuordnungen in den Vordergrund rücken. So könnte bei der vorliegenden Aufgabe vor allem der individuelle Dreisatz als effiziente Lösungsstrategie thematisiert werden, da durch Vervierfachung des ersten angegebenen Wertepaares oder durch Halbierung des zweiten Wertepaares direkt der gesuchte Wert bestimmt werden kann.

Die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) steht in Teilaufgabe 2 im Vordergrund. Die Schülerinnen und Schüler müssen von einer verbal beschriebenen Situation zu einer graphischen Darstellung wechseln, um den passenden Graphen auszuwählen. Aus didaktischer Sicht sind Darstellungswechsel zwischen Text und Graph auch deshalb von Interesse, da hier – anders als bei der Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs als Funktionsgleichung – *symbolische, formale und technische Elemente der Mathematik* (K5) weitgehend ausgeklammert werden können. Hierdurch ergeben sich mindestens zwei Potenziale: Zum einen kann durch den Darstellungswechsel zwischen Text und Funktionsgraph direkt das Verständnis funktionaler Zusammenhänge von Schülerinnen und Schülern adressiert werden. Es wird keine zusätzliche Hürde dadurch errichtet, dass Schülerinnen und Schüler zum Beispiel mit Symbolen für Variablen arbeiten oder rechnerisch Lösungsverfahren durchführen. Zum anderen können auch solche funktionalen Zusammenhänge in den Blick genommen werden, die Lernenden auf algebraischer Ebene (noch) nicht bekannt sind. Damit kann zum Beispiel die Absicht verbunden werden, einer zu starken Überbetonung bestimmter funktionaler Zusammenhänge entgegenzuwirken. Nimmt man im Unterricht stets nur eine einzige Funktionsart in den Blick, besteht die Gefahr, bei Schülerinnen und Schülern den Eindruck hervorzurufen, dass im Grunde alle funktionalen Zusammenhänge proportional, antiproportional usw. sind.

Daher sollte an verschiedenen Stellen in unterschiedlichen Jahrgangsstufen das Verständnis der Lernenden von funktionalen Zusammenhängen gefordert und gefördert werden. Lernaufgaben können so aussehen, dass Schülerinnen und Schüler zu einer in einem Text geschilderten Situation einen Graphen skizzieren oder umgekehrt zu einem Graphen eine Geschichte entwickeln. Zur Überprüfung, zum Beispiel in Klassenarbeiten, können Aufgaben wie diese mit geschlossenen Antwortformaten verwendet werden. In höheren Jahrgangsstufen können dann die Aufgaben auch durch verschiedene Funktionstypen bereichert werden.

Beispielaufgabe 5: „Fliesen“

Zum Fliesen eines Küchenbodens werden 100 Platten mit einer Größe von jeweils $0,16\text{ m}^2$ benötigt. Der Besitzer entschließt sich dann aber doch, Fliesen der Größe $0,2\text{ m}^2$ verlegen zu lassen.

Gib an, wie viele Fliesen jetzt mindestens benötigt werden.

..... Fliesen

In der Aufgabe „Fliesen“ geht es um den funktionalen Zusammenhang zwischen der Größe einer Fliese und der Anzahl der für die Küche benötigten Fliesen. Die Schülerinnen und Schüler sollen annehmen, dass es sich hierbei um einen antiproportionalen Zusammenhang handelt. Zur Bearbeitung der Aufgabe sind dem Aufgabentext zunächst die relevanten Informationen (z.B. Anzahl der benötigten kleineren Fliesen) zu entnehmen (*Mathematisch kommunizieren* - K6). Zur Lösung der Aufgabe können wieder die im vorherigen Kapitel beschriebenen Strategien angewendet werden. Unter anderem bietet sich besonders die Bruch- und Verhältnisgleichung an, die im Folgenden anhand der Aufgabe „Fliesen“ dargestellt wird.

Bruch- Verhältnisgleichung: $\frac{0,16}{0,2} = \frac{x}{100}$

$$x = \frac{0,16 \cdot 100}{0,2} = 80$$

Alternativ kann so vorgegangen werden, dass zuerst die Größe der auszulegenden Fläche berechnet wird (16 m^2). Hierbei kommt die Produktvorstellung zum Tragen. Anschließend kann dann mittels der Antiproportionalitätsvorstellung die Anzahl der Fliesen bestimmt werden, die bei den neuen größeren Fliesen benötigt wird ($16\text{ m}^2 : 0,2\text{ m}^2 = 80$). Dies stellt die Operatormethode bei antiproportionalen Zusammenhängen dar. Diese Aufgabe fordert und fördert dementsprechend die Anwendung von Routineverfahren sowie den Umgang mit vertrauten Symbolen (*Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* - K5).

Bei Verwendung dieser oder ähnlicher Aufgaben im Unterricht sollten vor allem Vereinfachungen thematisiert werden, die getroffen werden, um den Kontext als antiproportionale oder proportionale Zuordnung zu modellieren. Bei der Aufgabe „Fliesen“ werden vor allem zwei Aspekte Zwecks einer Vereinfachung außer Acht gelassen. Einerseits wird die Form der Fläche des Küchenbodens und andererseits die Form der Fläche der Fliesen nicht berücksichtigt. Diese könnten jedoch entscheidend dafür sein, wie viele Fliesen letztendlich benötigt werden, wenn man den potenziellen Verschnitt miteinbezieht. Aufgrund des unterschiedlichen Verschnitts, je nachdem welche Fliesen verlegt werden, kann der Zusammenhang dann nicht mehr als antiproportional behandelt werden. Es sollte thematisiert werden, wie in der Realität

in solch einer Situation vorgegangen werden würde. Vermutlich würde eher zuerst die Länge und Breite des Raumes ausgemessen werden, um dann die Anzahl der benötigten Fliesen zu bestimmen, indem berechnet wird, wie viele Fliesen in die Länge bzw. Breite passen. Geht es darum, wie viele Fliesen letztendlich bestellt werden sollten, um den gesamten Raum zu fliesen, würde man vermutlich einige Fliesen in Reserve mitbestellen, falls bei der Arbeit welche kaputt gehen. Das Treffen und Beschreiben von Annahmen und Vereinfachungen ist vor allem hinsichtlich des *Mathematischen Modellierens* (K3) eine wichtige Kompetenz, die bei den Schülerinnen und Schülern gefördert werden sollte.

Insgesamt konnte anhand der beiden Aufgaben vergangener VERA-8 Erhebungen zu proportionalen bzw. antiproportionalen Zuordnungen gezeigt werden, inwiefern verschiedene Grundvorstellungen zum Tragen kommen, welche Lösungsstrategien je nach Aufgabe sinnvoll zu thematisieren sind und warum auch Darstellungswechsel von großer Bedeutung sind.

4 Abschließende Anmerkungen

Die diesjährigen didaktischen Handreichungen beinhalten erneut zwei Themenschwerpunkte aus zwei Leitideen, die als Ergänzungsmodule für die VERA-8 Testung zur Auswahl stehen. Im Bereich der Leitidee *Raum und Form* ist dies der Schwerpunkt *Räumliche Geometrie*, im Bereich der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* der Schwerpunkt *Proportionale und antiproportionale Zuordnungen*. Aus beiden Themen wurden zentrale Inhalte betrachtet, welche durch die Bildungsstandards vorgegeben werden. Für weitere Anregungen für die Unterrichtspraxis sei auf die Kommentare zu den einzelnen Aufgaben in Teil III der didaktischen Handreichungen verwiesen. Zudem wurde aufgezeigt, welche Aufgabenmerkmale mit welchen allgemeinen mathematischen Kompetenzen einhergehen. Für weitere Beispiele und Anregungen stellt die in den vorangegangenen Kapiteln genannte Literatur eine gute Ausgangslage dar.

5 Literaturverzeichnis

- Blum, W. (2010). Einführung. In W. Blum, C. Drücke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: Konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*. Cornelsen Scriptor.
- Greefrath, G. (2018). *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht: Didaktische Perspektiven zum Sachrechnen in der Sekundarstufe*. Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-57680-9>
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5>
- Hafner, T. (2012). Proportionalität und Prozentrechnung. In T. Hafner (Hrsg.), *Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I: Empirische Untersuchung und didaktische Analysen* (S. 33–60). Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8668-2_5
- Heiderich, S. & Hußmann, S. (2013). „Linear, proportional, antiproportional... Wie soll ich das denn alles auseinanderhalten“ – Funktionen verstehen mit Merksätzen?! In H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns, & G. Wickel (Hrsg.), *Mathematik verständlich unterrichten: Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung* (S. 27–45). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-658-00992-2_3
- Klieme, Eckhard; Avenarius, Hermann; Blum, Werner; Döbrich, Peter; Gruber, Hans; Prenzel, Manfred; Reiss, Kristina; Riquarts, Kurt; Rost, Jürgen; Tenorth, Heinz-Elmar; Vollmer, Helmut J.; Bundesministerium für Bildung und Forschung. (2003). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise*. Bonn, Berlin.
- KMK. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003*. Wolters Kluwer.
- KMK. (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss. Beschluss vom 15.10.2004*. Wolters Kluwer.
- KMK. (2005b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. München, Neuwied: Luchterhand.

- KMK. (2015). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012*. Wolters Kluwer.
- Leiss, D., & Blum, W. (2010). Beschreibung zentraler Kompetenzen. In W. Blum, C. Drück-
Noe, R. Hartung, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: Konkret. Sekun-
darstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*. Cornelsen
Scriptor.
- Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammen-
hänge: Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-10157-2>
- OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading,
Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing.
- Pöhler, B., & Prediger, S. (2017). Verstehensförderung erfordert auch Sprachförderung –
Hintergründe und Ansätze einer Unterrichtseinheit zum Prozente verstehen, erklären
und berechnen. In A. Fritz, S. Schmidt, & G. Ricken (Hrsg.), *Handbuch Rechen-
schwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 436–459). Beltz.
- Prediger, S., Selter, C., Hußmann, S., & Nührenbörger, M. (Hrsg.). (2017). *Mathe sicher kön-
nen. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathemati-
scher Basiskompetenzen*. Sachrechnen: Größen – Überschlagen – Textaufgaben –
Diagramme – Proportionen – Prozentrechnung. Cornelsen.
- Vollrath, H.-J. (1989): Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, 10, 3–37.
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft
für Didaktik der Mathematik*, 21(61), 37–46. <https://doi.org/10.1515/dmvm-1996-0214>

6 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards	5
Abbildung 2: Grundvorstellungen proportionaler Zuordnungen am Beispiel „Einkaufen“	10
Abbildung 3: Grundvorstellungen antiproportionaler Zuordnungen am Beispiel „Abpumpen“	10

7 Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Lösungsstrategien am Beispiel „Einkaufen“	11
--	----

8 Verzeichnis der Beispielaufgaben

Beispielaufgabe 1: „Tropfender Wasserhahn“ (IQB)	13
Beispielaufgabe 2: „Fliesen“ (IQB).....	15