



Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten 2020

8. Jahrgangsstufe (VERA-8)

Mathematik – Didaktische Handreichung

Teil II

Fachdidaktische Orientierung

Leitidee *Zahl* und Leitidee

Raum und Form



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	3
2	Bildungsstandards und Kompetenzmodell im Fach Mathematik	3
3	Die Leitidee <i>Zahl</i>	6
3.1	Schwerpunktthema: <i>Anteile</i>	8
3.2	Vorstellungen zum Umgang mit Bruchzahlen entwickeln	11
3.3	<i>Anteile</i> in den VERA-8 Erhebungen	13
4	Die Leitidee <i>Raum und Form</i>	18
4.1	Schwerpunktthema: <i>Ebene Geometrie</i>	19
4.2	Modellieren mit dynamischer Geometriesoftware: Konstruktionsaufgabe	23
4.3	<i>Ebene Geometrie</i> in den VERA-8 Erhebungen	26
5	Abschließende Anmerkungen	30
6	Literaturverzeichnis.....	31
7	Abbildungsverzeichnis	33
8	Tabellenverzeichnis	33
9	Verzeichnis der Beispielaufgaben.....	33

Autorinnen und Autoren der fachdidaktischen Erläuterungen in den Modulen B und C sind Elena Jedtke, Maxim Brnic und Ilja Ay. Die gezeigten Testaufgaben entstanden in Kooperation von Lehrkräften aus zehn Bundesländern und Fachdidaktikerinnen / Fachdidaktikern unter Federführung der Arbeitsgruppe Prof. Greefrath, Universität Münster (fachdidaktische Leitung) und des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen.

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien
auch online finden können?

www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

1 Einleitung

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK, 2003, 2004a, 2004b) mit ihren Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen bilden die Grundlage für die VERgleichsArbeiten in der 8. Jahrgangsstufe (VERA-8) im Fach Mathematik. Daher wird in dieser didaktischen Handreichung zunächst der Aufbau der Bildungsstandards vorgestellt (siehe Abschnitt 2, S. 2). Anschließend werden die beiden zur Wahl stehenden Schwerpunkte der diesjährigen Ergänzungsmodule näher erläutert: die Leitidee *Zahl* mit Fokus auf *Anteile* sowie die Leitidee *Raum und Form* mit Fokus auf *Ebene Geometrie* (siehe Abschnitt 3, S. 5). Dabei wird in beiden Abschnitten ein besonderes Augenmerk auf zentrale Inhalte der Schwerpunktsetzungen gelegt. Es werden Herausforderungen geschildert und Beispiele vorgestellt, wie Lehrkräfte mit diesen in der Unterrichtspraxis umgehen können. Des Weiteren wird insbesondere im Bereich *Ebene Geometrie* aufgezeigt, wie digitale Werkzeuge gewinnbringend in den Unterricht eingebunden werden können. In den dazugehörigen Kapiteln 3 und 4 werden außerdem Aufgaben aus VERA-8 vorgestellt, die jeweils einem der diesjährigen Schwerpunkte beider Leitideen zugeordnet werden können. Es werden in diesem Rahmen Beispiele für Aufgabenformulierungen gezeigt, welche die verschiedenen allgemeinen Kompetenzen adressieren und zudem im Unterricht zur Förderung der Kompetenzen herangezogen werden können.

2 Bildungsstandards und Kompetenzmodell im Fach Mathematik

Im Anschluss an die Ergebnisse großer internationaler Vergleichsstudien – wie etwa der PISA-Studie oder TIMSS – führte die Kultusministerkonferenz (KMK) ab dem Jahr 2003 Bildungsstandards für die Fächer Deutsch, Mathematik und die erste Fremdsprache (Englisch/Französisch) ein¹. Dies sollte Zielklarheit in Bezug auf die von Schülerinnen und Schülern zu erreichenden Kompetenzen in diesen Fächern schaffen sowie eine Überprüfung des Erreichten ermöglichen (Blum, Drüke-Noe, Hartung & Köller, 2010, S. 14–16). So sollte der Übergang von einer sehr stark inputorientierten Steuerung im Bildungswesen zu einer Kombination aus Input- und Output-Steuerung erreicht werden. Die zentrale Idee dabei war es, Kriterien festzulegen, die eine länderübergreifende Standardsetzung ermöglichen. Dadurch soll die Leistung von Lernenden bzw. Lerngruppen über die Grenzen eines Bundeslandes hinaus vergleichbar erfasst werden können. Zu diesem Zweck greifen die Bildungsstandards allgemeine Bildungsziele auf und benennen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe an zentralen Inhalten erworben haben sollen (KMK, 2003, 2004a).

¹ <https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>

Den Bildungsstandards für das Fach Mathematik liegt der Anspruch zu Grunde, den Mathematikunterricht allgemeinbildend zu gestalten. Dabei wird davon ausgegangen, dass ein allgemeinbildender Mathematikunterricht Schülerinnen und Schülern die folgenden drei Grunderfahrungen ermöglicht (Winter, 1995, S. 37):

- (1) *Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,*
- (2) *mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,*
- (3) *in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.*

Eingedenk dieser drei Grunderfahrungen wurde das Kompetenzmodell im Fach Mathematik entwickelt, welches im Folgenden erläutert wird. Das Kompetenzmodell ergibt sich nicht allein aus der Fachsystematik, sondern ist ausgerichtet an Lernprozessen und Phänomenen mathematischen Handelns im Unterricht und im Alltag. Es werden in diesem Modell zunächst die folgenden drei Dimensionen unterschieden (siehe Abbildung 1):

1. *Allgemeine mathematische Kompetenzen*
2. *Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen, strukturiert nach Leitideen und*
3. *Anforderungsbereiche.*

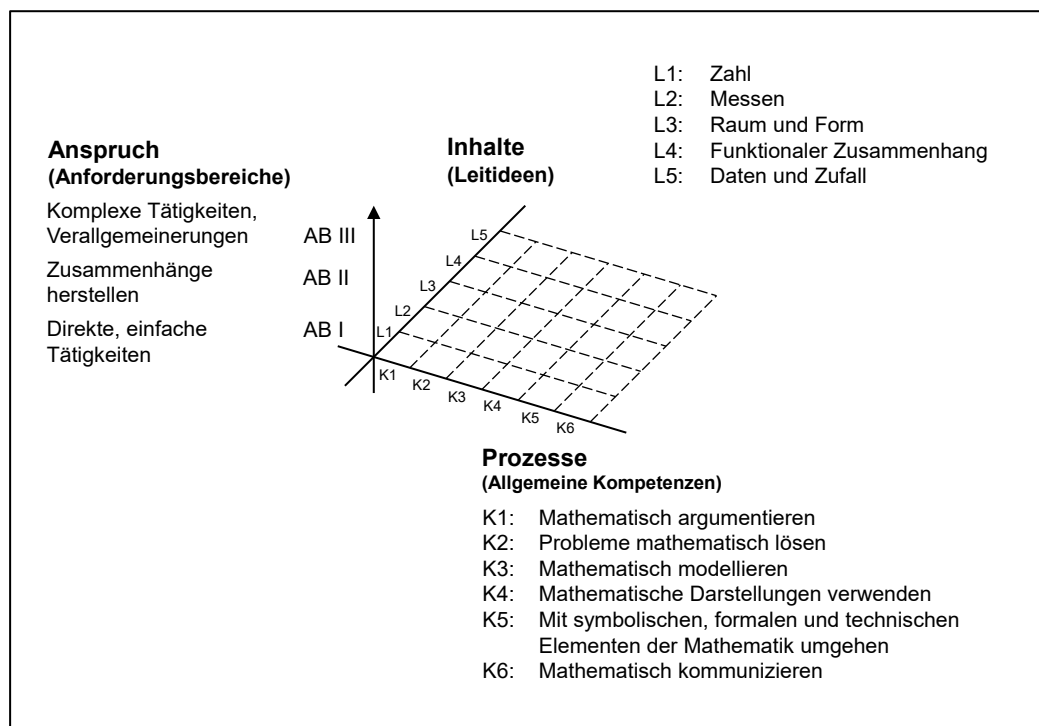


Abbildung 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards

Die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* bilden die Prozessdimension des Modells und beschreiben, auf welche Art mathematische Inhalte bearbeitet werden. Im Einzelnen sind dies die Kompetenzen mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) und mathematisch kommunizieren (K6). Diese allgemeinen mathematischen Kompetenzen sind differenziert zu betrachten, obwohl sie im Verbund erworben und angewendet werden können, d. h. bei der Bearbeitung eines mathematischen Gegenstands oft mehrere dieser Kompetenzen benötigt werden. Mit der getrennten Betrachtung ist zum einen die Absicht verbunden, spezifische Eigenschaften und Anforderungen von Aufgaben im Mathematikunterricht transparent zu machen. Dies ermöglicht es, den Mathematikunterricht differenzierter zu planen. Ein mathematischer Inhalt kann den Schülerinnen und Schülern dann z. B. entlang verschiedener, durchzuführender Tätigkeiten zugänglich gemacht werden. Zum anderen ermöglicht die getrennte Betrachtung von allgemeinen mathematischen Kompetenzen es, Schülerleistungen differenzierter zu analysieren und so gezieltere Diagnosen zu stellen.

Die zweite Dimension des Modells, d. h. die *inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen*, bilden fünf *Leitideen*. Diese fünf Leitideen sind Zahl (L1), Messen (L2), Raum und Form (L3), Funktionaler Zusammenhang (L4) und Daten und Zufall (5). In den Bildungsstandards wird dazu erläutert: „Eine Leitidee vereinigt Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete und durchzieht ein mathematisches Curriculum spiralförmig. Die Zuordnung einer inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz zu einer mathematischen Leitidee ist nicht in jedem Fall eindeutig, sondern davon abhängig, welcher Aspekt mathematischen Arbeitens im inhaltlichen Zusammenhang betont werden soll.“ (KMK, 2003, S. 18). Mit den Leitideen ist die Absicht verbunden, Phänomene mathematischer Tätigkeiten zu beschreiben (Freudenthal, 1983). Diese Leitideen stehen zwar mit Fachgebieten der Mathematik in Verbindung, sind mit diesen jedoch nicht identisch. Mit ihnen wird versucht zu fassen, welche mathematischen Mittel zum Einsatz kommen, wenn eine Situation oder ein Problem im Mathematikunterricht angegangen wird. In der Konsequenz bedeutet das, dass alle Leitideen gleichberechtigt nebeneinanderstehen. Auch wenn der Aufbau eines an die Fachsystematik anschlussfähigen konzeptuellen Systems Ziel des Mathematikunterrichts sein soll, sind die Leitideen und auch die inhaltsbezogenen Kompetenzen, welche zu den einzelnen Leitideen gehören, nicht zuallererst der Fachsystematik verpflichtet. Es ergibt sich aus ihnen keine Hierarchie, wie es beispielsweise in einem axiomatisch aufgebauten Fachgebiet der Mathematik der Fall wäre. Weiterhin folgen die Leitideen auch nicht einem fachdidaktischen Aufbau im Sinne einer zeitlichen Abfolge im Lernprozess („erst kommt das Zählen, dann kommt das Messen, usw.“). Sie erlauben es, bestimmte mathematische Phänomene unter einer Kategorie, d. h. einer

Leitidee, zusammenzufassen. Leitideen können als fundamentale Ideen aufgefasst werden (vgl. Schwill, 1993), die im Mathematikunterricht auf jedem intellektuellen Niveau vermittelt werden können und in verschiedenen Gebieten eines Inhaltsbereichs vielfältig anwendbar sind.

Die dritte und letzte Dimension des Kompetenzmodells der Bildungsstandards bilden drei *Anforderungsbereiche*. Anforderungsbereiche beschreiben unterschiedliche Niveaus, auf denen eine bestimmte allgemeine Kompetenz zur Bearbeitung einer mathematischen Aufgabe benötigt wird. Es werden dabei in der Regel drei Anforderungsbereiche unterschieden. Mit dem Anforderungsbereich I werden Anforderungen an allgemeine Kompetenzen beschrieben, die zum Reproduzieren unterrichtlicher Inhalte befähigen. Zum Anforderungsbereich II zählen solche Anforderungen an allgemeine Kompetenzen, die es Schülerinnen und Schülern ermöglichen Zusammenhänge herzustellen und Gelerntes anzuwenden. In den Anforderungsbereich III gehören diejenigen Anforderungen, die es Schülerinnen und Schülern erlauben zu verallgemeinern und zu reflektieren.

Alle Bestandteile des Kompetenzmodells sind zentrale Punkte der Bildungsstandards und stehen gleichwertig nebeneinander. Im Folgenden werden ein spezieller Aspekt der Leitidee *Zahl* sowie ein Aspekt aus der Leitidee *Raum und Form* herausgegriffen und erläutert. Dies bedeutet jedoch nicht, dass andere Bestandteile der Bildungsstandards diesem Aspekt in irgendeiner Weise nachstehen. Insbesondere die verstärkte Orientierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinen mathematischen Kompetenzen (Prozessdimension des Kompetenzmodells) ist eine Errungenschaft der Bildungsstandards, die auch bei der gesonderten Betrachtung einer Leitidee nicht in Vergessenheit geraten darf.

3 Die Leitidee *Zahl*

In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss werden unter der Leitidee *Zahl* verschiedene inhaltsbezogene Kompetenzen zusammengefasst. Diese lauten (KMK, 2003, S. 10):

Die Schülerinnen und Schüler

- *nutzen sinntragende Vorstellungen von rationalen Zahlen, insbesondere von natürlichen, ganzen und gebrochenen Zahlen entsprechend der Verwendungsnotwendigkeit,*
- *stellen Zahlen der Situation angemessen dar, unter anderem in Zehnerpotenzschreibweise,*
- *begründen die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen an Beispielen,*
- *nutzen Rechengesetze, auch zum vorteilhaften Rechnen,*
- *nutzen zur Kontrolle Überschlagsrechnungen und andere Verfahren,*

- *runden Rechenergebnisse entsprechend dem Sachverhalt sinnvoll,*
- *verwenden Prozent- und Zinsrechnung sachgerecht,*
- *erläutern an Beispielen den Zusammenhang zwischen Rechenoperationen und deren Umkehrungen und nutzen diese Zusammenhänge,*
- *wählen, beschreiben und bewerten Vorgehensweisen und Verfahren, denen Algorithmen bzw. Kalküle zu Grunde liegen,*
- *führen in konkreten Situationen kombinatorische Überlegungen durch, um die Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten zu bestimmen,*
- *prüfen und interpretieren Ergebnisse in Sachsituationen unter Einbeziehung einer kritischen Einschätzung des gewählten Modells und seiner Bearbeitung.*

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss beinhalten zur Leitidee *Zahl* weitestgehend dieselben inhaltsbezogenen Kompetenzen (KMK, 2004a). Dort wird allerdings dem (Kopf-)Rechnen noch eine größere Rolle zugeschrieben, wohingegen zum Beispiel Begründungen zur Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen nicht gefordert werden. Auch ohne die explizite Nennung der Notwendigkeit für Zahlbereichserweiterungen nehmen diese eine zentrale Stellung im Rahmen der Leitidee *Zahl* und im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I ein (Hefendehl-Hebeker & Prediger, 2006; Hefendehl-Hebeker & Schwank, 2015). Die Schülerinnen und Schüler sollen ein Verständnis dafür entwickeln, was natürliche, rationale und später auch reelle Zahlen ausmachen und wieso die sukzessive Erweiterung des Zahlbereichs im Laufe der Schulzeit sinnvoll ist. Hefendehl-Hebeker und Schwank (2015) geben fünf Leitfragen an, die in diesem Kontext als Orientierung dienen können. Die erste Leitfrage bezieht sich auf die *Erscheinungsform* der Zahlen, das heißt wie sich beispielsweise rationale Zahlen von natürlichen Zahlen unterscheiden. Außerdem sei es wichtig zu hinterfragen, welche Art von *Phänomenen* mithilfe der Zahlen beschrieben werden können und welche neuen *Verständigungsmöglichkeiten* entstehen. Bezogen auf das gewählte Beispiel von natürlichen und rationalen Zahlen beinhaltet dies auf der phänomenologischen Ebene unter anderem die Beschreibbarkeit von Verteilungsprozessen („Luisa bekommt $\frac{1}{8}$ des Kuchens, Emil bekommt $\frac{1}{4}$ davon und Fabienne die restlichen $\frac{5}{8}$.“). Die beiden letzten aufgeworfenen Fragen betreffen zum einen die Anwendbarkeit von (bekannten) Rechenoperationen und möglicherweise notwendige Adaptionen. Zum anderen wird die Frage gestellt, welche arithmetischen Spielräume sich durch die Zahlbereichserweiterung ergeben.

In den folgenden drei Unterkapiteln werden *Anteile* und damit die Zahlbereichserweiterung von den natürlichen zu den positiven rationalen Zahlen genauer in den Blick genommen. Dabei wird zunächst dargestellt, wie *Anteile* im Laufe der Schulzeit thematisiert werden. Einen weiteren wichtigen Aspekt stellen die (Grund-)Vorstellungen von *Anteilen* (im Rahmen der Bruchrechnung) dar, die Schülerinnen und Schüler aufbauen sollen. Nach den

allgemeinen Erläuterungen wird exemplarisch erörtert, wie die Zahlbereichserweiterung der natürlichen zu den positiven rationalen Zahlen (Bruchzahlen) sinnstiftend vermittelt werden kann. Schließlich werden VERA-8 Aufgaben vorgestellt, die die Vorstellungen zu *Anteilen* abprüfen. Dabei wird insbesondere darauf eingegangen, welche allgemeinen Kompetenzen neben adäquaten Grundvorstellungen zur Lösung der Aufgaben benötigt werden.

3.1 Schwerpunktthema: *Anteile*

In der Grundschule wird der Fokus auf die natürlichen Zahlen gelegt und die Schülerinnen und Schüler sollen zunächst ein elementares Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems der positiven Zahlen bis 1 000 000 und der vier Grundrechenarten aufbauen (KMK, 2004b).

In der Sekundarstufe I wird dieses Verständnis vertieft und erweitert (KMK, 2003, 2004a). Relativ zu Beginn der Sekundarstufenzeit erfolgt in der Regel die erste Zahlbereichserweiterung der natürlichen zu den positiven rationalen Zahlen (Padberg & Wartha, 2017). Mit Einführung von Brüchen werden *Anteile* im Mathematikunterricht erstmalig differenzierter in den Blick genommen². So gibt es verschiedene Grundvorstellungen zu Brüchen, die sich (mindestens)³ in die beiden Kategorien „Bruch als Anteil“ und „Bruch als Operator“ aufteilen lassen (vgl. Abbildung 2), wobei die erste Kategorie den heutigen Mathematikunterricht dominiert (Padberg & Wartha, 2017).

Anteile spielen auch in späteren Themen der Sekundarstufe eine wichtige Rolle. Im Bereich der Leitidee *Zahl* betrifft das insbesondere die Prozentrechnung sowie die Zinsrechnung. Beide Themen können als spezielle Anwendungsgebiete der Bruchrechnung gesehen werden (Gellner, 2011; Zech, 1995). Für beide Themen stellen daher der Anteilsbegriff sowie die Bruchrechnung wichtige Lernvoraussetzungen dar, weshalb diesen unter anderem ein besonderer Stellenwert beigemessen wird (Padberg & Wartha, 2017; Wessel, 2015).

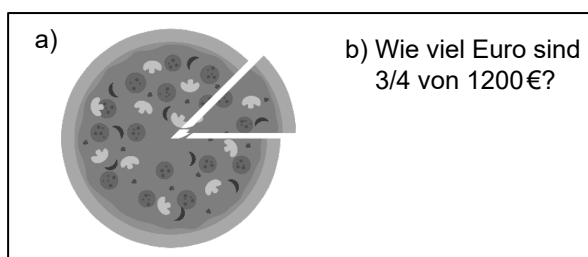


Abbildung 2: Grundvorstellungen zu Brüchen: a) *Bruch als Anteil:* Ein Pizzastück als Visualisierung der "Teil eines Ganzen"-Vorstellung, b) *Bruch als Operator:* Diese Grundvorstellung wird auch „Anteil-von“-Vorstellung genannt, z. B. einen Anteil von einem Geldbetrag berechnen.

² Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass auch in der Grundschule, zum Beispiel im Rahmen der Kombinatorik, schon der Begriff der Anteile intuitiv vorbereitet wird.

³ Vgl. Wartha und Güse (2009, S. 263): „In der Literatur finden sich zahlreiche Aufzählungen an Interpretationen von Bruchzahlen“. Beispielsweise werden diese diskutiert von Malle (2004).

Der zuvor erwähnte Übergang von den natürlichen Zahlen zu den (positiven) rationalen Zahlen – und damit zu Brüchen – ist mit Grundvorstellungsumbrüchen verbunden, was diese Zahlbereichserweiterung zu einer besonderen Herausforderung werden lässt (Tabelle 1; vgl. Wartha & Güse, 2009; Winter, 1999). Grundvorstellungen bezeichnen allgemein inhaltliche Deutungen zu mathematischen Begriffen, die diesen Sinn geben können. Sie sollen dazu befähigen, Operationen auf der Vorstellungsebene durchzuführen und mathematische Begriffe in realen Kontexten zu verwenden (Vom Hofe, 1992). Ein Ziel des Mathematikunterrichts sollte die Vermittlung mehrerer Grundvorstellungen sein, damit die Schülerinnen und Schüler dazu befähigt werden, sich umfassend und flexibel mit einem Begriff oder einem Sachverhalt zu beschäftigen und diesen anzuwenden (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016). Für die Grundvorstellung eines Bruches als *Anteil* werden zweiuntergeordnete Grundvorstellungen genannt, bei denen ein Bruch als *Teil eines Ganzen* oder als *Teil mehrerer Ganzer* verstanden wird (Padberg & Wartha, 2017). Ein Bruch als *Teil eines Ganzen* stellt die intuitivere Vorstellung dar. Häufig werden geometrische Objekte genutzt, um „das Ganze“ zu visualisieren und anschaulich in Teilstücke teilen zu können (vgl. Abbildung 2). Dies kann sowohl auf ikonischer Ebene, durch Zeichnungen, als auch auf enaktiver Ebene, durch Falten von Papier, geschehen. Zu beachten ist hierbei, dass den Schülerinnen und Schülern vermittelt wird, dass es nicht zum Beispiel „das Drittel“ gibt, sondern unterschiedliche „Ganze“ auch verschiedene Drittel-Flächen ergeben können (vgl. Abbildung 3).

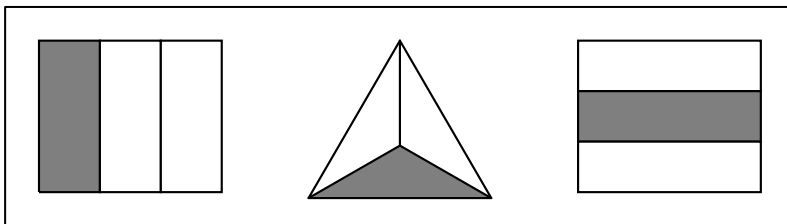


Abbildung 3: Visualisierungen verschiedener „Drittel-Flächen“

Die Vorstellung eines Bruchs als *Teil mehrerer Ganzer* stellt eine größere Herausforderung dar. Den Schülerinnen und Schülern muss vermittelt werden, dass eine Kombination mehrerer Teile „das Ganze“ darstellen kann (vgl. Abbildung 4). Bei der „Teil mehrerer Ganzer“-Vorstellung steht dabei eine *gerechte* Aufteilung im Fokus. Es geht also „um die explizite Betrachtung *mehrerer identischer* Ganzer, etwa drei gleich große[r] Pizzen, drei[er] Tüten mit je acht Bonbons, drei identisch unterteilte[r] Rechtecke“ (Reinhold, 2019).⁴

Es kann eingängig verdeutlicht werden, dass es eine Vielzahl an Möglichkeiten gibt, Anteile mehrerer Ganzer zu verteilen. In dem Kontext aus Abbildung 4 könnte man zum Beispiel die Frage stellen:

„Wie viel Pizza bekommen drei Personen, wenn vier Pizzen gerecht verteilt werden sollen?“.

⁴ Eine diskrete Menge mehrerer zum Beispiel geometrischer Objekte, die nicht gerecht verteilt werden soll, würde der Grundvorstellung „Teil eines Ganzen“ zugeordnet werden, wobei „das Ganze“ erkannt werden muss als aus mehreren Teilen bestehende, diskrete Menge (Reinhold, 2019).

Es gibt es auch innerhalb gerechter Anteilsbestimmungen sehr viele verschiedene Verteilmöglichkeiten. Im Beispiel könnte man in diesem Sinne jeder Person etwas von jeder Pizza geben oder die Pizzen nacheinander verteilen, so dass nicht zwingend jeder etwas von allen Pizzen erhält.

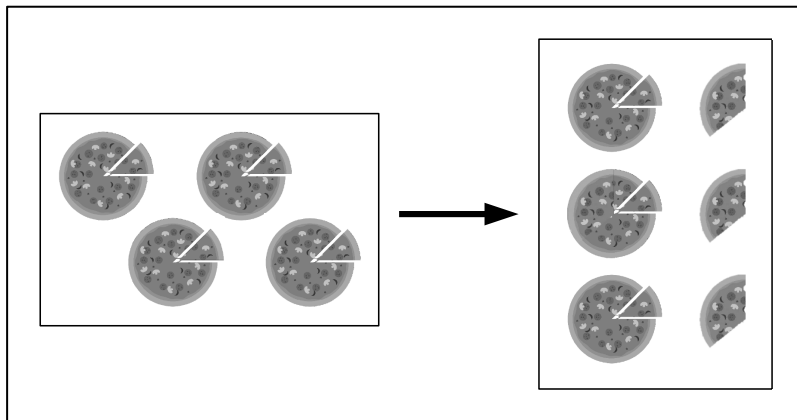


Abbildung 4: Das „Ganze“ kann auch aus mehreren Ganzen bestehen. Anschaulich dargestellt zum Beispiel durch vier Pizzen, die gerecht verteilt werden sollen.

In Tabelle 1 werden Umbrüche von den natürlichen zu Bruchzahlen dargestellt (Hefendehl-Hebeker & Prediger, 2006). Sie werden dabei in zwei Kategorien zu Grundvorstellungen – zu den Zahlen bzw. zu den Rechenoperationen – sowie in Umbrüche in den Bereichen der Zahldarstellung und der Ordnungsrelationen aufgeteilt. Im Rahmen der Grundvorstellungen von Zahlen werden, neben der Betrachtung von *Anteilen*, noch andere Interpretationen von Bruchzahlen aufgeführt, die durchaus relevant sind, aufgrund der hiesigen Fokussierung auf *Anteile* an dieser Stelle jedoch nicht weiter ausgeführt werden.

Tabelle 1: Übersicht zu Umbrüchen in den Vorstellungen zu Zahlen und Operationen bei der Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Q}^+$

	Natürliche Zahlen	Bruchzahlen
Grundvorstellungen zu den Zahlen	Beschreiben in erster Linie Anzahlen, Ordnungszahlen, auch als Rechenzahlen verwendet	Dienen zur Beschreibung von Anteilen eines Ganzen, Verteilsituationen, multiplikativen Vergleichen, relativen Anteilen, Verhältnissen
Zahldarstellung	Eindeutige Zuordnung eines Zahlzeichens im dezimalen Stellenwertsystem, basierend auf der Idee der Zehnerbündelung	Darstellung nicht eindeutig: eine Bruchzahl kann durch unendlich viele Brüche oder eine Dezimalzahl oder Prozentzahl dargestellt werden
Ordnungsrelation	Interpretiert als „weniger als“ (Anzahlen) bzw. „früher als“ (Ordnungszahlen) Jede Zahl hat eindeutigen Nachfolger	Interpretation als „weniger als“ unproblematisch Rechnerische Ausführung schwieriger als Interpretation Kein eindeutiger Nachfolger, da Brüche dicht liegen

Grundvorstellungen für Operationen	Addition: Hinzufügen, Zusammenfügen Subtraktion: Wegnehmen, Vermindern Multiplikation: fortgesetztes Hinzufügen Division: Verteilen, Einteilen	Addition und Subtraktion bleiben der Vorstellung nach gleich, der Einfachheit der Vorstellung entspricht keine vergleichbare Einfachheit der Durchführung Multiplikation und Division mit eingeschränkten und modifizierten Interpretationen, rechnerische Ausführung einfach Neue Ordnungseigenschaften für Multiplikation/Division
------------------------------------	---	---

Aus der Tabelle geht hervor, dass es eine Vielzahl an Diskontinuitäten in anderen Bereichen gibt, die die Zahlbereichserweiterung zu einer Herausforderung machen. Insbesondere gilt dies für die Uneindeutigkeit der Zahldarstellungen von Brüchen und eine Variation des Verständnisses der Multiplikation und Division (vgl. Tabelle 1). Allen drei Umbrüchen sollte daher bei der Einführung von Bruchzahlen im Mathematikunterricht besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden (Padberg & Wartha, 2017). Prediger (2006) schlägt in diesem Kontext ein vorstellungsorientiertes Vorgehen vor, welches im nächsten Abschnitt näher betrachtet wird.

3.2 Vorstellungen zum Umgang mit Bruchzahlen entwickeln

Statt die Gleichwertigkeit verschiedener Brüche formal durch das Erweitern und Kürzen von Brüchen einzuführen, empfiehlt Prediger (2006) die *Uneindeutigkeit der Zahldarstellung* bei Brüchen vorab als inhaltliches Konzept aufzubauen. Dafür schlägt sie einen sechsschrittigen Lernweg vor, bei dem das rechnerische Erweitern und Kürzen entdeckend erfahrbar gemacht werden soll:

„Lernende...

1. ... entdecken, dass es unterschiedliche Brüche gibt, die denselben Anteil oder eine verwandte Verteilungssituation beschreiben. Diese Brüche nennen wir gleichwertige Brüche.
2. ... erklären in unterschiedlichen inhaltlichen Deutungen, wieso zwei Brüche gleichwertig sind [...].
3. ... finden zu einer Bruchzahl möglichst viele gleichwertige Brüche.
4. ... entdecken das Erweitern und Kürzen als Möglichkeit, auf der rechnerischen Ebene sehr schnell gleichwertige Brüche zu finden.
5. ... gewinnen Vertrauen in den Kalkül durch mehrmaliges Überprüfen, dass die inhaltliche und die formale Ebene zusammenpassen. (Erhalte ich durch Kürzen wirklich gleichwertige Brüche?)
6. Nochmalige Deutung des Kalküls auf der inhaltlichen Ebene: Erweitern lässt sich deuten als Verfeinern von Anteilen, Kürzen als Vergröbern“. (Prediger, 2006, S. 9)

Die Schülerinnen und Schüler lernen auf diesem Wege zunächst auf ikonischer und auf enaktiver Ebene die Gleichwertigkeit von Brüchen kennen. Anschließend werden auf verständnisorientierter Ebene Erklärungen für verschiedene (Sach-)Situationen gesucht, um später auf formaler Ebene das Kürzen und Erweitern von Brüchen als sinnvolle rechnerische Methode und sogar Erleichterung des Erkennens von Vielfachen wahrzunehmen. Dabei sollte auch nach Einführung und Üben des Kalküls nicht vergessen werden, die inhaltliche – verständnisorientierte – Ebene zu betonen.

Im Bereich der *Multiplikation von Brüchen* bedingen sich laut Prediger (2006) gleich mehrere Herausforderungen durch inhaltliche Vorstellungen, die die Schülerinnen und Schüler bis dato zur Multiplikation verinnerlicht haben. Dies betrifft zum einen die Vorstellung der Multiplikation als „mehr werden“, als „fortgesetztes Hinzufügen“, wie es im Abschnitt zuvor in Tabelle 1 genannt wurde. Dass die Multiplikation zweier Brüche eine Zahl ergeben kann, die kleiner ist als beide Brüche, widerspricht dieser – für natürliche Zahlen durchaus korrekten – Vorstellung. Ein Umdenken und die Erweiterung der Vorstellungen zur Multiplikation als „Anteil-Nehmen“ sind notwendig. Zum anderen kann es problematisch sein, wenn die Grundvorstellung des Bruchs als Anteil, wie sie eben geschildert wurde, im Vergleich zu der eines Bruchs als Operator zu sehr überbetont wird. Die Operatorvorstellung findet sich in der Literatur oft umschrieben als „Von-Ansatz“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 20). Hierbei wird ein Bruch dazu genutzt, um multiplikative Handlungsweisen, die auf Größen angewendet werden, in Kürze zu beschreiben (Padberg & Wartha, 2017; vgl. Abbildung 2b). Bei der Multiplikation von Brüchen ist es notwendig beide Vorstellungen zu kombinieren und einen der Brüche als Operator, den anderen als Anteil von diesem Operator zu verstehen. Die Rechnung $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ soll demnach so verstanden werden, dass die Hälfte von $\frac{2}{3}$ genau $\frac{1}{3}$ ergibt. Diese Betrachtung vereinfacht die Plausibilität von $\frac{1}{3} < \frac{2}{3}$ als Lösung der Rechnung, da das oben beschriebene Umdenken hin zur Multiplikation als „Anteil-Nehmen“ geschehen kann. Prediger (2006) schlägt auch im Rahmen der Multiplikation vor, nicht kalkül- sondern verständnisorientiert vorzugehen. Wird zunächst vermittelt, dass bei der Multiplikation zweier Brüche „Anteile von Anteilen“ gebildet werden, so können – wie schon bei dem Erweitern und Kürzen von Brüchen – die „formale[n] Rechenregeln als hilfreiche Verkürzungen eines bereits durchdrungenen Vorgehens“ erfasst und gewürdigt werden (Prediger, 2006, S. 9). Ebenso parallel zu dem eben geschilderten Vorgehen bieten sich für das Entdecken der Multiplikationsregeln enaktive und ikonische Darstellungen an. Die Schülerinnen und Schüler können zum Beispiel ikonisch durch passende Zeichnungen selbst auf die Multiplikationsregel „Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner“ kommen.

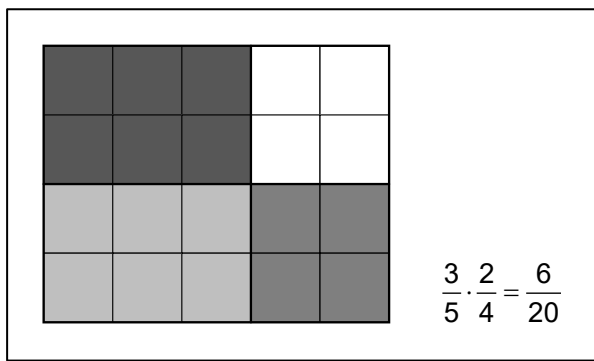


Abbildung 5: Ikonische Darstellung der Multiplikation zweier positiver Bruchzahlen

Dabei kann auf bekannte Operationen aus dem Bereich der Geometrie, wie die Berechnung von Flächeninhalten zurückgegriffen werden, um den Multiplikationsbegriff auch wirklich auf der Vorstellungsebene zu erweitern (vgl. Abbildung 5).

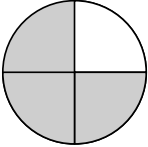
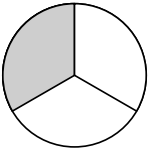
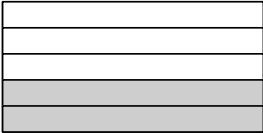
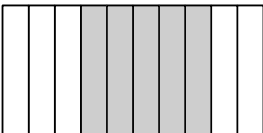
3.3 Anteile in den VERA-8 Erhebungen

Auf den vorangehenden Seiten wurden insbesondere verschiedene (Grund-)Vorstellungen zu Anteilen thematisiert. In diesem Abschnitt werden exemplarisch Aufgaben der vergangenen VERA-8 Erhebungen vorgestellt, die sich mit diesem Lerngegenstand beschäftigen. Um den Fokus an dieser Stelle auch auf die allgemeinen Kompetenzen zu lenken, wird erläutert, welche der sechs Kompetenzen jeweils für die Beantwortung der Aufgabe wie benötigt werden. Diese Ausführungen zeigen gleichzeitig Möglichkeiten auf, durch welche Art von Aufgabenstellungen die sechs Kompetenzen im Mathematikunterricht gefördert werden können. Es ist jedoch nicht möglich, an dieser Stelle die ganze Bandbreite der prozessbezogenen Kompetenzen vorzustellen. Dafür sei auf die einschlägige Literatur verwiesen (z. B. Blum et al., 2010).

Beispielaufgabe 1: „Anteile in geometrischen Objekten“

Welche Anteile sind grau gefärbt?

Trage jeweils einen passenden Bruch und einen passenden Prozentsatz in die Tabelle ein.

	gefärbter Anteil als Bruch	gefärbter Anteil als Prozentsatz
	$\frac{3}{4}$	75 %
		
		
		

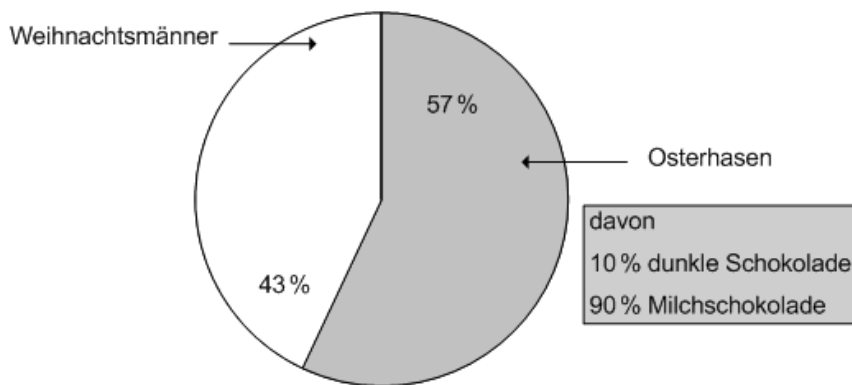
Die Aufgabe „Anteile in geometrischen Objekten“ spricht auf inhaltlicher Ebene klar die Grundvorstellung von Bruchzahlen als *Teil eines Ganzen* an (Beispielaufgabe 1). Es werden unterschiedliche „Ganze“ angeboten, die den Schülerinnen und Schülern aufzeigen, dass es kein starres „Ganzes“ gibt, sondern verschiedene Visualisierungen möglich sind. Neben der Angabe des gefärbten Anteils der Figuren als Bruch, wird auch die Angabe des Prozentsatzes gefordert. Um rechnerisch auf die Lösung zu kommen rechnen die Schülerinnen und Schüler in der ersten Zeile zum Beispiel $\frac{3}{4} \cdot 100 \% = 75 \%$. Dabei stellt die Multiplikation ein Anteil-Nehmen dar, wie es bei dem Aufbau von Vorstellungen zur Multiplikation von Brüchen vermittelt werden sollte. Auf Ebene der allgemeinen Kompetenzen werden bei dieser Aufgabe die Kompetenzen „K4: mathematische Darstellungen verwenden“ und „K5: mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ angesprochen. Es gilt den Darstellungen von geometrischen Objekten die Information zu entnehmen, in wie viele Teilobjekte sie eingeteilt sind und wie viele davon eingefärbt wurden (K4). Diese Information soll übertragen werden auf eine Bruchzahl, bei welcher der Nenner aus der Anzahl der gleich großen Teilobjekte besteht und der Zähler aus den davon eingefärbten Teilen. Die eingefärbte Fläche soll zudem als prozentualer Anteil am Ganzen angegeben werden (K5).

Beispielaufgabe 2: „Schokoladenfiguren“

In der Zeitung war über die Produktion von Schokoladenfiguren zu lesen:

„Der Osterhase liegt deutlich vor dem Weihnachtsmann:
Schätzungsweise 100 Millionen Hasen wurden im Jahr 2008 zum Osterfest produziert.“

Das Kreisdiagramm zeigt die Anteile der Weihnachtsmänner und Osterhasen an der Produktion dieser Schokoladenfiguren.



Teilaufgabe 1

Gib die ungefähre Anzahl der Osterhasen aus dunkler Schokolade an.

Ergänze dazu den folgenden Satz.

Etwa _____ Osterhasen waren aus dunkler Schokolade.

Teilaufgabe 2

Wie viele Schokoladenfiguren insgesamt (Osterhasen und Weihnachtsmänner) wurden etwa produziert?

Kreuze an.

☐

100 Millionen

☐

125 Millionen

☐

150 Millionen

☐

175 Millionen

☐

200 Millionen

Auf inhaltlicher Ebene wird bei der Aufgabe „Schokoladenfiguren“ gefordert, die beiden Begriffe *Anteil* und *Anzahl* voneinander abzugrenzen (Beispielaufgabe 2). Die *Anteile* der Schokoladenfiguren werden in dem Kreisdiagramm prozentual angegeben. In dem Zeitungstext wird hingegen die *Anzahl* Schokoladenosterhasen angegeben. In beiden Teilaufgaben werden *Anzahlen* als Antworten erwartet. Zur Beantwortung der ersten Frage müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die *Anzahl* „100 Millionen Hasen“ dem Text entnommen werden kann und der *Anteil* „10 % dunkle Schokolade“ aus der Beschreibung des Diagramms. Hier wird ein Verständnis der Multiplikation als „Anteil-Nehmen“ benötigt. Für die zweite Teilaufgabe ist ein Kreisdiagramm als Visualisierung der gesamten Schokoladenfigur-Produktion angegeben. Die Schülerinnen und Schüler können über verschiedene Strategien zu der korrekten Lösung von Teilaufgabe 2 kommen. Sie können die Aufgabe zum Beispiel in Teilprobleme zerlegen. Aus dem Text sowie dem Kreisdiagramm kann geschlossen werden, dass 100 Millionen Schokoladenosterhasen 57 %

der gesamten Schokoladenfigur-Produktion darstellen. In einem ersten Schritt kann berechnet werden, wie viele Schokoladenweihnachtsmänner dann 43 % der gesamten Produktion ausmachen. In einem zweiten Schritt können beide Anzahlen addiert werden, womit näherungsweise die Lösung „175 Millionen Schokoladenfiguren“ erhalten wird. Alternativ können die Schülerinnen und Schüler direkt die 57 % Schokoladenosterhasen auf 100 % Schokoladenfigur-Produktion hochrechnen, da keine weiteren Figuren außer Osterhasen und Weihnachtsmänner beachtet werden ($\frac{100 \text{ Mio.}}{\frac{57}{100}} = \frac{100 \text{ Mio.}}{57} \cdot 100 \approx 175 \text{ Mio.}$). In dieser Teilaufgabe wird die allgemeine Kompetenz „K2: Probleme mathematisch lösen“ angesprochen. Die Schülerinnen und Schüler können mit mehr als einer Strategie zu dem gesuchten Ergebnis kommen, wobei nicht direkt ersichtlich ist, wie dies geschehen kann (der Weg ist zunächst unklar). Die Schülerinnen und Schüler können das Problem zum Beispiel in mehrere Teilprobleme zerlegen (erstes, zweischrittiges Beispiel) oder auch die heuristische Strategie „Vorwärtsarbeiten“ anwenden (zweites Beispiel). In beiden Teilaufgaben werden zudem die prozessbezogenen Kompetenzen „K4: mathematische Darstellungen verwenden“, „K5: mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ und „K6: mathematisch kommunizieren“ angesprochen. Es müssen Informationen aus einem Kreisdiagramm und aus einem mathematikhaltigen Text entnommen werden und die Begriffe *Anteil* und *Anzahl* korrekt verarbeitet werden (K4, K6). Zur Lösung der beiden Teilaufgaben sind verschiedene Rechnungen notwendig (K5).

Beispielaufgabe 3: „Räumungsverkauf“

Häufig wird ein Räumungsverkauf durchgeführt, wenn ein Geschäft umgebaut oder geschlossen wird. Dabei werden Waren billig angeboten und ihre Preise oft sogar mehrfach reduziert.

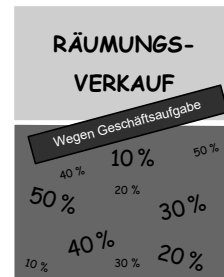


Abbildung 1

Teilaufgabe 1

In den letzten Tagen eines Räumungsverkaufs sagt der Geschäftsführer: „Um die Lager leer zu bekommen, senken wir die bereits um 25 % reduzierten Preise nochmals um 25 % gegenüber den schon reduzierten Preisen“.

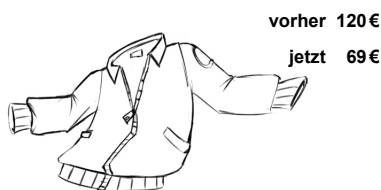


Abbildung 3

Überprüfe, ob der Endpreis der Jacke zur Aussage des Geschäftsführers passt.

Kreuze an.

☐

Ja

☐

Nein

Begründe deine Entscheidung.

[illegible]

Das letzte Beispiel zum Thema *Anteile* in den VERgleichsArbeiten der 8. Klassen ist die Aufgabe „Räumungsverkauf“ (Beispielaufgabe 3). Es wird auf einen Kontext aus der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler zurückgegriffen. Die korrekte Lösung der Aufgabe besteht aus der Antwort „Nein“ inklusive einer Begründung für diese Entscheidung. Die Rechnung zum Abzug von zwei Mal 25% des Ursprungspreises kann zum Beispiel zweischrittig wie folgt aussehen: $120 \text{ €} \cdot \frac{3}{4} = 90 \text{ €}$ und $90 \text{ €} \cdot \frac{3}{4} = 67,50 \text{ €}$. Es wird also inhaltlich erneut das Verständnis der Multiplikation als Anteil-Nehmen abgeprüft, in Kombination mit einem Kontext aus der Prozentrechnung. Auf Ebene der allgemeinen Kompetenzen werden dieses Mal die Kompetenzen „K1: mathematisch argumentieren“, „K3: mathematisch modellieren“ und „K5: mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ angesprochen. Anders als bei den vorangegangenen Beispielen, wird hier eine Begründung für die Entscheidung ja/nein gefordert (K1). Mathematisches Modellie-

ren ist notwendig, da die Aufgabe eine realitätsnahe Problemstellung aufzeigt, die mit mathematischen Methoden bearbeitet werden soll (K3). In dem Aufgabenbeispiel „Schokoladenfiguren“ sind mathematische Darstellungen gegeben, sodass kein Übertragen der realen Situation in die „Welt der Mathematik“ notwendig war und die Kompetenz „K2: Probleme mathematisch lösen“ statt der Kompetenz „K3: mathematisch modellieren“ abgeprüft wurde. Bei der Aufgabe „Räumungsverkauf“ sind hingegen realweltliche Darstellungen gegeben und es ist eine Mathematisierung der Situation notwendig (K3). Die zweimalige Preissenkung erfordert schließlich die Rechnung mit Prozentsätzen oder Bruchzahlen (K5).

4 Die Leitidee *Raum und Form*

Unter der Leitidee *Raum und Form* werden in den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss verschiedene inhaltsbezogene Kompetenzen zusammengefasst. Diese lauten (KMK, 2003, S. 11):

„Die Schülerinnen und Schüler

- *erkennen und beschreiben geometrische Strukturen in der Umwelt,*
- *operieren gedanklich mit Strecken, Flächen und Körpern,*
- *stellen geometrische Figuren im kartesischen Koordinatensystem dar,*
- *stellen Körper (z. B. als Netz, Schrägbild oder Modell) dar und erkennen Körper aus ihren entsprechenden Darstellungen,*
- *analysieren und klassifizieren geometrische Objekte der Ebene und des Raumes,*
- *beschreiben und begründen Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte (wie Symmetrie, Kongruenz, Ähnlichkeit, Lagebeziehungen) und nutzen diese im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachzusammenhängen,*
- *wenden Sätze der ebenen Geometrie bei Konstruktionen, Berechnungen und Beweisen an, insbesondere den Satz des Pythagoras und den Satz des Thales,*
- *zeichnen und konstruieren geometrische Figuren unter Verwendung angemessener Hilfsmittel wie Zirkel, Lineal, Geodreieck oder dynamische Geometriesoftware,*
- *untersuchen Fragen der Lösbarkeit und Lösungsvielfalt von Konstruktionsaufgaben und formulieren diesbezüglich Aussagen,*
- *setzen geeignete Hilfsmittel beim explorativen Arbeiten und Problemlösen ein.“*

In den Bildungsstandards Mathematik für den Hauptschulabschluss finden sich viele der genannten Aspekte wieder, es wird jedoch weniger der Fokus auf Problemlöse- und Beweisprozesse gelegt (KMK, 2004a). Ebenso finden fachliche Analysen und exploratives Arbeiten dort keine direkte Erwähnung. Besonders hervorgehoben werden in beiden Versionen der Bildungsstandards im Bereich *ebener Geometrie* Konstruktionsaufgaben. Die Schülerinnen

und Schüler sollen dabei gezielt Sätze der *ebenen Geometrie* anwenden und angemessene Hilfsmittel nutzen. Neben den gängigen Hilfsmitteln, wie Zirkel und Lineal, wird in den Bildungsstandards in diesem Zusammenhang dynamische Geometriesoftware explizit aufgeführt.

In den folgenden drei Unterkapiteln wird, analog zu dem Vorgehen bei der Leitidee *Zahl*, zunächst das Schwerpunktthema der diesjährigen VERA-8 Erhebung *Ebene Geometrie* näher betrachtet. Dabei wird zunächst dargestellt, welche Inhalte der *ebenen Geometrie* im Laufe der Schulzeit thematisiert werden. Im Anschluss daran werden Konstruktionen in den Blick genommen. Einerseits werden verschiedene Werkzeuge, ihr Nutzen und ihre Bedeutung vorgestellt. Auf der anderen Seite werden (fachdidaktische) Gründe für Konstruktionen im Mathematikunterricht angeführt und insbesondere betrachtet, welchen Mehrwert dynamische Geometriesoftware (DGS) haben kann. Es wird ein Beispielszenario für den Unterricht erläutert, bei dem Konstruktionen in GeoGebra zu kreativen Lösung einer Modellierungsaufgabe führen können (Hertleif, 2018). Abgeschlossen wird Kapitel 4 mit Beispielen zu VERA-8 Aufgaben aus dem Bereich der *ebenen Geometrie*. Wie schon in Kapitel 3.3 werden die Aufgaben auf die benötigten inhaltlichen Fähigkeiten aus dem Bereich *Ebene Geometrie*⁵ untersucht sowie die erforderlichen prozessbezogenen Kompetenzen beschrieben.

4.1 Schwerpunktthema: *Ebene Geometrie*

Mit Einführung der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich wurde „ein geometrisches Kerncurriculum für den Grundschulbereich“ formuliert (Sträßer, 2015, S. 8). Schon in der Grundschule lernen die Schülerinnen und Schüler viele Aspekte der *ebenen Geometrie* auf einer elementaren Ebene kennen (KMK, 2004b). Zum Beispiel sollen sie lernen, geometrische Figuren und Abbildungen zu erkennen, darzustellen und zu benennen. Aber auch Flächeninhalt und Umfang finden bereits hier Erwähnung, meist auf enaktiver oder ikonischer Ebene, beispielsweise „durch Auslegen mit Einheitsflächen“ (KMK, 2004b, S. 10). Außerdem können Faltaktivitäten oder das Spannen geometrischer Figuren auf einem Geobrett eine Rolle spielen (Franke & Reinhold, 2016). Flächen- und Umfangberechnungen können zu der Leitidee *Raum und Form* gezählt werden, was in den Bildungsstandards für den Primarbereich auch durchweg der Fall ist (KMK, 2004b). Da in der Sekundarstufe die beiden Leitideen *Raum und Form* sowie *Messen* unterschieden werden, ergeben sich im Inhaltsfeld *Geometrie* Überschneidungen beider Leitideen (KMK, 2003, 2004a).

⁵ Anders als im Bereich der Bruchrechnung, wurden im Bereich der Geometrie bis heute keine allgemein anerkannten Grundvorstellungen formuliert, sondern es gibt lediglich erste Versuche solche herauszuarbeiten und zu benennen (Ludwig, Filler & Lambert, 2015). Aus diesem Grund findet der Begriff der Grundvorstellungen in Kapitel 4 keine weitere Erwähnung.

Flächen- und Umfangberechnungen werden dort der Leitidee *Messen* zugeordnet und deshalb an dieser Stelle nicht weiter thematisiert.

In der Sekundarstufe werden die in der Grundschule vorwiegend ganzheitlich und handelnd erfahrenen ebenen Figuren systematischer untersucht, indem „Seiten-, Winkel-, Diagonalen- und Symmetrieeigenschaften“ thematisiert werden (Roth & Wittmann, 2018, S. 107). Zu den elementaren Figuren wie Rechteck, Dreieck und Quadrat kommen weitere Figuren, wie zum Beispiel Parallelogramme hinzu. Hierbei sind im Mathematikunterricht unter anderem das eben schon erwähnte Konstruieren sowie das Beweisen und das Problemlösen in der *ebenen Geometrie* von zentraler Bedeutung (z. B. Holland, 2007; Weigand et al., 2018). Den Autoren zufolge können unter Rückgriff auf Konstruktionen sowohl Probleme gelöst als auch verschiedene Sachverhalte bewiesen werden. Konstruktionsaufgaben werden daher im Folgenden näher in den Blick genommen.

Konstruieren kann man allgemein als das Erzeugen ideeller Objekte (auf Ebene der Vorstellungen) verstehen (Ludwig & Weigand, 2018). Damit ist gemeint, dass beim Konstruieren im Kopf Objekte entstehen können, die frei von Fehlern durch ungenaue technische Ausführung sind. Es führt in der Vorstellung zu theoretisch exakten Ergebnissen. Zudem ist bei klassischen Konstruktionen jeder einzelne Schritt klar nachvollziehbar, was als theoretische Exaktheit bezeichnet wird. Praktisch jedoch können Konstruktionen, die per Hand gezeichnet werden, niemals exakt sein. Beispielsweise werden durch das Ansetzen einer Zirkelspitze oder die Dicke eines Bleistifts auf dieser Ebene immer Ungenauigkeiten verursacht (Ludwig & Weigand, 2018). In Tabelle 2 (linke Spalte) sind verschiedene Gründe für den Einsatz von Konstruktionsaufgaben im Geometrieunterricht aufgeführt. Konstruktionsaufgaben bieten demnach vielfältige Möglichkeiten für Problemlöse- und Beweistätigkeiten (Hattermann, Kadunz, Rezat & Sträßer, 2015; Ludwig & Weigand, 2018). Sie können zum Beispiel „illustrative Beispiele für Existenz und All-Aussagen liefern“ oder „die Funktion und Reichweite von Gegenbeispielen“ (Hattermann et al., 2015, S. 191) sowie unmögliche Konstruktionen aufzeigen. Des Weiteren können mithilfe von Konstruktionen neue Begriffe oder Handlungsvorschriften eingeführt werden. Konstruktionen fördern praktische Fähigkeiten, wenn zum Beispiel per Hand Zeichnungen angefertigt werden sollen. Es ist ebenso möglich, die Kreativität der Schülerinnen und Schüler durch eigene Konstruktionen positiv zu beeinflussen. Neben diesen Aspekten lassen sich methodisch einige Gründe für Konstruktionen aufzählen. Erneut werden Problemstellungen hervorgehoben, die sich in vielfacher Weise über Konstruktionsaufgaben ergeben (Ludwig & Weigand, 2018). Außerdem können Konstruktionen häufig auf verschiedenen Schwierigkeitsniveaus gehandhabt werden und eignen sich somit für Differenzierungsaufgaben. Nicht zuletzt bieten Konstruktionsaufgaben die Möglichkeit der Wiederholung und Anwendung bereits behandelter Sätze und Begriffe (Ludwig & Weigand, 2018).

Tabelle 2: Gründe für Konstruktionsaufgaben im Rahmen des Geometrieunterrichts

	Warum Zirkel- und Lineal-Konstruktionen?	Warum dynamische Geometriesoftware?
Allgemeine und inhaltsspezifische Ziele und Kompetenzen:	- Entwickeln von Problemlösefähigkeiten - Entwickeln von Argumentationsfähigkeiten - Einführen neuer Begriffe (z. B. Parallelogramm, Mittelsenkrechte) und Handlungsvorschriften (z. B. spiegeln, zentrisch strecken) - Entwickeln kreativer Fähigkeiten - Entwickeln praktischer Fähigkeiten (z. B. Feinmotorik, zeichnen) - Vermitteln von Kenntnissen über historische Wurzeln der Mathematik und als zentrale Grundlage für den Aufbau von dynamischer Geometriesoftware	- Gültigkeit einer Konstruktion an „sehr vielen“ Einzelfällen überprüfbar (Variation) - Entdecken von Zusammenhängen, Eigenschaften, Gesetzmäßigkeiten und Sätzen (Variation) - Visualisierung der Bewegung von konstruierten Punkten beim Variieren von Objekten (Ortslinienfunktion) - Heuristisches Hilfsmittel (Ortslinienfunktion) - Erzeugung von Konstruktions-Modulen für die Konzentration auf zentrale Aspekte einer Problemlösung oder Beweisführung - Erzeugung von Modulen für die übersichtlichere Darstellung eines Lösungsweges
Methodische Funktion:	- Quelle für Problemstellungen - Darstellung auf verschiedenen Schwierigkeitsstufen (Differenzierung) - Wiederholung und Anwendung bereits bekannter Begriffe und Sätze	

Bevor im nächsten Abschnitt ein unterrichtspraktischer Vorschlag für eine Konstruktionsaufgabe vorgestellt wird, werden unterschiedliche Werkzeuge dargestellt, die im Rahmen von Konstruktionen eingesetzt werden können. Ludwig und Weigand (2018) geben hierfür einen guten Überblick. Als klassische Werkzeuge nennen sie unter anderem Zirkel und Lineal, das Geodreieck und den Computer. Alternativ werden, insbesondere für den Anfangsunterricht der Sekundarstufe I, das Spannen von Seilen, das Falten von Papier sowie (Freihand-) Zeichnungen vorgestellt (vgl. Abbildung 6). Teilweise können diese Werkzeuge schon aus Primarstufenzeiten bekannt sein. Sie bieten jedoch auch in der Sekundarstufe noch vielfältige Möglichkeiten zur Veranschaulichung und zum entdeckenden Lernen.

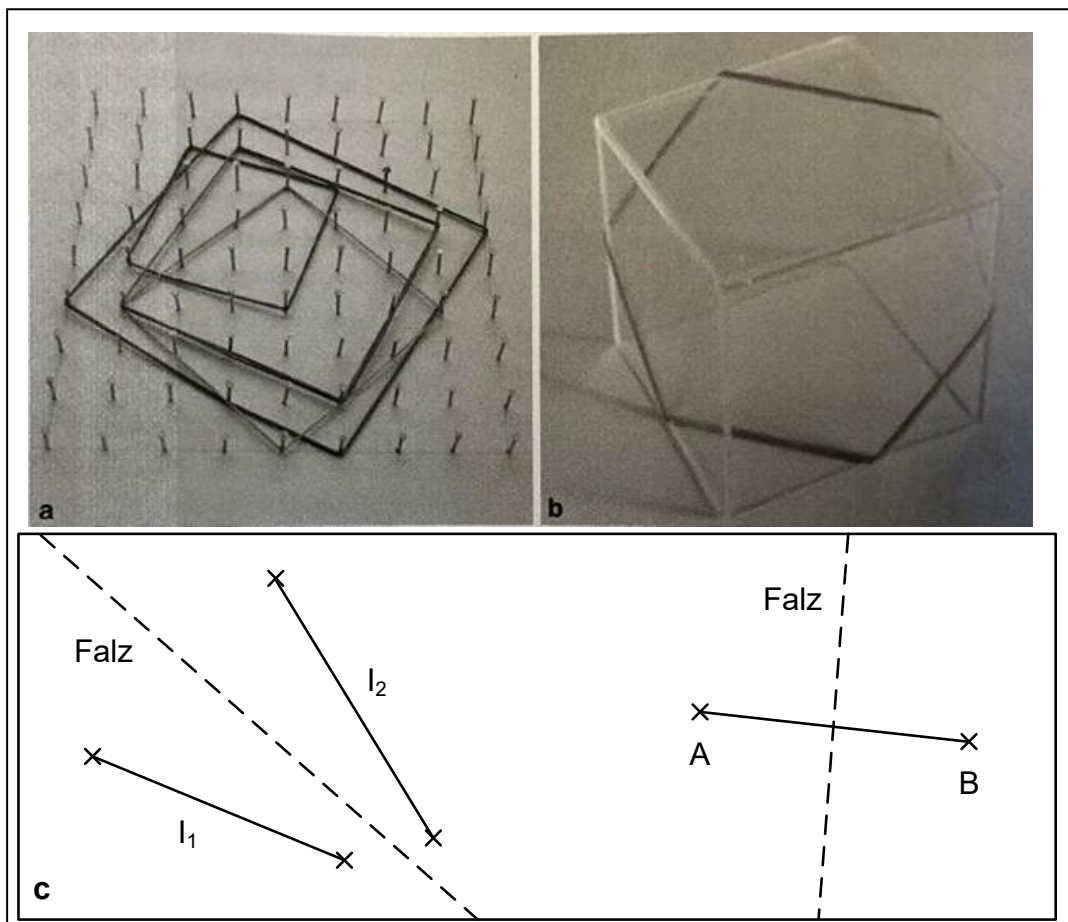


Abbildung 6: a) mit Seilen gespannte Quadrate auf einem Geobrett, b) ebener Schnitt durch einen Würfel mittels eines Gummibandes und c) Konstruktion einer Winkelhalbierenden bzw. einer Mittelsenkrechten mittels Papierfalten

Auf zeichnerischer Ebene betonen Ludwig und Weigand (2018), dass es hilfreich und zeitsparend sein kann, die Schülerinnen und Schüler Freihandzeichnungen von Objekten anfertigen zu lassen, bevor exaktere Konstruktionen durchgeführt werden. Dies gilt vor allem wenn das Durchführen von Konstruktionen für Schülerinnen und Schüler noch ungewohnt ist. Anhand solcher Zeichnungen lassen sich schon diverse Eigenschaften einer Figur, beispielsweise eines Parallelogramms, wiedergeben, bei denen eine exaktere Zeichnung keinen direkten Mehrwert hätte. Dies soll jedoch nicht heißen, dass es im Anschluss an Freihandzeichnungen nicht wichtig und sinnvoll sei, zu exakteren Werkzeugen überzugehen. Zu diesen zählen die oben genannten klassischen Werkzeuge, etwa Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen. Mit ihnen lassen sich die historischen Wurzeln der Mathematik über Jahrtausende zurückverfolgen (vgl. Tabelle 2). Schon ohne Messskala lassen sich mithilfe dieser beiden Werkzeuge verschiedenste Grundkonstruktionen herstellen. Beispielhaft sei die Konstruktion eines Kreises aus seinem Mittelpunkt und einem Punkt auf der Kreislinie genannt. Später können mittels eines Geodreiecks Winkel gemessen, Parallelen gezeichnet, sowie das Geodreieck als Lot- und Tangenzzeichner herangezogen werden. Diese Tätigkeiten hatten bis vor einigen Jahren vielfache Anwendungen bei verschiedenen Berufen. Architekten, Bauzeichner und Nautiker nutzten vergleichbare Werkzeuge. Auch

aktuell sind Kenntnisse über die Funktionsweisen und praktischen Durchführungen noch von Nutzen, um verständig mit den heute üblichen (Computer-) Werkzeugen umgehen zu können. Im Geometrieunterricht der weiterführenden Schulen wird ebenso zunehmend mit digitalen Werkzeugen und Medien gearbeitet, insbesondere die Nutzung dynamischer Geometriesoftware (DGS) wie GeoGebra hat sich durchgesetzt. DGS kombinieren die Möglichkeiten von Zirkel- und Lineal-Konstruktionen mit Geodreieck-Operationen und bieten zudem noch vielfältige weitere Möglichkeiten (vgl. Tabelle 2, rechte Spalte). Besonders hervorzuheben ist an dieser Stelle der Zugmodus, welcher die Variation einer erstellten Konstruktion ermöglicht. Außerdem können Ortslinien von Punkten eingezeichnet werden, wenn das konstruierte Gebilde variiert wird. Sind häufig benötigte Konstruktionen wie die der Mittelsenkrechten den Schülerinnen und Schülern bekannt, so gibt es die Möglichkeit, diese als Modul abzuspeichern. Dann können diese bekannten Konstruktionen bei der Erstellung komplexerer Konstruktionen automatisiert erzeugt werden. Im folgenden Abschnitt wird ein Beispiel illustriert, wie eine DGS im Mathematikunterricht eingesetzt werden kann.

4.2 Modellieren mit dynamischer Geometriesoftware: Konstruktionsaufgabe

Hertleif (2018) stellt eine Modellierungsaufgabe vor, die in den Jahrgangsstufen 7 bis 9 flexibel auf unterschiedlichen Wissensständen und Leistungsniveaus bearbeitet werden kann. Ist die Klasse gewohnt mit der DGS GeoGebra zu arbeiten, so reicht voraussichtlich eine einzelne 45-minütige Unterrichtsstunde für die Bearbeitung aus. Ansonsten sollte besser eine Doppelstunde eingeplant werden. In dem genannten Artikel befindet sich neben einer Kopiervorlage ein Verweis auf zusätzliches Online-Material. Dieses enthält eine GeoGebra-Datei, welche den Einstieg in die Bearbeitung der Aufgabe via DGS erleichtern kann.

Modellieren erfordert eine Übertragung einer realen Situation in die Mathematik sowie die spätere Rückbesinnung auf die reale Situation. Üblicherweise wird dazu in der Schule ein vierschrittiger Modellierungskreislauf genutzt, etwa der in Abbildung 7 dargestellte Kreislauf nach Blum (1985).⁶

⁶ Für nähere Informationen zu den Prozessen, die bei der Bearbeitung einer Modellierungsaufgabe ablaufen können, sei auf die zahlreichen Veröffentlichungen dazu verwiesen (z. B. Blum, 1985; Borromeo Ferri, Greefrath & Kaiser, 2013; Greefrath, 2018; Hinrichs, 2008; Leiss & Tropper, 2014).

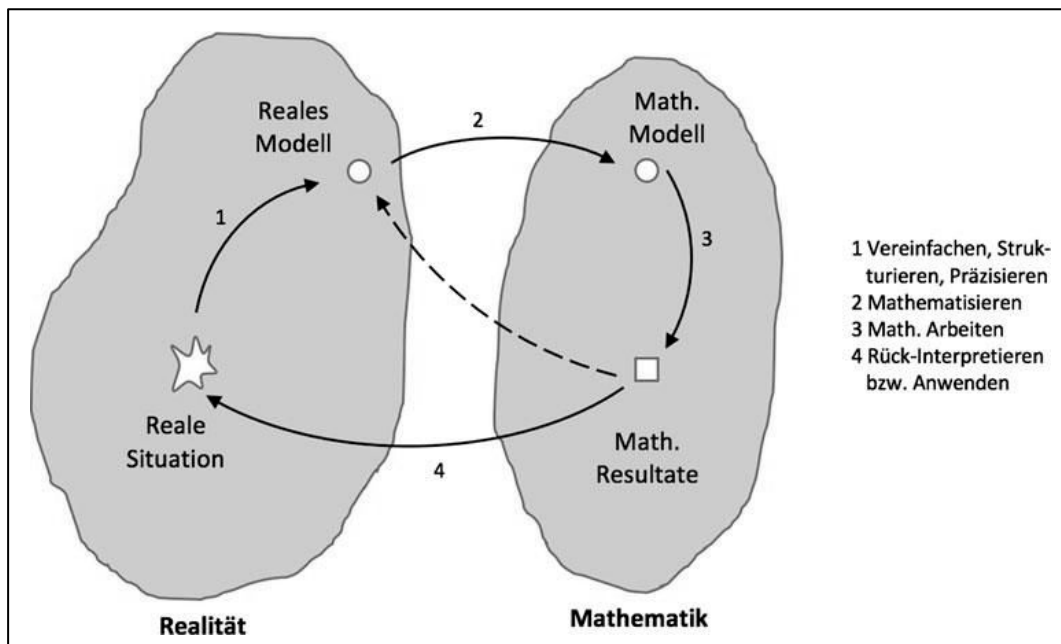


Abbildung 7: Modellierungskreislauf nach Blum (1985)

Hertleif (2018) hebt besonders hervor darauf zu achten, dass die Schülerinnen und Schüler zu Beginn wirklich (realweltliche) Annahmen treffen, Vereinfachungen vornehmen und diese später bei der Interpretation des Ergebnisses berücksichtigen sowie die Plausibilität des Ergebnisses validieren. Ansonsten bestehe die Gefahr, dass der Fokus zu stark auf die rechnerischen Tätigkeiten gelegt wird. Bei der Arbeit mit einer DGS wie GeoGebra solle zudem die Gefahr im Hinterkopf behalten werden, dass die Schülerinnen und Schüler unreflektiert damit umgehen und per *trial-and-error* versuchen auf eine Lösung zu kommen. Diesem Vorgehen kann durch die Einforderung von gezielten Annahmen und Vereinfachungen entgegengewirkt werden. Das heißt, dass die Schülerinnen und Schüler explizit dazu angehalten werden sollen, ihre Annahmen und Vereinfachungen der Situation zu formulieren. In dem Artikel von Hertleif (2018) werden verschiedene Chancen und Risiken des DGS-Einsatzes beim Modellieren aufgezählt, darunter auch die folgenden positiven Effekte: Die Schülerinnen und Schüler können in GeoGebra leicht verschiedene Modelle ausprobieren und miteinander vergleichen, auch solche, die sie (noch) nicht erlernt haben. Die Zeit zur Konstruktion geometrischer Objekte kann verkürzt werden, ohne Genauigkeit zu verlieren. In einigen Modellen ist es sogar möglich, am Computer deutlich genauer zu arbeiten als händisch möglich. Durch diese Zeitersparnis kann in Summe mehr Zeit für die Besprechung der Aufgabe und für die Diskussion der Ergebnisse im Plenum bleiben.

In der Modellierungsaufgabe „Turm“ geht es um die Berechnung, wie groß die Fläche einer Etage eines Bürogebäudes in Köln-Deutz ist, die zur Miete angeboten wird (vgl. Abbildung 8).

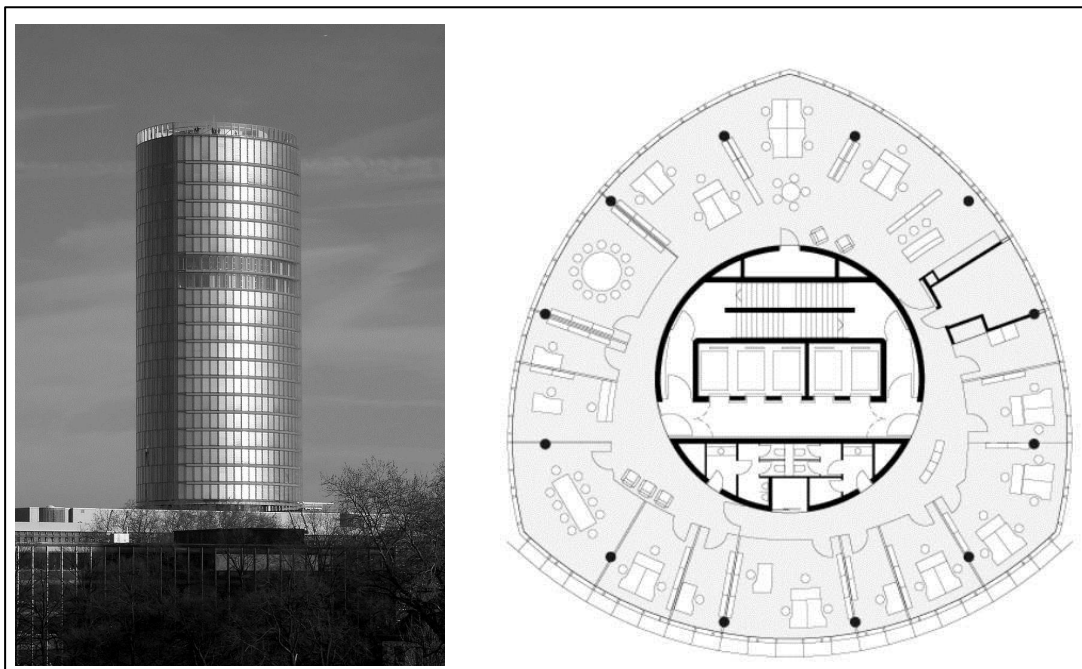


Abbildung 8: Außenansicht des „KölnTriangle“ sowie Grundriss einer Etage des Gebäudes

Etwa unter Rückgriff auf die GeoGebra-Datei aus dem Online-Material von Hertleif (2018), in der der Grundriss einer solchen Etage implementiert wurde, können die Schülerinnen und Schüler eigenverantwortlich überlegen, wie sie die Fläche der Etage am genauesten berechnen können.⁷ Da der Grundriss keiner üblichen – aus dem Mathematikunterricht bekannten – Form entspricht, müssen die Schülerinnen und Schüler zunächst Annahmen treffen und Vereinfachungen vornehmen. Vor der Berechnung der Fläche können sie die Fläche mit ihnen bekannten Formen annähern, sie also näherungsweise (Re-)Konstruieren. Die Schülerinnen und Schüler, mit denen die Aufgabe getestet wurde, erstellten viele verschiedene Modelle. Das einfachste entsprach einer Annäherung via Dreieck und Kreis. Hierbei wurde ein (zu großer) Kreis durch die drei Eckpunkte des Grundrisses gelegt sowie ein (zu kleines) Dreieck konstruiert, dessen Eckpunkte den Eckpunkten des Grundrisses entsprachen. Der Flächeninhalt wurde in diesem Beispiel durch eine Mittelwertbildung der Flächen beider Annäherungen bestimmt. Für weitere, zum Teil mathematisch deutlich komplexere Modelle, die von den Schülerinnen und Schülern selbstständig entwickelt worden, sei auf die Originalquelle verwiesen (Hertleif, 2018). Die Unterrichtsstunde sollte damit abgeschlossen werden, dass die gefundenen Ergebnisse im Plenum gesammelt, verglichen und gegeneinander abgewogen werden. So kann die Reflexionsleistung der Schülerinnen und Schüler unterstützt und gefördert werden. Außerdem kann erreicht werden, dass sie Mathematikaufgaben – insbesondere solche mit realem Kontext – nicht in jedem Fall als eindeutig lösbar ansehen, sondern die Abhängigkeit der Lösung von getroffenen Annahmen und Vereinfachungen erfassen.

⁷ Da der Grundriss frei im Internet verfügbar ist, kann er alternativ von jeder Person selbst bei GeoGebra eingefügt werden.

Die Annäherung von ungewöhnlichen Flächen durch bekannte Objekte bietet vielfältige Möglichkeiten für anwendungsbezogene (Modellierungs-)Aufgaben. Ein weiteres Beispiel kann bei Hertleif und Adamek (2016) nachgeschlagen werden, bei dem die Fläche des Pillnitzer Schlossgartens modelliert und (re-)konstruiert werden soll. Es sind in der *ebenen Geometrie* aber natürlich im Bereich des Modellierens (mit und ohne DGS) auch diverse andere mathematische Inhalte als die Betrachtung von Flächeninhalten möglich. Eine Modellierungsaufgabe zum Satz des Pythagoras stellt zum Beispiel die Feuerwehr-Aufgabe und dabei die Frage nach der maximalen Rettungshöhe mithilfe eines Feuerwehrautos dar (Fuchs & Blum, 2008; Holzäpfel & Leiss, 2014).

4.3 Ebene Geometrie in den VERA-8 Erhebungen

In den VERgleichsArbeiten der achten Klassen wurde die oben dargestellte allgemeine Kompetenz „K3: mathematisch modellieren“ im Rahmen der Leitidee *Raum und Form* mit dem Schwerpunkt *Ebene Geometrie* bisher nicht getestet. In diesem Abschnitt zu *Ebener Geometrie* in den VERA-8 Erhebungen werden Beispielaufgaben dargestellt. Um den Fokus auf die weiteren, prozessbezogenen Kompetenzen zu lenken, wird zudem erläutert, welche der Kompetenzen jeweils für die Beantwortung der Aufgabe benötigt werden und inwiefern dies der Fall ist. Diese Ausführungen sollen erneut aufzeigen, durch welche Art von Aufgabenstellungen die allgemeinen Kompetenzen (auch im Mathematikunterricht) gefördert und abgeprüft werden können.

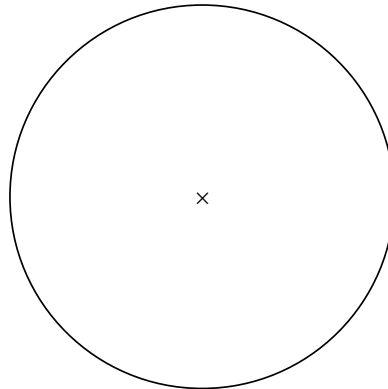
Beispielaufgabe 4: „Kreise und Vierecke“

Gegeben ist jeweils ein Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm.

Teilaufgabe 1

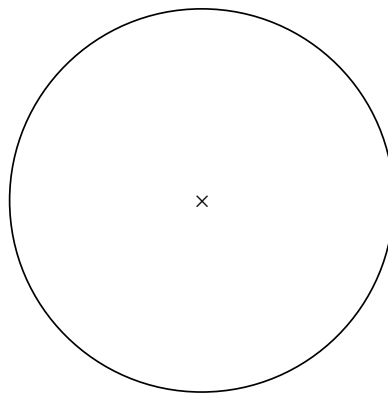
Zeichne ein Rechteck so ein, dass seine vier Eckpunkte auf der Kreislinie liegen.

Das Rechteck soll genau doppelt so lang wie breit sein.



Teilaufgabe 2

Zeichne ein Quadrat exakt so ein, dass seine vier Eckpunkte auf der Kreislinie liegen.



Teilaufgabe 3

Martin sagt: „Wenn ich eine Raute (Rhombus) $ABCD$ so einzeichne, dass die Eckpunkte B und D auf der Kreislinie liegen, müssen auch die beiden anderen Eckpunkte A und C immer auf der Kreislinie liegen.“

Hat Martin Recht?

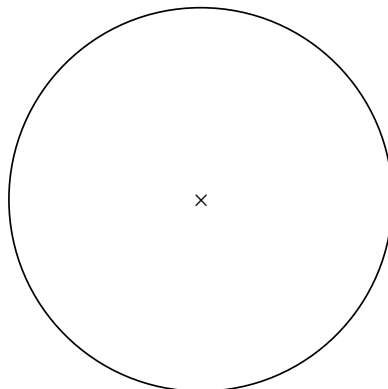
Kreuze an.

□

Ja

9

Nein



Begründe deine Entscheidung.

[illegible]

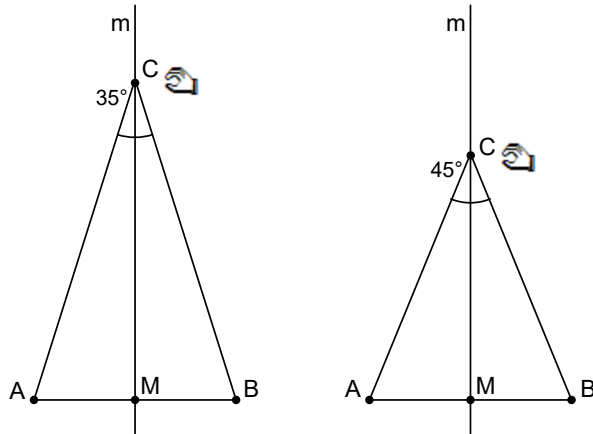
Die Aufgabe „Kreise und Vierecke“ ist eine klassische Konstruktionsaufgabe (Beispielaufgabe 4). In Teilaufgabe 1 ist den Schülerinnen und Schülern sowohl der Ausgangspunkt als auch das Ziel der Aufgabe klar. Wie sie jedoch dieses Ziel erreichen können, ein Quadrat mit vier Ecken auf der Kreislinie in den Kreis einzuzeichnen, ist nicht vorgegeben. Es gibt nicht den einen Weg, der zur Lösung führt, sondern sie können über verschiedene Strategien zu einer erfolgreichen Lösung gelangen. Eine Möglichkeit stellt die heuristische Strategie „Rückwärtsarbeiten“ dar. Die Lernenden gehen dabei von einem Quadrat aus und überlegen sich passende Eigenschaften des Quadrats. Davon ausgehend können sie im

Anschluss ihr Vorgehen planen und die Konstruktion durchführen. Ergebnis sollten zwei orthogonale Geraden durch den Mittelpunkt des Kreises sein, welche die vier Eckpunkte des Quadrates an der Kreislinie markieren. Dadurch, dass verschiedene Strategien zum Ziel führen können und kein direkt ersichtlicher Weg vorgegeben ist, wird bei Teilaufgabe 1 die prozessbezogene Kompetenz „K2: Probleme mathematisch lösen“ angesprochen. Bei der Konstruktion des Quadrates mithilfe eines Werkzeugs wie dem Geodreieck, werden außerdem die beiden Kompetenzen „K4: mathematische Darstellungen verwenden“ und „K5: mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ gefordert. Teilaufgabe 2 stellt ein gutes Beispiel dafür da, wie Konstruktionsaufgaben mit Argumentationen verknüpft werden können. Die Aussage von Martin zeigt eine typische All-Aussagen-Aufgabe auf, bei der die Schülerinnen und Schüler erkennen müssen, dass sie diese anhand eines einzelnen Gegenbeispiels widerlegen können. Um zu einem solchen Gegenbeispiel zu gelangen, sind erneut verschiedene Strategien möglich. Die Lernenden können beispielsweise durch systematisches Variieren, ausgehend von einem Quadrat als Spezialfall einer Raute, zu der gewünschten Lösung kommen. Durch die Forderung nach einer Begründung ist diese Aufgabe klar der Kompetenz „K1: mathematisch argumentieren“ zuzuordnen. Da erneut verschiedene Strategien angewandt werden können, wird außerdem die Kompetenz „K2: Probleme mathematisch lösen“ angesprochen. Ebenfalls wird mit mathematischen Darstellungen umgegangen, weshalb auch „K4: mathematische Darstellungen verwenden“ benötigt wird.

Beispielaufgabe 5: „Bewege C“

Mit einer Geometrie-Software wurde Folgendes konstruiert: eine Strecke $\overline{AB}$, dazu die Mittelsenkrechte m und ein Punkt C auf m . C wird mit A und B verbunden, um das Dreieck ABC zu erhalten.

Der Punkt C wird auf der Mittelsenkrechten m nach unten bewegt. In der Zeichnung siehst du zwei Beispiele mit verschiedenen Positionen von C :



Teilaufgabe 1

C soll so weit nach unten bewegt werden, dass ein gleichseitiges Dreieck ABC entsteht.

Konstruiere dieses Dreieck in Figur 1.

Teilaufgabe 2

C soll an eine Position bewegt werden, in der ein rechtwinkliges Dreieck ABC entsteht.

Konstruiere dieses Dreieck in Figur 2.

Das zweite Beispiel „Bewege C“ aus dem Bereich *Ebene Geometrie* stellt erneut eine Konstruktionsaufgabe dar (Beispielaufgabe 5). Dieses Mal wird gedanklich mit einer dynamischen Geometriesoftware gearbeitet. Um dies auf Papier zu handhaben, müssen die Schülerinnen und Schüler aus den Werkzeugen Zirkel-und-Lineal oder Geodreieck wählen. Es führen wieder mehrere Strategien zu einer korrekten Lösung. Wichtig ist, dass die Schülerinnen und Schüler aus dem Text die Informationen entnehmen, dass es sich bei m um die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ handelt und dass die Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks gefordert ist. Dessen Eigenschaften müssen den Schülerinnen und Schülern bekannt sein, um eine korrekte Konstruktion durchzuführen. Entweder wird ausgenutzt, dass alle drei Winkel 60° betragen müssen oder sie zeichnen zwei Kreise um A bzw. B mit jeweils dem Radius $\overline{AB}$. Der Schnittpunkt beider Kreise mit der Mittelsenkrechten m gibt den Punkt C eines gleichseitigen Dreiecks an. Da aus einem mathemathikhaltigen Text Informationen entnommen werden müssen, wird bei dieser Aufgabe die prozessbezogene Kompetenz „K6: mathematisch kommunizieren“ gefordert. Außerdem muss die gegebene geometrische Konstellation analysiert werden, weshalb „K4: mathematische Darstellungen verwenden“ angesprochen wird. Durch die Planung der Konstruktion auf verschiedenen denkbaren Wegen wird, wie schon bei den Aufgaben zuvor, die Kompetenz „K2: Probleme mathema-

tisch lösen“ gefordert und die Konstruktion selbst erfordert den Umgang mit technischen Elementen der Mathematik (K5).

5 Abschließende Anmerkungen

Die diesjährigen didaktischen Handreichungen beinhalteten erstmalig zwei Themenschwerpunkte aus zwei inhaltsbezogenen Kompetenzen (Leitideen), die als Ergänzungsmodule für die VERA-8 Testung zur Auswahl standen. Im Bereich der Leitidee *Zahl* war dies der Schwerpunkt *Anteile*. Im Bereich der Leitidee *Raum und Form* der Schwerpunkt *Ebene Geometrie*. Aus beiden Themen wurden zentrale Inhalte betrachtet, welche durch die Bildungsstandards vorgegeben werden. Zum Abschluss sei noch einmal darauf hingewiesen, dass es an dieser Stelle nicht möglich war, alle inhaltlichen Aspekte aus beiden Bereichen darzustellen, sofern diese Inhalte überhaupt eindeutig und vollständig festlegbar sind. Es wurde jedoch versucht auf besondere Hürden und Möglichkeiten sowohl bei dem Thema *Anteile* als auch im Feld der *Ebenen Geometrie* hinzuweisen und Anregungen für die Unterrichtspraxis zu geben. Zudem wurde aufgezeigt, welche Aufgabenmerkmale darauf hindeuten, bestimmte prozessbezogene Kompetenzen abzuprüfen. Diese können und sollten auch im Mathematikunterricht dazu genutzt werden, die allgemeinen Kompetenzen zu fördern. Auch in Bezug auf die prozessbezogenen Kompetenzen sei abschließend erneut darauf hingewiesen, dass die Kompetenzen K1 bis K6 komplexer sind, als in den Beispielen gezeigt werden konnte. Für weitere Beispiele und Anmerkungen stellt die in den vorangegangenen Kapiteln genannte Literatur eine gute Ausgangslage dar (z. B. Blum et al., 2010).

6 Literaturverzeichnis

- Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte. Zur Pflege des Zusammenhangs zwischen Schule und Universität*, 32(2), 195–232.
- Blum, W., Drücke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg.). (2010). *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (4. Aufl.). Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Borromeo Ferri, R., Greefrath, G. & Kaiser, G. (Hrsg.). (2013). *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und didaktische Hintergründe*. Wiesbaden: Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-01580-0>
- Franke, M. & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule* (3. Auflage). Berlin: Springer Spektrum.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- Fuchs, M. & Blum, W. (2008). Selbstständiges Lernen im Mathematikunterricht mit "beziehungsreichen" Aufgaben. In J. Thonhauser (Hrsg.), *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen* (S. 135–148). Münster: Waxmann.
- Gellner, L. (2011). *Prozent - und Zinsrechnung in kleinen Schritten*. Hamburg: Persen Verlag.
- Greefrath, G. (2018). *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht*. Berlin, Heidelberg: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-57680-9>
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5>
- Hattermann, M., Kadunz, G., Rezat, S. & Sträßer, R. (2015). Geometrie: Leitidee Raum und Form. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 185–219). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2006). Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern - Zahlvorstellungen wandeln. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 48(11), 1–7.
- Hefendehl-Hebeker, L. & Schwank, I. (2015). Arithmetik: Leitidee Zahl. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 77–115). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Hertleif, C. (2018). Wie groß ist die Etage? Dynamische Geometrie Software (DGS) als Hilfsmittel beim Modellieren nutzen. *Mathematik lehren*, 207, 16–19.
- Hertleif, C. & Adamek, C. (2016). Der Pillnitzer Schlossgarten - Modellieren in Theorie und Praxis. *Mathematik 5-10*, 37, 42–54.
- Hinrichs, G. (2008). *Modellierung im Mathematikunterricht*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Holland, G. (2007). *Geometrie in der Sekundarstufe. Entdecken - Konstruieren - Deduzieren* (3., neu bearb. und erw. Aufl.). Hildesheim: Franzbecker.
- Holzäpfel, L. & Leiss, D. (2014). Modellieren in der Sekundarstufe. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Fachdidaktik Mathematik. Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II* (S. 159–178). Seelze: Kallmeyer.
- KMK. (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Zugriff am 27.08.2019. Verfügbar unter https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf
- KMK. (2004a). *Bildungsstandards für den Haupschulabschluss*. Zugriff am 27.08.2019. Verfügbar unter https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Haupt.pdf

- KMK. (2004b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Verfügbar unter https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf
- Leiss, D. & Tropper, N. (2014). *Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-45109-6>
- Ludwig, M., Filler, A. & Lambert, A. (Hrsg.). (2015). *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. Wiesbaden: Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-06835-6>
- Ludwig, M. & Weigand, H.-G. (2018). Konstruieren. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth et al. (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (3., erweiterte und überarbeitete Auflage, S. 43–66). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren*, (123), 4–8.
- Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Auflage). Berlin: Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-52969-0>
- Prediger, S. (2006). Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben. Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 48(11), 8–12.
- Reinhold, F. (2019). *Wirksamkeit von Tablet-PCs bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs aus mathematikdidaktischer und psychologischer Perspektive. Eine empirische Studie in Jahrgangsstufe 6*. Wiesbaden: Springer Spektrum. Verfügbar unter <https://doi.org/10.1007/978-3-658-23924-4>
- Roth, J. & Wittmann, G. (2018). Ebene Figuren und Körper. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth et al. (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (3., erweiterte und überarbeitete Auflage, S. 107–147). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Schwill, A. (1993). Fundamentale Ideen der Informatik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 25(1), 20–31.
- Sträßer, R. (2015). Grundbegriffe, Grundvorstellungen und Nutzungen der Geometrie. In M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 1–11). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13(4), 345–364.
- Wartha, S. & Güse, M. (2009). Zum Zusammenhang zwischen Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und arithmetischem Grundwissen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 30(3-4), 256–280.
- Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J. et al. (Hrsg.). (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (3., erweiterte und überarbeitete Auflage). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8>
- Wessel, L. (2015). *Fach- und sprachintegrierte Förderung durch Darstellungsvernetzung und Scaffolding*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-07063-2>
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 21(61), 37–46.
- Winter, H. (1999). *Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung*. Manuskript: RWTH Aachen. Zugriff am 30.09.2019. Verfügbar unter <http://www.matha.rwth-aachen.de/de/lehre/ss09/sfd/Bruchrechnen.pdf>
- Zech, F. (1995). *Mathematik erklären und verstehen. Eine Methodik des Mathematikunterrichts mit besonderer Berücksichtigung von lernschwachen Schülern und Alltagsnähe*. Berlin: Cornelsen.

7 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: https://www.iqb.hu-berlin.de/institut/ab/sek1_ma (letzter Zugriff: 30.10.2019)	4
Abbildung 2a): https://pixabay.com/de/illustrations/pizza-pizza-symbol-pizza-slice-1428931/ (letzter Zugriff: 30.10.2019).	8
Abbildung 3: IQB	9
Abbildung 4: IQB in Anlehnung an Abbildung 2a).	10
Abbildung 5: IQB	13
Abbildung 6: a), b) Ludwig & Weigand (2018, S. 46) c) IQB in Anlehnung an Ludwig & Weigand (2018, S. 46).....	22
Abbildung 7: Blum (1985)	24
Abbildung 8: https://de.wikipedia.org/wiki/Kölntriangle#/media/Datei:KölnTriangle_(0684).jpg (letzter Zugriff: 30.10.2019) http://www.koelntriangle.de/de/grundrisse/ (letzter Zugriff: 30.10.2019).....	25

8 Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Ausschnitt aus Hefendehl-Hebeker und Prediger (2006, S. 4.)	10
Tabelle 2: In Anlehnung an Ludwig und Weigand (2018, 61f)	21

9 Verzeichnis der Beispielaufgaben

Beispielaufgabe 1: „Anteile in geometrischen Objekten“ (IQB)	14
Beispielaufgabe 2: „Schokoladenfiguren“ (IQB).....	15
Beispielaufgabe 3: „Räumungsverkauf“ (IQB)	17
Beispielaufgabe 4: „Kreise und Vierecke“ (IQB)	27
Beispielaufgabe 5: „Bewege C“ (IQB).....	29