



Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten 2024

8. Jahrgangsstufe (VERA-8)

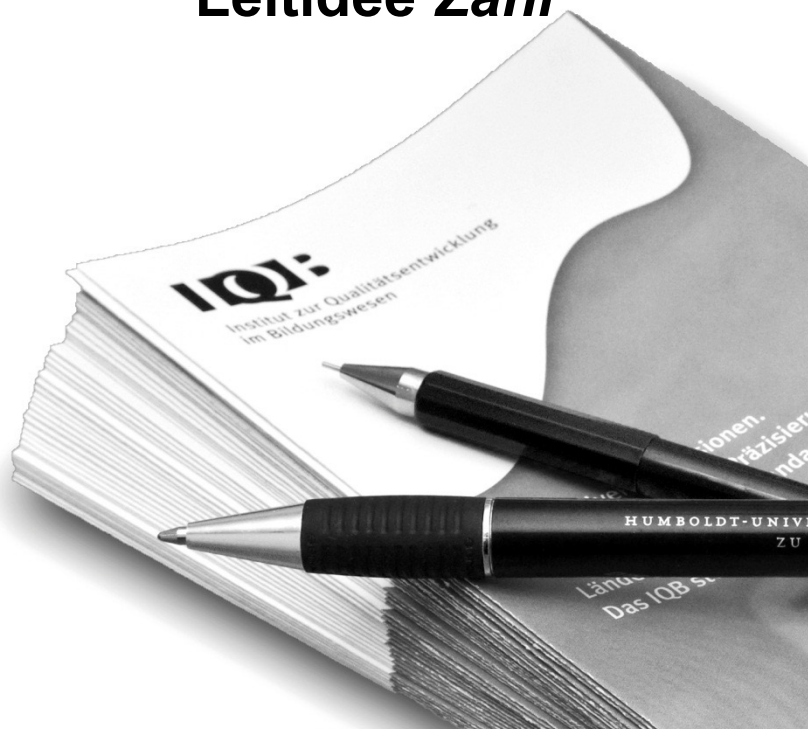
Mathematik

DIDAKTISCHE HANDREICHUNG

TEIL II

Fachdidaktische Orientierung

Leitidee *Zahl*



Inhaltsverzeichnis

1	EINLEITUNG	3
2	BILDUNGSSTANDARDS UND KOMPETENZMODELL IM FACH MATHEMATIK.....	3
3	DIE LEITIDEE ZAHL.....	7
3.1	SCHWERPUNKTTHEMA: HILFSMITTELFREIE AUFGABEN	8
3.2	BEISPIELAUFGABEN AUS DEM VERA-8 KONTEXT	9
4	ABSCHLIEßENDE ANMERKUNGEN	15
5	LITERATURVERZEICHNIS	16
6	ABBILDUNGSVERZEICHNIS.....	16
7	TABELLENVERZEICHNIS	16
8	VERZEICHNIS DER BEISPIELAUFGABEN	17

Autor:innen der fachdidaktischen Erläuterungen in Teil II sind Ilja Ay, Maxim Brnic, Corinna Hankeln, Marlena Meyer, Antonia Rewer und Laura Wirth. Die gezeigten Testaufgaben entstanden in Kooperation von Lehrkräften aus zehn Bundesländern und Fachdidaktiker:innen unter Federführung der Arbeitsgruppe Prof. Greefrath, Universität Münster (fachdidaktische Leitung) und des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen.

Haftungsausschluss:

Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle übernehmen wir keine Haftung für Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der eigenen Inhalte und der Inhalte externer Links. Für den Inhalt der verlinkten Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien
auch online finden können?

www.igb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

1 Einleitung

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK, 2004, 2005, 2005b, 2015) mit ihren Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen bilden die Grundlage für die VERgleichsArbeiten in der 8. Jahrgangsstufe (VERA-8) im Fach Mathematik. Daher wird in dieser didaktischen Handreichung zunächst der Aufbau der Bildungsstandards vorgestellt. Anschließend wird einer der Schwerpunkte, die in den diesjährigen Ergänzungsmodulen zur Wahl stehen, näher erläutert: die Leitidee *Zahl* mit einem Fokus auf *hilfsmittelfreie Aufgaben*. Es werden insbesondere zu Aspekten des Schwerpunktes fachdidaktische Herausforderungen geschildert und Anregungen vorgestellt, wie mit diesen in der Unterrichtspraxis umgegangen werden kann. In dem dazugehörigen Kapitel werden außerdem Aufgaben aus VERA-8 präsentiert, die sich der diesjährigen Schwerpunktsetzung zuordnen lassen. Dabei handelt es sich um Beispiele für Aufgabenformulierungen, welche die verschiedenen allgemeinen Kompetenzen adressieren und zudem im Unterricht zur Förderung der Kompetenzen herangezogen werden können.

2 Bildungsstandards¹ und Kompetenzmodell im Fach Mathematik

Im Anschluss an die Ergebnisse großer internationaler Vergleichsstudien – wie etwa der PISA-Studie oder TIMSS – führte die Kultusministerkonferenz (KMK) ab dem Jahr 2003 Bildungsstandards für die Fächer Deutsch, Mathematik und die erste Fremdsprache (Englisch/Französisch) ein². Eine grundlegende Wende stand bevor: Während zuvor der *Input* im Vordergrund stand, also Inhalte und Themen, sollte nun auch der *Output* stärkere Beachtung finden, also der Aufbau von Kompetenzen, Wissensstrukturen, Werten, etc.. Inhalte sollten mit der Entwicklung von Persönlichkeitsmerkmalen verknüpft werden, die die Basis für ein lebenslanges Lernen legen und so persönliche Weiterentwicklung und gesellschaftliche Teilhabe ermöglichen (Klieme et al., 2003). Die OECD betont dabei den Anwendungscharakter von Mathematik:

„Mathematische Grundbildung umfasst die Fähigkeit des Einzelnen, Mathematik in einer Vielzahl von Kontexten zu formulieren, anzuwenden und zu interpretieren. Sie umfasst mathematisches Argumentieren und die Verwendung mathematischer Konzepte, Verfahren, Fakten und Werkzeuge zur Beschreibung, Erklärung und Vorhersage von Phänomenen. Sie

¹ Die Bildungsstandards für Mathematik wurden für den Ersten und Mittleren Schulabschluss weiterentwickelt und 2022 von der KMK verabschiedet (KMK, 2022). Die Didaktische Handreichung Teil II bezieht sich auf die Bildungsstandards, die 2004 und 2003 von der KMK beschlossen worden sind, da sich die Normierungsaufgaben für die neuen Bildungsstandards noch in der Entwicklung befinden.

² <https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>

hilft dem Einzelnen, die Rolle zu erkennen, die die Mathematik in der Welt spielt, und begründete Urteile und Entscheidungen zu treffen, die von konstruktiven, engagierten und reflektierten Bürgerinnen und Bürgern benötigt werden.“ (OECD, 2013, S. 25, eigene Übersetzung)

Zu diesem Zweck benennen die Bildungsstandards Kompetenzen, die Schüler:innen bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe anhand zentraler Fachinhalte erworben haben sollen (KMK, 2004, 2005). Dabei wird davon ausgegangen, dass ein allgemeinbildender Mathematikunterricht Schüler:innen die folgenden drei *Grunderfahrungen* ermöglicht (Winter, 1995, S. 37):

1. Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
2. mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
3. in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Die Bildungsstandards umfassen in ihrem Wesen die benannten Grunderfahrungen sowie Inhalte, Kompetenzen und Niveaustufen, wie das folgende Kompetenzmodell für das Fach Mathematik darlegt. Das Kompetenzmodell liefert einen *Handlungsrahmen* für Lehrpersonen und Schulen, zur Einhaltung verbindlicher Ziele sowie zur Weiterentwicklung von Schule und Unterricht (Klieme et al., 2003). Handlungsrahmen bedeutet insbesondere, dass im Vordergrund nicht die Umsetzung eines – aus der fachlichen Systematik entstehenden – ‚starren Gerüsts‘ steht, sondern den Schulen ein großer „Freiraum für die innerschulische Lernplanung“ (ebd., S. 9) gelassen wird. Es werden in diesem Modell zunächst die folgenden drei Dimensionen unterschieden (siehe Abbildung 1):

1. *Allgemeine mathematische Kompetenzen*
2. *Leitideen*
3. *Anforderungsbereiche*

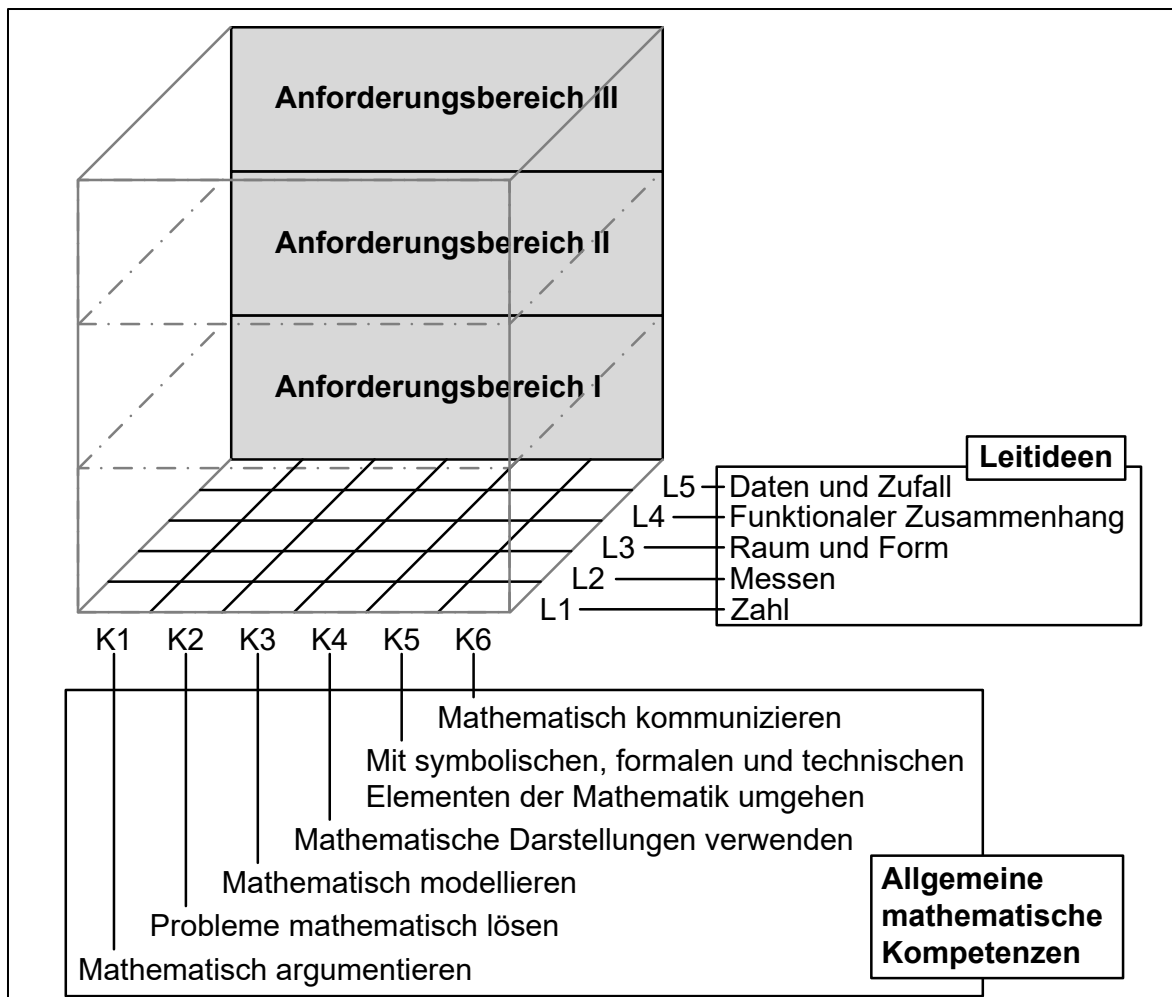


Abbildung 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards

Die *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* bilden die Prozessdimension des Modells. Dabei wird vom Grundgedanken ausgegangen, „das Können der Schüler an den *Kompetenzen* festzumachen, die sie beim Bearbeiten von Aufgaben zu aktivieren haben“ (Leiss & Blum, 2010, S. 33). Im Einzelnen sind dies die Kompetenzen *Mathematisch argumentieren* (K1), *Probleme mathematisch lösen* (K2), *Mathematisch modellieren* (K3), *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4), *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) und *Mathematisch kommunizieren* (K6). Diese *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* sollen differenziert betrachtet werden, auch wenn sie üblicherweise im Verbund erworben werden und häufig auch gemeinsam angewendet werden müssen. Insbesondere werden bei der Bearbeitung von komplexeren mathematischen Aufgaben oft mehrere dieser Kompetenzen benötigt. Mit der getrennten Betrachtung ist die Absicht verbunden, spezifische Eigenschaften und Anforderungen von Aufgaben im Mathematikunterricht transparent zu machen, was eine differenziertere Planung des Mathematikunterrichts ermöglicht. So kann ein mathematischer Inhalt den Schüler:innen entlang verschiedener durchzuführender mathematischer Tätigkeiten zugänglich gemacht werden. Inhalte können durch die multiperspektivische und wiederholte Betrachtung eher in

ihrer Gänge verstanden werden und mathematische Kompetenzen anhand unterschiedlichster Erscheinungen über den Inhalt hinaus erworben werden.

Jedoch reicht der Blick auf die *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* für eine produktive Gestaltung des Mathematikunterrichts nicht aus (Leiss & Blum, 2010). Daher bilden die *Leitideen* eine zweite Dimension des Modells. Die fünf Leitideen sind *Zahl* (L1), *Messen* (L2), *Raum und Form* (L3), *Funktionaler Zusammenhang* (L4) und *Daten und Zufall* (L5). In den Bildungsstandards wird zu den Leitideen erläutert:

„Eine Leitidee vereinigt Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete und durchzieht ein mathematisches Curriculum spiralförmig. Die Zuordnung einer inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz zu einer mathematischen Leitidee ist nicht in jedem Fall eindeutig, sondern davon abhängig, welcher Aspekt mathematischen Arbeitens im inhaltlichen Zusammenhang betont werden soll.“ (KMK, 2004, S. 9).

Leitideen folgen keinem fachdidaktischen Aufbau im Sinne einer zeitlichen Abfolge im Lernprozess („erst kommt das Zählen, dann kommt das Messen, usw.“), sondern sie erlauben es, bestimmte mathematische Inhalte unter einer Kategorie zusammenzufassen. Vielmehr soll durch die Betonung von Leitideen deutlich werden, dass sich aus mathematischen Phänomenen wie dem Zählen, dem Messen oder dem Umgang mit Zufällen mathematische Sachgebiete herausgebildet haben (Greefrath 2018, Blum 2010).

Die dritte Dimension enthält die drei *Anforderungsbereiche*. Sie beschreiben die Komplexität von Aufgaben, denn das Bearbeiten und Lösen von Aufgaben fordert mathematische Kompetenzen in unterschiedlichen Ausmaßen (KMK, 2004). Es werden dabei in der Regel drei Anforderungsbereiche unterschieden. Mit dem *Anforderungsbereich I* werden Anforderungen an allgemeine Kompetenzen beschrieben, die zum *Reproduzieren* unterrichtlicher Inhalte befähigen. Zum *Anforderungsbereich II* zählen solche Anforderungen an allgemeine Kompetenzen, die es Schüler:innen ermöglichen *Zusammenhänge herzustellen* und Gelerntes anzuwenden. In den *Anforderungsbereich III* gehören diejenigen Anforderungen, die es Schüler:innen abverlangen zu *verallgemeinern und zu reflektieren* (ebd.).

Die drei Bestandteile des Kompetenzmodells stellen gleichwertige Dimensionen der Bildungsstandards dar. Im Folgenden werden exemplarisch ein Aspekt der Leitidee *Zahl* sowie ein Aspekt der Leitidee *Daten und Zufall* herausgegriffen und erläutert. Eine Orientierung des Mathematikunterrichts an den *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* – also der Prozessdimension des Kompetenzmodells – ist eine maßgebliche Errungenschaft der Bildungsstandards, die auch bei exemplarischer Betrachtung einzelner Leitideen nicht in den Hintergrund geraten sollte.

3 Die Leitidee *Zahl*

Für die Leitidee *Zahl* werden die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen in den Bildungsstandards für den *mittleren Schulabschluss* folgendermaßen konkretisiert (KMK, 2004, S. 10):

Die Schüler:innen

- *nutzen sinntragende Vorstellungen von rationalen Zahlen, insbesondere von natürlichen, ganzen und gebrochenen Zahlen entsprechend der Verwendungsnotwendigkeit,*
- *stellen Zahlen der Situation angemessen dar, unter anderem in Zehnerpotenzschreibweise,*
- *begründen die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen an Beispielen,*
- *nutzen Rechengesetze, auch zum vorteilhaften Rechnen,*
- *nutzen zur Kontrolle Überschlagsrechnungen und andere Verfahren,*
- *runden Rechenergebnisse entsprechend dem Sachverhalt sinnvoll,*
- *verwenden Prozent- und Zinsrechnung sachgerecht,*
- *erläutern an Beispielen den Zusammenhang zwischen Rechenoperationen und deren Umkehrungen und nutzen diese Zusammenhänge,*
- *wählen, beschreiben und bewerten Vorgehensweisen und Verfahren, denen Algorithmen bzw. Kalküle zu Grunde liegen,*
- *führen in konkreten Situationen kombinatorische Überlegungen durch, um die Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten zu bestimmen,*
- *prüfen und interpretieren Ergebnisse in Sachsituationen unter Einbeziehung einer kritischen Einschätzung des gewählten Modells und seiner Bearbeitung.*

In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den *Hauptschulabschluss* wird dem (Kopf-)Rechnen eine größere Rolle zugeschrieben, während Begründungen zur Notwendigkeit für Zahlbereichserweiterungen hier nicht gefordert werden (KMK, 2004; KMK, 2005). Ansonsten beinhalten die Bildungsstandards zur Leitidee *Zahl* in beiden Versionen im Wesentlichen dieselben inhaltsbezogenen Kompetenzen.

Die beschriebenen inhaltsbezogenen Kompetenzen erfordern den Aufbau und die Anpassung eines Zahlbegriffs im Laufe der Sekundarstufe I. Die Schüler:innen sollen befähigt werden, den Zahlbegriff flexibel zu gebrauchen und mit entsprechenden Repräsentanten umzugehen. Darüber hinaus bedeutet das, dass Schüler:innen die Bedeutung und Sinnhaftigkeit der unterschiedlichen Zahlenbereiche erfahren. Diese Anforderungen werden auch im VERA-8 Kontext aufgegriffen.

So ist es notwendig, dass die Schüler:innen bei den Zahlbereichserweiterungen ihr individuelles System an Regeln, Merkhilfen und verinnerlichten Gesetzmäßigkeiten bei adäquaten Lerngelegenheiten auf (andauernde) Gültigkeit hin überprüfen. Dabei ist sowohl eine souveräne Handhabung der Rechenoperationen als auch die Nutzung von

Rechengesetzen zum vorteilhaften Rechnen ein Ziel. Des Weiteren sollen Schüler:innen in der Lage sein, Überschlagsrechnungen zu nutzen.

Der Kompetenzaufbau erfolgt dabei insbesondere aus realitätsbezogenen Anwendungen heraus, wie zum Beispiel der Prozent- und Zinsrechnung. Dies bedeutet, dass der Aufbau eines adäquaten Zahlbegriffs nicht losgelöst von den eigenen Umwelterfahrungen eingeführt werden soll.

Diese vielfältigen Facetten der Leitidee *Zahl* werden auch im VERA-Kontext aufgegriffen. Ein Schwerpunkt in diesem Jahr liegt dabei auf hilfsmittelfreien Aufgaben. Daher wird zunächst dargelegt, warum hilfsmittelfreie Aufgaben zur Leitidee *Zahl* in den VERA-8 Erhebungen aufgegriffen werden. Anschließend werden Aufgaben vorgestellt, die als hilfsmittelfreie Aufgaben im VERA-8 Kontext vorkommen können und bei denen der Mehrwert hilfsmittelfreier Aufgaben für den Kompetenzaufbau besonders ersichtlich wird. Dabei wird darauf eingegangen, welche allgemeinen Kompetenzen zur Lösung der Aufgaben benötigt werden.

3.1 Schwerpunktthema: *Hilfsmittelfreie Aufgaben*

Die oben beschriebenen inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen, die der Leitidee *Zahl* zuzuordnen sind, können nicht nur unter Rückgriff auf Hilfsmittel (wie etwa einen Taschenrechner) aufgebaut werden, sondern insbesondere auch bei Aktivitäten ohne Nutzung von Hilfsmitteln. Deshalb liegt der Schwerpunkt im Ergänzungsmodul zur Leitidee *Zahl* in diesem Jahr auf Aufgaben, die ohne Hilfsmittel bearbeitet werden können. Dieser Fokus ermöglicht die Überprüfung insbesondere folgender inhaltsbezogener mathematischer Kompetenzen zur Leitidee *Zahl*: Schüler:innen *nutzen Rechengesetze, auch zum vorteilhaften Rechnen* und sie *nutzen zur Kontrolle Überschlagsrechnungen und andere Kontrollverfahren* (KMK, 2004, S. 10). Das Prüfen dieser Kompetenzen ist bei der Möglichkeit der Nutzung eines Taschenrechners nur beschränkt möglich, da Ergebnisse mithilfe des Taschenrechners bestimmt werden können. Dabei wird nicht erwartet, dass Schüler:innen besonders langwierige Rechnungen mit vielstelligen Zahlen händisch durchführen. Es wäre auch im sonstigen Unterrichtsalltag nicht gefordert, dass Schüler:innen diese ohne Hilfsmittel lösen. Die Entlastung von aufwendigen Rechnungen stellt gerade ein Potenzial von Taschenrechnern dar, weil die Nutzung eines Taschenrechners in diesem Fall andere wichtige didaktische Schwerpunkte wie das mathematische Problemlösen, Modellieren und Argumentieren unterstützt. Außerdem trägt die Nutzung des Taschenrechners an einer solchen Stelle zur Ausbildung der Kompetenz K5 (*Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen*) bei, da Schüler:innen in der Lage sein sollten, mathematische Werkzeuge wie den Taschenrechner sinnvoll und verständlich einzusetzen (KMK, 2004, S. 9). Im hilfsmittelfreien Teil zur Leitidee *Zahl* geht es daher nicht um solche Aufgaben, bei denen der Taschenrechner eine Entlastung von aufwendigen Rechnungen

bietet, sondern vor allem um die Überprüfung von Basisfähigkeiten hinsichtlich des Rechnens. Dies lässt sich nicht nur auf Grundlage der Bildungsstandards legitimieren. Dass Kompetenzen zum „Rechnen können“ notwendig sind, wird auch von Schüler:innen wahrgenommen: Laut einer Studie der Stiftung Rechnen glauben 89 % der befragten Schüler:innen, dass „Rechnen können“ wichtig für ihre Zukunft ist (Stiftung Rechnen, 2009).

Darüber hinaus kann der hilfsmittelfreie Teil zur Leitidee *Zahl* Aufgaben enthalten, bei denen ein Taschenrechner nicht zur Lösung genutzt werden kann, selbst wenn dieser zur Verfügung stünde, beispielsweise, wenn Schüler:innen vorgegebene Anteile in einer Grafik einfärben sollen oder sie die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung begründen sollen.

3.2 Beispielaufgaben aus dem VERA-8 Kontext

Im folgenden Abschnitt wird anhand von vier hilfsmittelfreien Aufgaben dargestellt, welche *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* der Bildungsstandards mit den jeweiligen Aufgaben erhoben werden und wie diese Aufgaben vertiefend im Unterricht genutzt werden können. Dabei erfolgt die Aufgabenauswahl auf Basis der in Abschnitt 3.1 genannten inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen zur Leitidee *Zahl*, die mit Hilfsmitteln nur eingeschränkt geprüft werden können. Die erste Aufgabe „Vorteilhaft Rechnen“ (siehe Beispielaufgabe 1) fokussiert die *Nutzung von Rechengesetzen zum vorteilhaften Rechnen*. Die zweite und dritte Aufgabe „Überschlagsrechnung“ bzw. „Überschlag doch mal“ prüfen jeweils die *Nutzung von Überschlagsrechnungen und anderen Verfahren* (siehe Beispielaufgabe 2 und 3). Außerdem wird mit der Aufgabe „Zwei Thermometeranzeigen“ (siehe Beispielaufgabe 4) exemplarisch der Aufgabentyp verdeutlicht, bei der ein Taschenrechner ohnehin nicht zur Lösung der Aufgabe genutzt werden kann.

Im Folgenden ist die Aufgabe „Vorteilhaft rechnen“ dargestellt.

Beispielaufgabe 1: „Vorteilhaft Rechnen“

Teilaufgabe 1:

$$4 \cdot 0,1 \cdot 25 = \dots\dots\dots$$

Wie kannst du einen Rechenvorteil nutzen, um diese Aufgabe zu lösen?

Notiere deinen Lösungsweg.



Teilaufgabe 2:

$$3 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 0.5 = \dots\dots\dots$$

Wie kannst du einen Rechenvorteil nutzen, um diese Aufgabe zu lösen?

Notiere deinen Lösungsweg.

[illegible]

Teilaufgabe 3:

$$4 \cdot 12 + 12 \cdot 12 - 6 \cdot 12 = \dots\dots\dots$$

Wie kannst du einen Rechenvorteil nutzen, um diese Aufgabe zu lösen?

Notiere deinen Lösungsweg.

[illegible]

Die Aufgabe „Vorteilhaft Rechnen“ prüft die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5), indem die Lernenden gefordert sind,

Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz zu nutzen. Essentiell hierfür ist insbesondere ein tragfähiges Konzept der Multiplikation.

Eine gemeinsame Betrachtung der Aufgabe im Unterricht kann dazu genutzt werden, den Schüler:innen den Vorteil der Nutzung von Rechengesetzen aufzuzeigen. So kann mit Teilaufgabe 1 die Nützlichkeit des Kommutativgesetzes aufgezeigt werden, indem das Produkt von 4 und 25 gebildet wird. Die Multiplikation einer Zahl mit 100 und das damit einhergehende „Anhängen von zwei Nullen“ bzw. die Verschiebung des Kommas um zwei Stellen nach rechts ist eine effektivere Maßnahme, als zunächst das Produkt von 4 und 0,1 zu bilden, um anschließend mit 25 zu multiplizieren.

Teilaufgabe 2 verdeutlicht die Nützlichkeit des Assoziativgesetzes. Werden zuerst der vierte und fünfte Faktor multipliziert und dies fortgeführt, entfallen aufwendige Kopfrechnungen, da dann der Spezialfall einer Multiplikation mit Null eintritt.

Für das Aufzeigen der Rechenvorteile, die das Distributivgesetz bietet, eignet sich Teilaufgabe 3 in besonderem Maße. Eine Umformung des Terms bringt eine Multiplikation mit dem Faktor 12 hervor, welche bedeutend einfacher ist, als zunächst die einzelnen Produkte auszurechnen und dann zu addieren.

Neben der Überprüfung, ob Schüler:innen die Rechengesetze beherrschen, unterstreicht diese Aufgabe die Relevanz auch hilfsmittelfrei mit Zahlen operieren zu können. Ein Eintippen in den Taschenrechner oder das Nutzen eines anderen (digitalen) Hilfsmittels könnte hier sogar zu einem Mehraufwand führen.

Die nächsten beiden Aufgaben beziehen sich auf die inhaltsbezogene mathematische Kompetenz *(zur Kontrolle) Überschlagsrechnungen und andere Verfahren durchführen zu können*. Beispielaufgabe 2 zeigt die Aufgabe „Überschlagsrechnung“, in der bereits eine Rundung auf ganze Zehner zum Erfolg führt. Zur Lösung der Aufgabe ist die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2) erforderlich, indem Schüler:innen erkennen, dass hier das Abrunden der 91 auf 90 und das Aufrunden der 88 auf 90 einen adäquaten Überschlag darstellt (Antwortmöglichkeit 2).

Beispielaufgabe 2: „Überschlagsrechnung“

Das Ergebnis von $91 \cdot 88$ soll durch eine Überschlagsrechnung im Kopf annähernd ermittelt werden.

Welche der folgenden Überschlagsrechnungen eignet sich dafür am besten?

Kreuze an.

☐ $80 \cdot 80$

☐ $90 \cdot 90$

☐ $90 \cdot 80$

☐ $91 \cdot 85$

☐ $100 \cdot 90$

Außerdem fordert die Aufgabe „Überschlagsrechnung“ die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) dadurch, dass Schüler:innen Lösungs- und Kontrollverfahren ausführen. Wird Antwortmöglichkeit 4 ausgewählt, ist das ein Anzeichen dafür, dass die Idee des Überschlags nicht bekannt ist, weil mit den Zahlen nicht einfach im Kopf gerechnet werden kann. Es wird die Antwortmöglichkeit mit der scheinbar kleinsten Differenz zu $91 \cdot 88$ ausgewählt. Die anderen Antwortmöglichkeiten sind nicht optimal, weil die gewählten Faktoren entweder zu klein sind (Antwortmöglichkeit 1), zweimal abgerundet (Antwortmöglichkeit 3) oder zweimal aufgerundet werden (Antwortmöglichkeit 5). Prinzipiell wäre diese Aufgabe auch für einen Prüfungsteil, der das Nutzen von Hilfsmitteln erlaubt, denkbar. Jedoch besteht die Gefahr, dass Schüler:innen dann den Taschenrechner nutzen, um schnell das Ergebnis aller Antwortmöglichkeiten zu bestimmen, und dann den Vorschlag auswählen, der am nächsten an dem mit dem Taschenrechner bestimmten Ergebnis von $91 \cdot 88$ liegt.

Eine gemeinsame Betrachtung der Aufgabe im Unterricht ist sinnvoll, weil sie Anlass zur Reflektion im Hinblick auf den Rechenaufwand und die Ergebnisgenauigkeit bietet. An dieser Stelle kann es sich lohnen, die Schüler:innen die Lösungen der jeweiligen Antwortmöglichkeiten berechnen zu lassen und zu vergleichen. Dabei ist in der Aufgabe „Überschlagsrechnung“ ein direkter Überschlag erforderlich (direkte Angabe eines ungefähren Ergebnisses). Einen Kontrast dazu stellt der indirekte Überschlag dar, bei dem bestimmt wird, ob ein Überschlag über oder unter einem Ergebnis liegt (van den Heuvel-Panhuizen, 2008). Stellt sich beispielsweise die Frage, ob das Budget einer Galerie von 10 000 € reicht, um 91 Fotoleinwände zu kaufen, die je 88 € kosten, wäre $90 \cdot 90$ € zwar immer noch der genauere Überschlag. Bei der Frage, ob der Überschlag unter einer vorgegebenen Zahl liegt, ist die Angabe von $100 \cdot 90$ € an dieser Stelle jedoch auch denkbar, da das Aufrunden beider Zahlen hier eine sichere Antwort auf die Frage gibt, ob der Preis für die Fotoleinwände kleiner als der vorgegebene Wert von 10 000 € ist. Den Aufgabentypen liegen daher unterschiedliche Argumentationsprozesse zugrunde, die im Unterricht thematisiert werden können. Eine häufige Schwierigkeit besteht darin, dass die Überschlagsrechnung keinen genauen Regeln folgt, sondern gezielt Strategien ausgewählt werden müssen. Einen Gesprächsanlass dazu bieten die unterschiedlichen Strategien in der Tabelle 1. Mithilfe dieser Tabelle kann verdeutlicht werden, dass die Strategie des „Regelkonformen Rundens“ für das Galerie-Beispiel weniger geeignet ist, sondern eher auf die Strategien des „Geschickten Rundens“ oder der „Kompensation (Überschlag mit Ausgleichsrechnung)“ zurückgegriffen werden sollte. Schüler:innen erfahren dabei, dass die Bewertung der Eignung einer Strategie immer situationsabhängig erfolgt.

Tabelle 1: Formelle Überschlagsstrategien (Ausschnitt aus Tabelle von KIRA DZLM (2022)).

Strategie	$16,49 + 15,49 \approx$	$239 + 219 + 224 \approx$	$64 \cdot 0,4257 \approx$
Regelkonformes Runden	$16,50 + 15,50 = 32$ $16 + 15 = 31$...	$240 + 220 + 220 = 680$ $200 + 200 + 200 = 600$...	$64 \cdot 0,4 = 25,6$ $64 \cdot 0 = 0$
Geschicktes Runden	$16 + 16 = 32$ (hier: gegensinniges Verändern)	$240 + 220 + 220 = 680$	$64 \cdot 0,5 = 32$
Auf bekannte/ einfache Aufgabe zurückgreifen	$16 + 16 = 32$ (hier: bewusstes Zurückgreifen auf Verdopplungsaufgabe)	$3 \cdot 200 = 600$	$0,4257$ entspricht ca. $\frac{1}{2}$ $\rightarrow 64 \cdot \frac{1}{2} = 32$
Kompensation (Überschlag mit Ausgleichsrechnung)	$16 + 15 = 31$ (es wurde zweimal abgerundet, also liegt das Ergebnis ungefähr bei 32)	$200 + 200 + 200 = 600$ (es wurde dreimal abgerundet, also liegt das Ergebnis ungefähr bei 670)	$64 \cdot \frac{1}{2} = 32$ (da $0,4257 < \frac{1}{2}$ ist, liegt das Ergebnis etwas unter 32)

Darüber hinaus können Aufgaben thematisiert werden, bei denen die Überschlagsrechnung nicht nur zum Vergleich mit genauen Ergebnissen oder als Vorabeinschätzung der zu erwartenden Größenordnung dient. Die Aufgabe „Überschlag doch mal“ (siehe Beispielaufgabe 3) bietet einen Anlass, zu thematisieren, dass eine ungefähre Abschätzung im Sachkontext ausreichend ist. Dabei stellt diese Aufgabe Anforderungen an die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3), da die Realsituation („Wie viele Stunden werden in acht Schuljahren in der Schule verbracht?“) zunächst geeignet vereinfacht werden muss. Hierbei kommt sogenanntes Stützpunktwissen zum Tragen („Wie viele Wochen Schulferien gibt es?“, „Wie viele Tage pro Woche und wie viele Stunden am Tag verbringe ich in der Schule?“), mithilfe dessen geeignete Werte geschätzt werden. Diese Annahmen (z. B. 8 Schuljahre, 40 Schulwochen pro Jahr, 5 Schultage pro Schulwoche und 6 Stunden Schulzeit pro Tag) werden in ein mathematisches Modell überführt ($8 \cdot 40 \cdot 5 \cdot 6$). Durch mathematisches Arbeiten (evtl. auch unter Rückgriff auf Rechengesetze wie das Assoziativ- oder Kommutativgesetz), das Anforderungen an die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik* (K5) stellt, erhalten Schüler:innen hier das (exemplarische) Ergebnis 9600. Dieses muss anschließend im Sachzusammenhang interpretiert werden.

Beispielaufgabe 3: „Überschlag doch mal“

Max meint, dass er ziemlich viel Zeit in der Schule verbringt. Er fragt sich, wie viele Unterrichtsstunden es in acht Schuljahren wohl schon waren.

Welche Zahl passt am besten?

Kreuze an.

- ☐ ca. 1000 Unterrichtsstunden
- ☐ ca. 10 000 Unterrichtsstunden
- ☐ ca. 100 000 Unterrichtsstunden
- ☐ ca. 1 000 000 Unterrichtsstunden

Begründe deine Entscheidung.

[illegible]

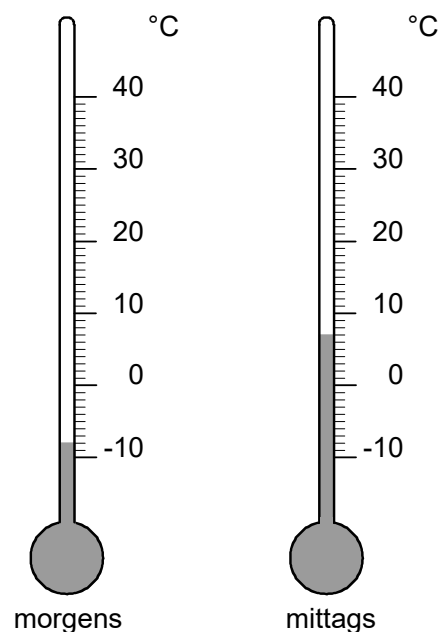
Die vierte und letzte Aufgabe „Zwei Thermometeranzeigen“ (siehe Beispielaufgabe 4) verknüpft Zahlbereiche und ihre Erweiterungen mit Rechenfähigkeiten im Anwendungskontext.

Beispielaufgabe 4: „Zwei Thermometeranzeigen“

Das linke Thermometer zeigt die Temperatur, die morgens gemessen wurde. Das rechte Thermometer zeigt die Temperatur, die mittags gemessen wurde.

Gib den Temperaturunterschied an.

Der Temperaturunterschied beträgt _____ °C.



Für die Lösung der Aufgabe nutzen Schüler:innen *sinntragende Vorstellungen von ganzen Zahlen entsprechend der Verwendungsnotwendigkeit* (KMK, 2004, S. 10). Dieses Beispiel der Temperatur bietet einen Anlass, den Schüler:innen die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung zu verdeutlichen, da den Schüler:innen Temperaturen unter 0°C normalerweise bereits in ihrem Alltag begegnet sind und hierfür die aus der Grundschule bekannten natürlichen Zahlen nicht mehr ausreichen. Dabei muss das Rechnen mit natürlichen Zahlen überdacht werden, denn im Kontext von ganzen Zahlen verkleinert das Abziehen des Subtrahenden den Minuenden nicht zwangsläufig. Somit stellt diese Aufgabe Anforderungen an die Rechenfähigkeiten und -fertigkeiten der Schüler:innen.

In dieser Aufgabe wird die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) angesprochen, da der Abbildung der Thermometer wichtige Informationen entnommen werden müssen. Der sich anschließende Umgang mit den gegebenen Daten erfordert die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5).

Letztendlich ist beim hilfsmittelfreien Arbeiten im Kontext der Leitidee *Zahl* das Ziel, dass Schüler:innen einerseits Rechengesetze zum vorteilhaften Rechnen nutzen können. Andererseits ist ein genaues Rechnen nicht immer sinnvoll und erforderlich. Dabei ist eine wichtige Erfahrung für Schüler:innen, dass sie nicht abhängig von ihrem Taschenrechner, sondern auch in der Lage sind, Überschlagsrechnungen abhängig vom Kontext durchzuführen.

4 Abschließende Anmerkungen

Die diesjährigen didaktischen Handreichungen beinhalten erneut zwei Themenschwerpunkte aus zwei Leitideen, die als Ergänzungsmodule für die VERA-8 Testung zur Auswahl stehen. Im Bereich der Leitidee *Zahl* ist dies der Schwerpunkt *hilfsmittelfreie Aufgaben*, im Bereich der Leitidee *Daten und Zufall* der Schwerpunkt *Umgang mit Daten*. Aus beiden Themen wurden zentrale Inhalte betrachtet, welche durch die Bildungsstandards vorgegeben werden. Dabei wurde auf besondere Hürden und Möglichkeiten sowohl beim Thema *hilfsmittelfreie Aufgaben* als auch im Themenfeld *Umgang mit Daten* hingewiesen. Für weitere Anregungen für die Unterrichtspraxis sei auf die Kommentare zu den einzelnen Aufgaben in Teil III der didaktischen Handreichungen verwiesen. Zudem wurde aufgezeigt, welche Aufgabenmerkmale mit welchen allgemeinen mathematischen Kompetenzen einhergehen. Für weitere Beispiele und Anregungen stellt die in den vorangegangenen Kapiteln genannte Literatur eine gute Ausgangslage dar.

5 Literaturverzeichnis

- Blum, W. (2010). Einführung. In W. Blum, C. Drücke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 14–32). Berlin: Cornelsen.
- Greefrath, G. (2018). *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht. Didaktische Perspektiven des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Berlin: Springer Spektrum.
- <https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>
- KIRA DZLM. (2022, 08. März). *Überschlagsrechnen*. Zugriff am 15.11.2022, Verfügbar unter <https://kira.dzlm.de/node/131>
- Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenorth, H.-E. & Vollmer, H. J. (2003). Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. In BMBF (Hrsg.), *Bildungsreform Band 1. Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards: Eine Expertise* (S. 7–174). Berlin.
- KMK (2004): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Beschluss vom 4.12.2003. München: Luchterhand.
- KMK (2005): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss*. Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Luchterhand.
- KMK (2005b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Luchterhand.
- KMK (2015). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012). Köln: Carl Link.
- Leiss, D. & Blum, W. (2010). Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen. In W. Blum, C. Drücke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 33–50). Berlin: Cornelsen.
- OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing.
- Stiftung Rechnen (2009). *Rechnen in Deutschland. Eine Studie der Stiftung Rechnen und bettermarks*. Zugriff am 15.11.2022. Verfügbar unter <https://www.stiftungrechnen.de/wp-content/uploads/2021/03/Ergebnisbericht-Studie-Rechnen-in-Deutschland.pdf>
- van den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). Estimation. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), *Children learn mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (S. 173–202). Sense Publishers.
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* 21(61), 37–46.

6 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: IQB in Anlehnung an KMK, 2015, S. 12	5
--	---

7 Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: IQB in Anlehnung an KIRA DZLM (2022))	13
---	----

8 Verzeichnis der Beispielaufgaben

Beispielaufgabe 1: „Vorteilhaft Rechnen“	10
Beispielaufgabe 2: „Überschlagsrechnung“	11
Beispielaufgabe 3: „Überschlag doch mal“	14
Beispielaufgabe 4: „Zwei Thermometeranzeigen“	14



Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten 2024

8. Jahrgangsstufe (VERA-8)

Mathematik – Didaktische Handreichung

Teil II

Fachdidaktische Orientierung

Leitidee *Daten und Zufall*



Inhaltsverzeichnis

1	EINLEITUNG	3
2	BILDUNGSSTANDARDS UND KOMPETENZMODELL IM FACH MATHEMATIK.....	3
3	DIE LEITIDEE DATEN UND ZUFALL	7
3.1	SCHWERPUNKTTHEMA: UMGANG MIT DATEN.....	8
3.1.1	Phasen einer statistischen Erhebung.....	8
3.1.2	Aspekte statistischen Denkens	10
3.2	DATEN IM VERA-8 KONTEXT	11
3.3	DATEN UND IHRE INTERDISZIPLINARITÄT	16
4	ABSCHLIEßENDE ANMERKUNGEN	17
5	LITERATURVERZEICHNIS	18
6	ABBILDUNGSVERZEICHNIS	19
7	TABELLENVERZEICHNIS	19
8	VERZEICHNIS DER BEISPIELAUFGABEN	19

Autor:innen der fachdidaktischen Erläuterungen in Teil II sind Ilja Ay, Maxim Brnic, Corinna Hankeln, Marlena Meyer, Antonia Rewer und Laura Wirth. Die gezeigten Testaufgaben entstanden in Kooperation von Lehrkräften aus zehn Bundesländern und Fachdidaktiker:innen unter Federführung der Arbeitsgruppe Prof. Greefrath, Universität Münster (fachdidaktische Leitung) und des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen.

Haftungsausschluss:

Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle übernehmen wir keine Haftung für Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der eigenen Inhalte und der Inhalte externer Links. Für den Inhalt der verlinkten Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich.

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien
auch online finden können?

www.igb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

1 Einleitung

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK, 2004, 2005, 2005b, 2015) mit ihren Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen bilden die Grundlage für die VERgleichsArbeiten in der 8. Jahrgangsstufe (VERA-8) im Fach Mathematik. Daher wird in dieser didaktischen Handreichung zunächst der Aufbau der Bildungsstandards vorgestellt. Anschließend wird einer der Schwerpunkte, die in den diesjährigen Ergänzungsmodulen zur Wahl stehen, näher erläutert: die Leitidee *Daten und Zufall* mit einem Fokus auf das Thema *Umgang mit Daten*. Es werden insbesondere zu Aspekten des Schwerpunktes fachdidaktische Herausforderungen geschildert und Anregungen vorgestellt, wie mit diesen in der Unterrichtspraxis umgegangen werden kann. In dem dazugehörigen Kapitel werden außerdem Aufgaben aus VERA-8 präsentiert, die sich der diesjährigen Schwerpunktsetzung zuordnen lassen. Dabei handelt es sich um Beispiele für Aufgabenformulierungen, welche die verschiedenen allgemeinen Kompetenzen adressieren und zudem im Unterricht zur Förderung der Kompetenzen herangezogen werden können.

2 Bildungsstandards¹ und Kompetenzmodell im Fach Mathematik

Im Anschluss an die Ergebnisse großer internationaler Vergleichsstudien – wie etwa der PISA-Studie oder TIMSS – führte die Kultusministerkonferenz (KMK) ab dem Jahr 2003 Bildungsstandards für die Fächer Deutsch, Mathematik und die erste Fremdsprache (Englisch/Französisch) ein². Eine grundlegende Wende stand bevor: Während zuvor der *Input* im Vordergrund stand, also Inhalte und Themen, sollte nun auch der *Output* stärkere Beachtung finden, also der Aufbau von Kompetenzen, Wissensstrukturen, Werten, etc.. Inhalte sollten mit der Entwicklung von Persönlichkeitsmerkmalen verknüpft werden, die die Basis für ein lebenslanges Lernen legen und so persönliche Weiterentwicklung und gesellschaftliche Teilhabe ermöglichen (Klieme et al., 2003). Die OECD betont dabei den Anwendungscharakter von Mathematik:

„Mathematische Grundbildung umfasst die Fähigkeit des Einzelnen, Mathematik in einer Vielzahl von Kontexten zu formulieren, anzuwenden und zu interpretieren. Sie umfasst mathematisches Argumentieren und die Verwendung mathematischer Konzepte, Verfahren, Fakten und Werkzeuge zur Beschreibung, Erklärung und Vorhersage von Phänomenen. Sie

¹ Die Bildungsstandards für Mathematik wurden für den Ersten und Mittleren Schulabschluss weiterentwickelt und 2022 von der KMK verabschiedet (KMK, 2022). Die Didaktische Handreichung Teil II bezieht sich auf die Bildungsstandards, die 2004 und 2003 von der KMK beschlossen worden sind, da sich die Normierungsaufgaben für die neuen Bildungsstandards noch in der Entwicklung befinden.

² <https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>

hilft dem Einzelnen, die Rolle zu erkennen, die die Mathematik in der Welt spielt, und begründete Urteile und Entscheidungen zu treffen, die von konstruktiven, engagierten und reflektierten Bürgerinnen und Bürgern benötigt werden.“ (OECD, 2013, S. 25, eigene Übersetzung)

Zu diesem Zweck benennen die Bildungsstandards Kompetenzen, die Schüler:innen bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe anhand zentraler Fachinhalte erworben haben sollen (KMK, 2004, 2005). Dabei wird davon ausgegangen, dass ein allgemeinbildender Mathematikunterricht Schüler:innen die folgenden drei *Grunderfahrungen* ermöglicht (Winter, 1995, S. 37):

1. Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
2. mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
3. in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Die Bildungsstandards umfassen in ihrem Wesen die benannten Grunderfahrungen sowie Inhalte, Kompetenzen und Niveaustufen, wie das folgende Kompetenzmodell für das Fach Mathematik darlegt. Das Kompetenzmodell liefert einen *Handlungsrahmen* für Lehrpersonen und Schulen, zur Einhaltung verbindlicher Ziele sowie zur Weiterentwicklung von Schule und Unterricht (Klieme et al., 2003). Handlungsrahmen bedeutet insbesondere, dass im Vordergrund nicht die Umsetzung eines – aus der fachlichen Systematik entstehenden – ‚starren Gerüsts‘ steht, sondern den Schulen ein großer „Freiraum für die innerschulische Lernplanung“ (ebd., S. 9) gelassen wird. Es werden in diesem Modell zunächst die folgenden drei Dimensionen unterschieden (siehe Abbildung 1):

1. *Allgemeine mathematische Kompetenzen*
2. *Leitideen*
3. *Anforderungsbereiche*

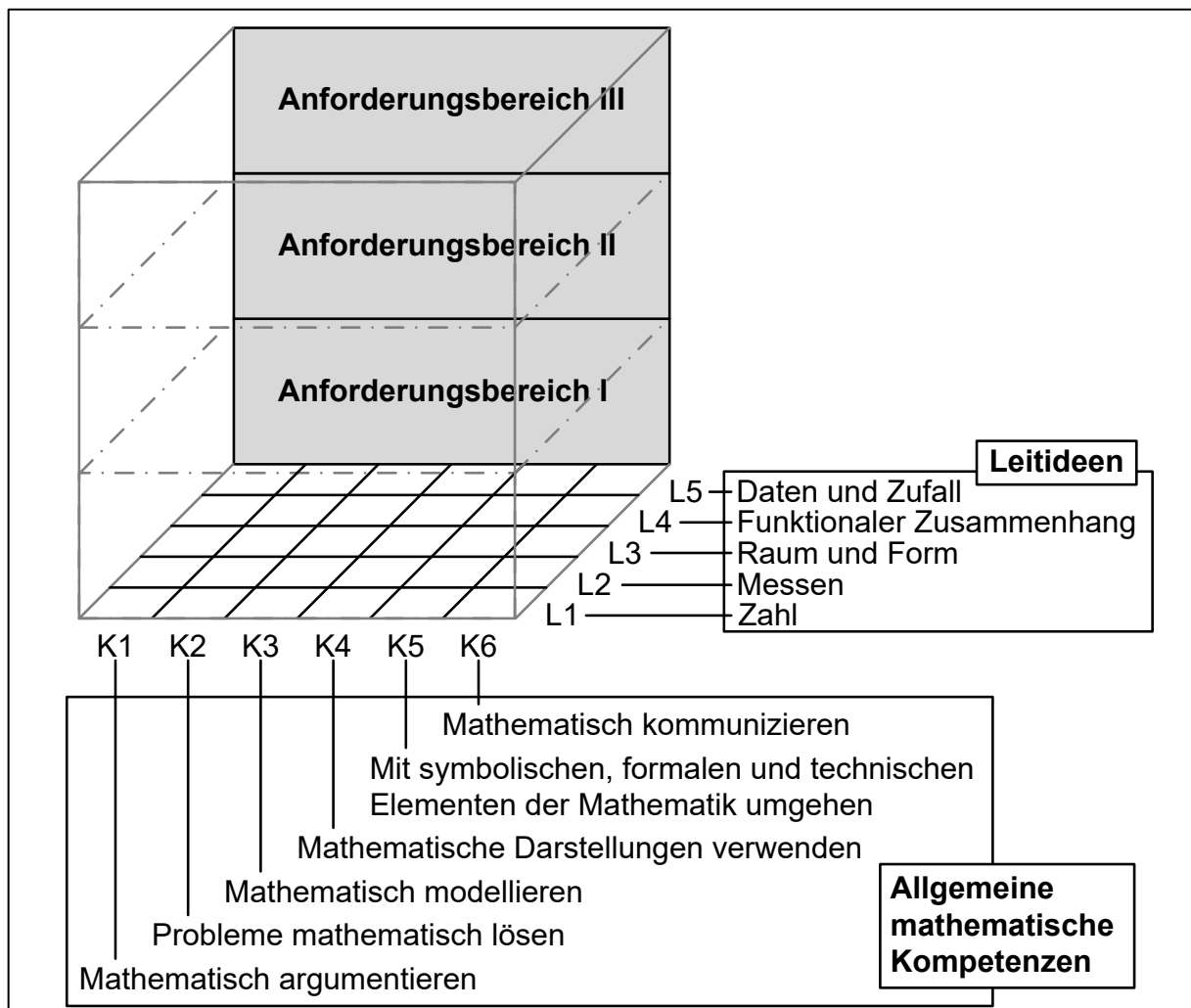


Abbildung 2: Kompetenzmodell der Bildungsstandards

Die *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* bilden die Prozessdimension des Modells. Dabei wird vom Grundgedanken ausgegangen, „das Können der Schüler an den *Kompetenzen* festzumachen, die sie beim Bearbeiten von Aufgaben zu aktivieren haben“ (Leiss & Blum, 2010, S. 33). Im Einzelnen sind dies die Kompetenzen *Mathematisch argumentieren* (K1), *Probleme mathematisch lösen* (K2), *Mathematisch modellieren* (K3), *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4), *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) und *Mathematisch kommunizieren* (K6). Diese *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* sollen differenziert betrachtet werden, auch wenn sie üblicherweise im Verbund erworben werden und häufig auch gemeinsam angewendet werden müssen. Insbesondere werden bei der Bearbeitung von komplexeren mathematischen Aufgaben oft mehrere dieser Kompetenzen benötigt. Mit der getrennten Betrachtung ist die Absicht verbunden, spezifische Eigenschaften und Anforderungen von Aufgaben im Mathematikunterricht transparent zu machen, was eine differenziertere Planung des Mathematikunterrichts ermöglicht. So kann ein mathematischer Inhalt den Schüler:innen entlang verschiedener durchzuführender mathematischer Tätigkeiten zugänglich gemacht

werden. Inhalte können durch die multiperspektivische und wiederholte Betrachtung eher in ihrer Gänze verstanden werden und mathematische Kompetenzen anhand unterschiedlichster Erscheinungen über den Inhalt hinaus erworben werden.

Jedoch reicht der Blick auf die *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* für eine produktive Gestaltung des Mathematikunterrichts nicht aus (Leiss & Blum, 2010). Daher bilden die *Leitideen* eine zweite Dimension des Modells. Die fünf Leitideen sind *Zahl* (L1), *Messen* (L2), *Raum und Form* (L3), *Funktionaler Zusammenhang* (L4) und *Daten und Zufall* (L5). In den Bildungsstandards wird zu den Leitideen erläutert:

„Eine Leitidee vereinigt Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete und durchzieht ein mathematisches Curriculum spiralförmig. Die Zuordnung einer inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz zu einer mathematischen Leitidee ist nicht in jedem Fall eindeutig, sondern davon abhängig, welcher Aspekt mathematischen Arbeitens im inhaltlichen Zusammenhang betont werden soll.“ (KMK, 2004, S. 9).

Leitideen folgen keinem fachdidaktischen Aufbau im Sinne einer zeitlichen Abfolge im Lernprozess („erst kommt das Zählen, dann kommt das Messen, usw.“), sondern sie erlauben es, bestimmte mathematische Inhalte unter einer Kategorie zusammenzufassen. Vielmehr soll durch die Betonung von Leitideen deutlich werden, dass sich aus mathematischen Phänomenen wie dem Zählen, dem Messen oder dem Umgang mit Zufällen mathematische Sachgebiete herausgebildet haben (Greefrath 2018, Blum 2010).

Die dritte Dimension enthält die drei *Anforderungsbereiche*. Sie beschreiben die Komplexität von Aufgaben, denn das Bearbeiten und Lösen von Aufgaben fordert mathematische Kompetenzen in unterschiedlichen Ausmaßen (KMK, 2004). Es werden dabei in der Regel drei Anforderungsbereiche unterschieden. Mit dem *Anforderungsbereich I* werden Anforderungen an allgemeine Kompetenzen beschrieben, die zum *Reproduzieren* unterrichtlicher Inhalte befähigen. Zum *Anforderungsbereich II* zählen solche Anforderungen an allgemeine Kompetenzen, die es Schüler:innen ermöglichen *Zusammenhänge herzustellen* und Gelerntes anzuwenden. In den *Anforderungsbereich III* gehören diejenigen Anforderungen, die es Schüler:innen abverlangen zu *verallgemeinern und zu reflektieren* (ebd.).

Die drei Bestandteile des Kompetenzmodells stellen gleichwertige Dimensionen der Bildungsstandards dar. Im Folgenden werden exemplarisch ein Aspekt der Leitidee *Zahl* sowie ein Aspekt der Leitidee *Daten und Zufall* herausgegriffen und erläutert. Eine Orientierung des Mathematikunterrichts an den *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* – also der Prozessdimension des Kompetenzmodells – ist eine maßgebliche Errungenschaft der Bildungsstandards, die auch bei exemplarischer Betrachtung einzelner Leitideen nicht in den Hintergrund geraten sollte.

3 Die Leitidee *Daten und Zufall*

In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den *mittleren Schulabschluss* werden unter der Leitidee *Daten und Zufall* die folgenden inhaltsbezogenen Kompetenzen zusammengefasst (KMK, 2004):

Die Schüler:innen

- *werten graphische Darstellungen und Tabellen von statistischen Erhebungen aus,*
- *planen statistische Erhebungen,*
- *sammeln systematisch Daten, erfassen sie in Tabellen und stellen sie graphisch dar, auch unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel (wie Software),*
- *interpretieren Daten unter Verwendung von Kenngrößen,*
- *reflektieren und bewerten Argumente, die auf einer Datenanalyse basieren,*
- *beschreiben Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen,*
- *bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten.*

Diese Auflistung deckt sich mehrheitlich mit derjenigen für den *Hauptschulabschluss* (KMK, 2005), wobei vereinzelt Unterschiede identifiziert werden können. So hat in den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss die Datenanalyse einen geringeren Stellenwert. Dies wird dadurch ersichtlich, dass die Interpretation unter Verwendung von Kenngrößen sowie die bei einer Datenanalyse einhergehende Reflexion und Bewertung von Argumenten nicht explizit gefordert werden. Dass Schüler:innen eine eigenständige Erhebung planen, wird ebenfalls nicht aufgegriffen. Stattdessen wird durch die inhaltsbezogenen Kompetenzen ein Alltagsbezug stärker betont. Schüler:innen sollen sowohl (berechnete) Häufigkeiten und Mittelwerte als auch lebensnahe Wahrscheinlichkeitsaussagen im Kontext interpretieren können.

Durch die aufgelisteten inhaltlichen Kompetenzen wird bereits ersichtlich, dass die Leitidee *Daten und Zufall* wesentliche Elemente der Stochastik enthält. Dabei ist sie aber nicht auf die Stochastik beschränkt, sondern kann u. a. funktionale Zusammenhänge, das Messen oder die Geometrie aufgreifen, beispielsweise im Umgang mit Daten oder bei systematischen Experimenten (Biehler & Hartung, 2010).

Diese didaktische Handreichung setzt im Folgenden einen Schwerpunkt auf den (stochastischen) Aspekt der *Daten*. Eine Schwerpunktsetzung auf diese Teilthematik bietet sich aus einem lebensnahen und einem didaktisch-bildungspolitischen Grund besonders an. Einerseits werden Schüler:innen und Lehrkräfte tagtäglich mit unterschiedlichsten Daten konfrontiert, z. B. durch Statistiken in sozialen und digitalen Medien. Andererseits ist ein Wandel der Lehrpläne beobachtbar dadurch, dass der Datenaspekt in diesen stärker integriert wird.

3.1 Schwerpunktthema: *Umgang mit Daten*

In Kapitel 2 dieser Handreichung werden die Grunderfahrungen genannt, die Schüler:innen in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht erfahren sollen. Eine dieser Grunderfahrungen beschreibt, dass die Welt auf eine mathematische Weise wahrgenommen werden soll (Winter, 1995, S. 37). Ausgehend von der Prämisse, dass sich gerade Stochastikunterricht durch einen Anwendungsbezug auszeichnet und als „anwendungsorientierter Unterricht“ bezeichnet werden kann, scheint dieser dazu prädestiniert zu sein, die eigene Umwelt in der Bedeutung von Winter auf mathematische Weise erfahrbar zu machen (Krüger et al., 2015, S. 7). Anhand des hier gewählten Schwerpunktes *Umgang mit Daten* ist diese Perspektive besonders nachvollziehbar, da Daten als „Zahlen mit einem Kontext“ aufgegriffen werden können (Biehler & Engel, 2015, S. 229). Die Auseinandersetzung mit Daten im Mathematikunterricht kann Erfahrungen in der eigenen Umwelt widerspiegeln, da Schüler:innen in einer durch (empirische) Daten beeinflussten Welt leben.

Die gesonderte gesellschaftliche Relevanz dieses Schwerpunktthemas *Umgang mit Daten* erfordert, dass Schüler:innen sich differenziert mit Daten und ihren unterschiedlichen Repräsentationen beschäftigen und diese interpretieren können, was zum Beispiel bei der Konfrontation mit (datenlastigen) Beiträgen sozialer oder anderer Medien gefordert ist. Im Verständnis der Bildungsstandards werden darüber hinaus breitere Kompetenzen gefordert (Biehler & Hartung, 2010), etwa dass „nicht nur problematische Zeitungsberichte, sondern beispielsweise seriös für die Öffentlichkeit produzierte Veröffentlichungen von statistischen Ämtern zu verstehen ... die Zielperspektive [ist]“ (Biehler & Hartung, 2010, S. 53). Es stellt sich somit die Frage, wie ein solcher breiter Kompetenzerwerb erreicht werden kann. Ein wesentlicher Aspekt zum Erreichen dieses Ziels ist, dass Lernende die Methode der statistischen Erhebung kennen(lernen) und dabei die einzelnen Phasen einer vollständigen statistischen Erhebung durchlaufen. Hierbei sind in den jeweiligen Phasen unterschiedliche mathematische Kompetenzen gefordert (vgl. Folgekapitel), wobei die Schüler:innen zugleich wichtige Erfahrungen sammeln (Biehler & Hartung, 2010).

3.1.1 Phasen einer statistischen Erhebung

Die mathematischen Kompetenzen, welche in den einzelnen Phasen einer vollständigen statistischen Erhebung eine zentrale Bedeutung haben, werden in der folgenden Tabelle 1 dargestellt:

Tabelle 1: Phasen einer statistischen Erhebung, vgl. Biehler & Hartung, 2010; Biehler & Engel, 2015.

Phase	Zentrale Kompetenzen	Beispiele / Erläuterung
Problemstellung	Mathematisch modellieren (K3)	Reale Problemstellung in eine statistische Erhebung übersetzen, relevante Variablen identifizieren, ...
Planung der Erhebung		
Datenerhebung		
Auswertung	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, technischen und formalen Elementen der Mathematik umgehen (K5)	Zwischen verschiedenen statistischen Darstellungen und Visualisierungen Beziehungen erkennen, zwischen Darstellungen wechseln, Software zur Berechnung von Kenngrößen nutzen, ...
Interpretation		
Schlussfolgerung und Ergebnisbericht	Mathematisch argumentieren (K1) Mathematisch kommunizieren (K6)	Den Lösungsweg begründen, den Sachverhalt schriftlich kommunizieren und adressatengerecht darlegen, ...

Dabei ist zu beachten, dass alle weiteren mathematischen Kompetenzen abhängig von der einzelnen Problemstellung ebenfalls in den einzelnen Phasen bedeutsam sein können. Beispielsweise kann bei der *Auswertung* der Daten die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* benötigt werden, um die relevanten Informationen für die folgende Interpretation zu identifizieren. Es ist außerdem möglich, dass bei einer statistischen Untersuchung die Phasen mehrfach durchlaufen werden. Zum Beispiel kann bei der *Interpretation* festgestellt werden, dass noch weitere Daten benötigt werden, oder es können während des Prozesses neue Frage- bzw. Problemstellungen entstehen (Biehler & Engel, 2015; Krüger et al., 2015, S. 103).

Mithilfe dieser Tabelle wird ebenfalls deutlich, dass eine statistische Erhebung nicht nur Kompetenzen im Umgang mit der Datenauswertung und den damit einhergehenden Berechnungen oder mathematischen Darstellungen erfordert. Unter anderem wird in den letzten Phasen der statistischen Erhebung sichtbar, dass insbesondere Verbalisierungen im Stochastikunterricht bedeutsam sind. Diese Rolle der mathematischen Sprache wird dadurch deutlich, dass die Kompetenzen mathematisch zu *argumentieren* und zu *kommunizieren* explizit gefordert und somit gezielt gefördert werden können (Krüger et al., 2015, S. 8).

3.1.2 Aspekte statistischen Denkens

Eine zielgerechte Auseinandersetzung mit Problemstellungen beim *Umgang mit Daten* erfordert bei Schüler:innen sogenanntes *statistisches Denken*. Dieses gilt es aufzubauen und ist in fünf Aspekte unterteilbar (Eichler & Vogel, 2013, S. XII; Vogel & Eichler, 2010; vgl. auch Biehler & Engel, 2015, S. 225; Wild & Pfannkuch, 1999).

1. Erkennen der Notwendigkeit von Daten

Die Schüler:innen sollen erkennen, dass erst auf Basis „guter“ Daten und entsprechender statistischer Auswertungen Entscheidungen und Aussagen getroffen werden können, die allgemein anerkannt sind und nicht nur einer subjektiven Ansicht und Überzeugung entsprechen.

2. Flexible Repräsentation der relevanten Daten

Daten können nicht als „richtig“ oder „falsch“ kategorisiert werden, sondern müssen statistisch analysiert werden. Abhängig von der jeweiligen Problemstellung wird jeweils eine andere Analyse- und Darstellungsmethode benötigt und die Daten können auf unterschiedliche Weise dargestellt werden. Die Auswahl der passenden Analyse- und Darstellungsmethode erfordert Wissen über die Potenziale und Grenzen dieser, sodass die Daten aus unterschiedlichen Perspektiven wahrgenommen werden können. Beispielsweise können Boxplots und Säulendiagramme zum gleichen Datensatz erstellt werden, würden aber unterschiedliche Informationen bereitstellen oder entsprechend vernachlässigen.

3. Einsicht in die Variabilität statistischer Daten

Der Ausgang einer statistischen Erhebung kann nicht genau vorausgesagt werden. Dies wird insbesondere durch Experimente deutlich, z. B. dem 50-maligen Werfen eines sechsseitigen Würfels. Wenn dieses Experiment wiederholt wird, wird das Ergebnis der Erhebung (voraussichtlich) unterschiedlich ausfallen. Damit mit solchen stets unterschiedlichen Ergebnissen umgegangen werden kann, ist es bedeutsam, die Gründe für die Variabilität zu thematisieren. So können es erklärbare, unerwartete oder zufällige Variationen des Ergebnisses sein, es kann sich um einen Sonderfall handeln oder auf eine häufiger vorkommende Ursache zurückführen lassen.

4. Erkennen von Mustern in den Daten und Beschreibung der Muster mit statistischen Modellen

Obwohl bei statistischen Erhebungen eine Variabilität vorhanden ist, sind trotzdem Muster in den Daten erkennbar. Würde man das Werfen eines Würfels mehrfach wiederholen, würden sich die Ergebnisse der Erhebungen voraussichtlich stets unterscheiden. Trotzdem wäre die Binomialverteilung als Muster identifizierbar und beschreibbar. Solche stochastischen Modelle

können insbesondere in den höheren Jahrgangsstufen thematisiert werden und eignen sich dafür, den Umgang mit solchen Experimenten und Daten immer wieder aufzugreifen.

5. *Verbinden von Kontext und Statistik*

Die Auswertung und Analyse von Daten sind für (reale) Kontexte relevant. Diese Erkenntnis muss von Schüler:innen erst einmal erlangt werden. Beispielsweise sollte bei der Interpretation der Datenauswertung stets auch der Kontext beachtet werden, damit Interpretationsspielräume berücksichtigt werden. Den Schüler:innen sollte also bewusst sein, dass sich die Daten und der Kontext gegenseitig bedingen.

3.2 **Daten im VERA-8 Kontext**

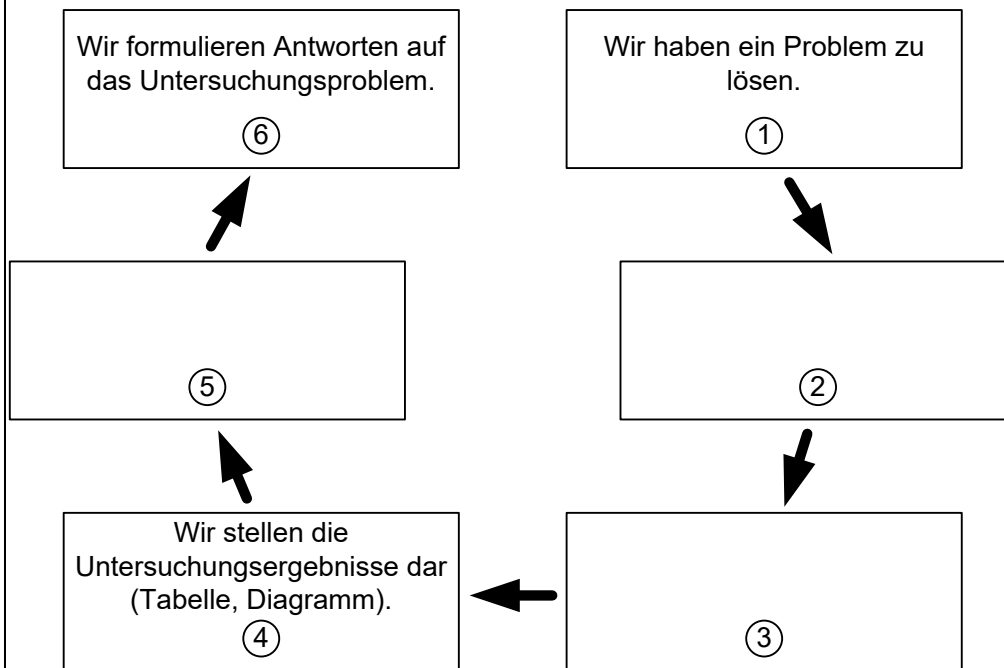
Im VERA-8 Kontext sind Aufgaben zu finden, in denen der *Umgang mit Daten* geprüft wird. Mithilfe zweier Beispielaufgaben wird dies im Folgenden exemplarisch aufgezeigt. Dabei wird insbesondere dargelegt, welche Kompetenzen die Aufgaben erfordern und nach Möglichkeit Bezug zu den Phasen einer statistischen Erhebung und den Aspekten statistischen Denkens genommen.

Dass eine statistische Untersuchung festgelegten und stringenten Phasen folgt und somit in einem allgemeinen Ablauf beschrieben werden kann, wird in der Aufgabe „Bistroumfrage“ (siehe Beispielaufgabe 1) aufgegriffen.

Beispielaufgabe 1: „Bistroumfrage“ - Teilaufgabe 1

Die Klasse 8a plant eine statistische Untersuchung zum Kaufverhalten im Schulbistro. Bevor die statistische Untersuchung durchgeführt wird, soll mithilfe von Planungskarten ein allgemeiner Ablaufplan erstellt werden.

Ablaufplan



Ordne die folgenden Planungskarten der richtigen Stelle im Ablaufplan zu.

Schreibe dazu die entsprechenden Nummern in die Kreise auf den Planungskarten.

Planungskarten

Wir interpretieren die Untersuchungsergebnisse. ○	Wir führen eine Befragung durch. ○	Wir überlegen uns geeignete Fragen. ○
--	---------------------------------------	--

Bei dieser Aufgabe sollen Schüler:innen Planungskarten an die richtigen Stellen eines Ablaufplans einer statistischen Untersuchung sortieren. Die Planungskarten spiegeln dabei die Phasen einer vollständigen statistischen Untersuchung wider: die Problemstellung – die Planung der Erhebung – die Datenerhebung – die Auswertung – die Interpretation – die Schlussfolgerung und den Ergebnisbericht (vgl. Kapitel 3.1.1).

Da hier aus einfachen mathemathikhaltigen Texten bzw. der Abbildung Informationen zu den einzelnen Phasen entnommen werden müssen, ist hier die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) gefordert. Die Abbildung stellt dabei eine Möglichkeit dar, wie die Phasen im Unterricht dargestellt werden könnten. Die einzelnen Phasen werden in diesem Ablaufplan mit Handlungen verknüpft und somit operationalisiert.

Bei der Auseinandersetzung mit der Problemstellung einer Untersuchung und dem Entwickeln eines Untersuchungsplans ist oftmals *Mathematisches Modellieren* (K3) die zentrale Kompetenz, auf die Schüler:innen zurückgreifen müssen (siehe Tabelle 1). Anhand der folgenden Teilaufgabe wird dies deutlich, da Teilkompetenzen des Modellierens gebraucht werden (siehe Beispielaufgabe 2).

Beispielaufgabe 2: „Bistroumfrage“ - Teilaufgabe 2

Ein Ziel der Untersuchung soll es sein, die Wochentage mit dem höchsten Getränkeumsatz herauszufinden. Dazu wird eine Umfrage vor der Eröffnung des Bistros durchgeführt.

Welche Frage passt zum Ziel der Umfrage?

Kreuze eine der folgenden Fragen an.

- ☐ Würdest du im Bistro Getränke kaufen?
- ☐ An welchen Wochentagen würdest du im Bistro einkaufen?
- ☐ Wie viele Getränke würdest du in einer Woche im Bistro kaufen?
- ☐ An welchen Wochentagen würdest du im Bistro Getränke kaufen?

Bei dieser Teilaufgabe ist es die Teilkompetenz *Vereinfachen* des *Mathematischen Modellierens* (K3), die Schüler:innen vordergründig benötigen. Für diese reale Situation – eine statistische Untersuchung zum Kaufverhalten im Schulbistro – müssen Annahmen getroffen werden. Dabei soll die Situation bzw. das Problem *vereinfacht* werden, damit das Ziel der Untersuchung, den Wochentag mit dem höchsten Getränkeumsatz zu finden, erreicht werden kann.

Damit die Situation sinnentnehmend gelesen und verstanden werden kann sowie letztendlich die zugehörige richtige Fragestellung ausgewählt wird, ist die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) notwendig. Die in der Aufgabe formulierten Fragen können als Beispielfragen aufgefasst werden, die Schüler:innen im Rahmen einer eigenen Untersuchung im Unterricht stellen könnten. Würden die Schüler:innen im Unterricht tatsächlich eine eigene Erhebung durchführen oder es würde eine solche Aufgabe thematisiert werden, könnten noch weitere differenzierte Fragestellungen von den Schüler:innen oder durch die Lehrkraft gestellt werden, z.B. „Wie viele Personen müssen befragt werden, sodass die Stichprobe repräsentativ ist?“ oder „Welche Antwortmöglichkeiten sollten angeboten werden?“. Darüber hinaus kann anhand dieser Aufgabe die Notwendigkeit von Daten für diese und vergleichbare Problemstellungen thematisiert werden. Dass gerade die Erhebung von Daten zu einem möglichst objektiven Erkenntnisgewinn beiträgt und so die Fragestellung gewinnbringend für die Klasse beantwortet werden kann, kann entsprechend diskutiert werden.

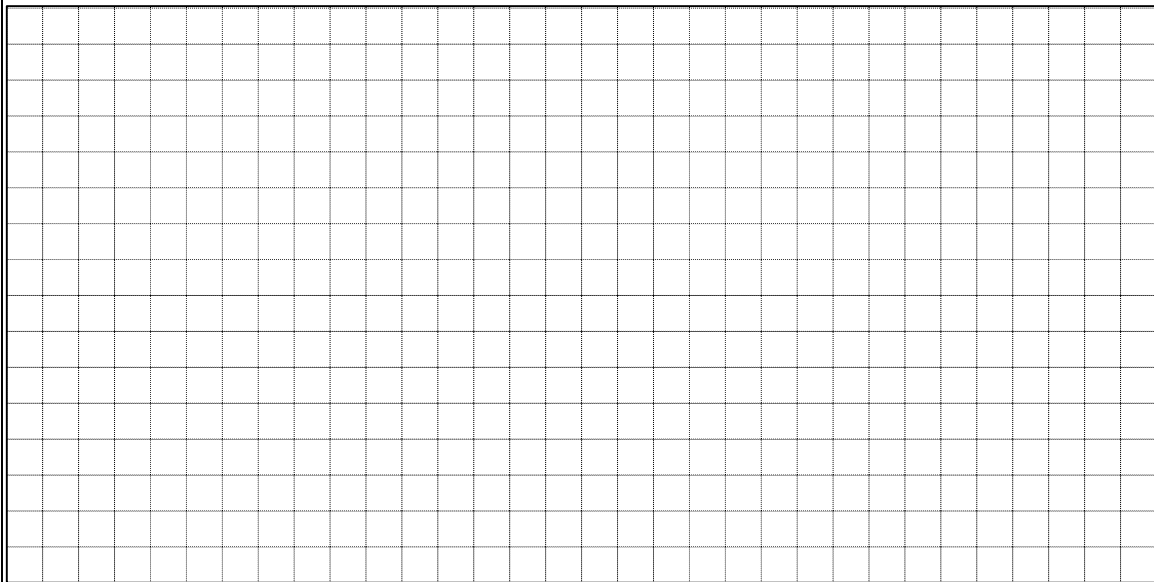
Aufgabenstellungen können auch spätere Phasen einer vollständigen Untersuchung thematisieren und bereits erhobene Daten darstellen. Bei der Aufgabe „Schulkleidung“ in der Beispielaufgabe 3 ist dies der Fall.

Beispielaufgabe 3: „Schulkleidung“ - Teilaufgabe 1

An einer Schule wird über die Einführung einheitlicher Schulkleidung diskutiert. Lisa und Paul haben im Internet eine Studie der Fachhochschule Münster zu diesem Thema gefunden. Dort wurden insgesamt 17 812 Schülerinnen und Schüler befragt.

Auf die Frage „Wärst du bereit, Schulkleidung zu tragen?“ haben 9018 (50,6 %) der Befragten mit „ja“ geantwortet, 8136 (45,7 %) mit „nein“, der Rest hat keine Angaben gemacht.

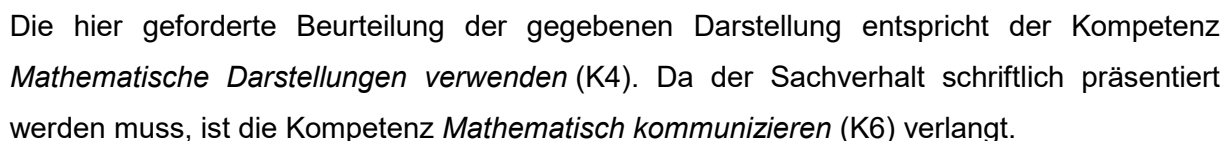
Stelle die Ergebnisse der Befragung („ja“ / „nein“ / „keine Angaben“) in einem Säulendiagramm dar.



In dieser Aufgabe soll eine Darstellung, das Säulendiagramm, erstellt werden. Diese eigenständige Leistung greift auf die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) zurück, da zwischen der symbolisch-numerischen Darstellung im Text zu einer eigenen graphischen Darstellung gewechselt werden muss. Dies erfordert die zielgerichtete Entnahme relevanter Informationen zur Umfrage aus dem Text. Daher ist auch die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) erforderlich. Anhand des erstellten Säulendiagramms kann diagnostiziert werden, ob die Schüler:innen die bedeutsamen Informationen aus dem Text entnehmen und auf die Analysetechnik eines Säulendiagramms zurückgreifen können.

Dass die Daten nicht nur anhand eines Säulendiagramms, sondern auf flexible Weise dargestellt werden können, wird anhand der sich anschließenden Teilaufgabe in Beispielaufgabe 4 deutlich. Dabei wird verdeutlicht, dass solche Repräsentationen der Daten aus unterschiedlichen Perspektiven entstehen, diese aber auch repräsentieren können, wie

Beispielaufgabe 4: „Schulkleidung“ - Teilaufgabe 2



15

Schüler:innen selbst dazu aufgefordert werden, bestimmte meinungsvertretende Darstellungen zu erstellen. Dann kann darüber reflektiert werden, welche Bedeutung der Kontext für die Dateninterpretation hat und ob die flexiblen Darstellungsmöglichkeiten von Daten subjektive Überzeugungen beeinflussen.

3.3 Daten und ihre Interdisziplinarität

Das Schwerpunktthema *Umgang mit Daten* bietet aufgrund seiner Charakteristik viele Möglichkeiten zur Vernetzung mit anderen Fächern an. Der *Umgang mit Daten* stellt nicht nur eine mathematikspezifische Aufgabe dar, sondern betrifft alle weiteren natur- und gesellschaftswissenschaftlichen Fächer. Die Aufgaben einer Mathematiklehrkraft unterscheiden sich aber von denen der Fachkolleg:innen und sind folgendermaßen beschreibbar:

- „Sie [die Mathematiklehrkraft] muss in ihrem Unterricht grundlegende Begriffe, Verfahren sowie Denk- und Arbeitsweisen der Stochastik so vermitteln, dass diese in anderen Fächern verwendet und vertieft werden können.
- Sie muss Koordinator und Berater im Gesamtprozess der Vermittlung stochastischen Wissens und Könnens an ihrer Schule sein.“ (Krüger et al., 2015, S. 5)

Darüber hinaus ermöglicht insbesondere dieses Thema die Verwendung von Auswertungssoftware oder Tabellenkalkulationsprogrammen. Erst durch die Wahl geeigneter Hilfsmittel können auch größere Datenmengen analysiert oder Zufallsversuche vielfach simuliert werden. Damit können die Schüler:innen beispielsweise eigene Vermutungen überprüfen oder das Verstehen von stochastischen Modellen wird durch ein „Erlebarmachen“ erleichtert. Außerdem können graphische Darstellungen auf einfache Weise erstellt werden (Biehler & Engel, 2015; Biehler & Hartung, 2010; Eichler & Vogel, 2013, S. 246ff.; Krüger et al., 2015, S. 230). Wird eine eigenständige Untersuchung im Unterricht durchgeführt, stehen oftmals nicht genügend Daten für eine aussagekräftige Auswertung und Interpretation zur Verfügung. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn sich die Fragestellung nicht nur auf die eigene Klasse, sondern auf eine größere Population beziehen soll. Eine solche Untersuchung könnte dann durch andere öffentliche Daten, z.B. aus dem Schulbuch, dem statistischen Bundesamt oder anderen Medien ergänzt werden (Biehler & Hartung, 2010). Dabei ist zu beachten, dass sich reale Daten von fiktiven Daten unterscheiden können: „Reale Daten in Statistik kommen aus einem Kontext und enthalten Ungewissheit und Fehler, während Daten im traditionellen Mathematikunterricht typischerweise fingiert sind und so gewählt wurden, dass sie exakt zu einem mathematischen Modell passen.“ (Biehler & Engel, 2015, S. 229). Hierbei wird die Variabilität von Daten als ein Aspekt stochastischen Denkens wieder ersichtlich.

Letztendlich ist es das Ziel, dass Schüler:innen mit Daten verantwortungsvoll umgehen können und ein Bewusstsein für die Variabilität und Analysemöglichkeiten, welche unterschiedliche Perspektiven darstellen können, entwickeln. Die ständige Konfrontation durch unterschiedliche Kommunikationsmedien mit Daten im täglichen Leben und einer von Daten geprägten Umwelt kann zu einer Ungewissheit und Unsicherheit bei Entscheidungsprozessen führen (Biehler & Engel, 2015). Ein entsprechender Kompetenzerwerb kann dazu beitragen, dass Schüler:innen solche Prozesse sachgemäß analysieren und interpretieren können.

4 Abschließende Anmerkungen

Die diesjährigen didaktischen Handreichungen beinhalten erneut zwei Themenschwerpunkte aus zwei Leitideen, die als Ergänzungsmodule für die VERA-8 Testung zur Auswahl stehen. Im Bereich der Leitidee *Zahl* ist dies der Schwerpunkt *hilfsmittelfreie Aufgaben*, im Bereich der Leitidee *Daten und Zufall* der Schwerpunkt *Umgang mit Daten*. Aus beiden Themen wurden zentrale Inhalte betrachtet, welche durch die Bildungsstandards vorgegeben werden. Dabei wurde auf besondere Hürden und Möglichkeiten sowohl beim Thema *hilfsmittelfreie Aufgaben* als auch im Themenfeld *Umgang mit Daten* hingewiesen. Für weitere Anregungen für die Unterrichtspraxis sei auf die Kommentare zu den einzelnen Aufgaben in Teil III der didaktischen Handreichungen verwiesen. Zudem wurde aufgezeigt, welche Aufgabenmerkmale mit welchen allgemeinen mathematischen Kompetenzen einhergehen. Für weitere Beispiele und Anregungen stellt die in den vorangegangenen Kapiteln genannte Literatur eine gute Ausgangslage dar.

5 Literaturverzeichnis

- Biehler, R. & Engel, J. (2015). Stochastik: Leitidee Daten und Zufall. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 221–251). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Biehler, R. & Hartung, R. (2010). Leitidee Daten und Zufall. In W. Blum, C. Drücke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen* (S. 51–80). Berlin: Cornelsen.
- Blum, W. (2010). Einführung. In W. Blum, C. Drücke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen* (S. 14–32). Berlin: Cornelsen.
- Eichler, A. & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Greefrath, G. (2018). *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht. Didaktische Perspektiven des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Berlin: Springer Spektrum.
- <https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>
- Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenorth, H.-E. & Vollmer, H. J. (2003). Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. In BMBF (Hrsg.), *Bildungsreform Band 1. Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards: Eine Expertise* (S. 7–174). Berlin.
- KMK (2004): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Beschluss vom 4.12.2003. München: Luchterhand.
- KMK (2005): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss*. Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Luchterhand.
- KMK (2005b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Luchterhand.
- KMK (2015). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012). Köln: Carl Link.
- Krüger, K., Sill, H.-D. & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Leiss, D. & Blum, W. (2010). Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen. In W. Blum, C. Drücke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen* (S. 33–50). Berlin: Cornelsen.
- OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing.
- Vogel, M. & Eichler A. (2010). Leitidee Daten und Zufall in der Sekundarstufe I. In A. Lindmeier & S. Ufer. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 879-882). Münster: WTM-Verlag.
- Wild, C.J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review* 67(3), 223–248.
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* 21(61), 37–46.

6 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: IQB in Anlehnung an KMK, 2015, S. 12	5
--	---

7 Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Biehler & Hartung, 2010; Biehler & Engel, 2015.....	9
---	---

8 Verzeichnis der Beispielaufgaben

Beispielaufgabe 1: „Bistroumfrage“ - Teilaufgabe 1	12
Beispielaufgabe 2: „Bistroumfrage“ - Teilaufgabe 2.....	13
Beispielaufgabe 3: „Schulkleidung“ - Teilaufgabe 1	14
Beispielaufgabe 4: „Schulkleidung“ - Teilaufgabe 2.....	15