HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
IQB
Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten 2019
8. Jahrgangsstufe (VERA-8)
Mathematik – Didaktische Handreichung
Modul B

Didaktische Erläuterung
Leitidee Funktionaler Zusammenhang

Inhaltsverzeichnis

Autorinnen und Autor der fachdidaktischen Erläuterungen in den Modulen B und C sind Elena Jedtke, Corinna Hankeln und Uwe Schürmann. Die gezeigten Testaufgaben entstanden in Kooperation von Lehrkräften aus acht Bundesländern und Fachdidaktikerinnen / Fachdidaktikern unter Federführung der Arbeitsgruppe Prof. Greefrath, Universität Münster (fachdidaktische Leitung) und des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen.

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien auch online finden können?

www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

1 Einleitung

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz mit ihren Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen bilden die Grundlage für die VERgleichsArbeiten in der 8. Jahrgangsstufe (VERA-8) im Fach Mathematik. Daher wird in dieser didaktischen Handreichung - wie in den Handreichungen der letzten Jahre auch - zunächst der Aufbau der Bildungsstandards vorgestellt (siehe Abschnitt 2, S. 3). Anschließend wird die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang (L4)* näher erläutert (siehe Abschnitt 3, S. 7) und schließlich unter besonderer Berücksichtigung einzelner allgemeiner mathematischer Kompetenzen betrachtet (siehe Abschnitt 4, S.15).

Dabei wird in allen Abschnitten ein besonderes Augenmerk auf die Hürden und Herausforderungen gelegt, die im Rahmen der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang (L4)* bezogen auf die Kompetenzentwicklung von Schülerinnen und Schülern auftreten können. Neben einigen Vorschlägen zur Bewältigung dieser Hürden und Herausforderungen wird anhand von Testaufgaben von VERA-8 aufgezeigt, wie inhaltliche und prozessbezogene Anforderungen zur Leitidee *Funktionaler Zusammenhang (L4)* beschrieben und wie diese Aufgaben als Ausgangspunkt für die unterrichtliche Praxis nutzbar gemacht werden können.

2 Bildungsstandards und das Kompetenzmodell im Fach Mathematik

Im Anschluss an die Ergebnisse mehrerer großer Vergleichsstudien wie etwa der PISA-Studie führte die Kultusministerkonferenz (KMK) ab dem Jahr 2003 Bildungsstandards für die Fächer Deutsch, Mathematik und Erste Fremdsprache (Englisch/Französisch) ein[1]. Damit wurde die Erwartung verbunden, Zielklarheit[2] in Bezug auf die Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in diesen Fächern zu erhalten, sowie eine Überprüfung des Erreichten zu ermöglichen (Blum et al. 2006, S. 14-16). So sollte der Übergang von einer sehr stark inputorientierten Steuerung im Bildungswesen zu einer Kombination aus Input- und Output-Steuerung erreicht werden. Die zentrale Idee dabei war es, Kriterien festzulegen, anhand derer die Leistungen von Lernenden bzw. Lerngruppen auch über die Grenzen von Bundesländern hinaus verglichen werden. Zu diesem Zweck greifen die Bildungsstandards allgemeine Bildungsziele auf und benennen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis

[1] https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html

[2] Bei den hier erläuterten Standards handelt es sich um Regelstandards (und nicht Minimal- oder Idealstandards). Es wird also durchaus davon ausgegangen, dass nicht alle Schüler das Kompetenzniveau dieser Standards erlangen können, aber auch Schüler ein weit höheres Kompetenzniveau erreichen sollten.

zu einer bestimmten Jahrgangsstufe an zentralen Inhalten erworben haben sollen (KMK 2003/2004).

Den Bildungsstandards für das Fach Mathematik liegt der Anspruch zu Grunde, den Mathematikunterricht allgemeinbildend zu gestalten. Dabei wird davon ausgegangen, dass ein allgemeinbildender Mathematikunterricht Schülerinnen und Schülern die folgenden drei Grunderfahrungen ermöglicht:

(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

(2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben (Winter, 1995, S.1).

Eingedenk dieser drei Grunderfahrungen wurde das Kompetenzmodell im Fach Mathematik entwickelt, welches im Folgenden erläutert wird. Das Kompetenzmodell, welches den Bildungsstandards im Fach Mathematik zugrunde liegt, ergibt sich nicht allein aus der Fachsystematik, sondern ist ausgerichtet an Lernprozessen und Phänomenen mathematischen Handelns im Unterricht und im Alltag. Es werden in diesem Modell zunächst die folgenden drei Dimensionen unterschieden (siehe Abbildung 1):

1. *Allgemeine mathematische Kompetenzen*
2. *Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen, strukturiert nach Leitideen*
3. *Anforderungsbereiche*

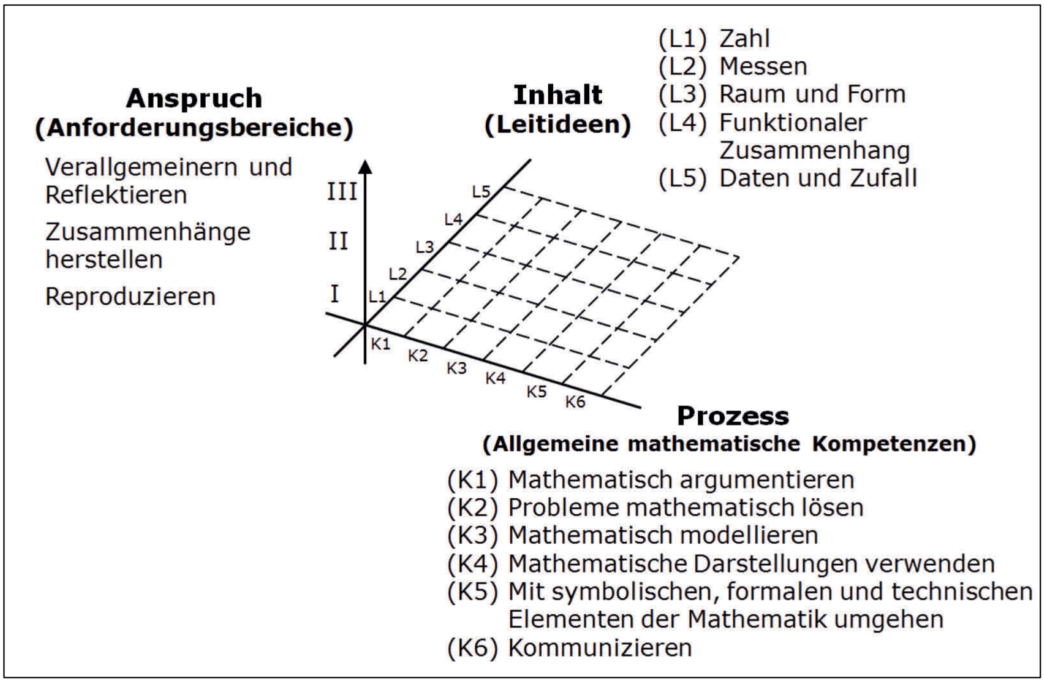


Abbildung 1: *Kompetenzmodell der Bildungsstandards*

Die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* bilden die Prozessdimension des Modells und beschreiben, auf welche Art mathematische Inhalte bearbeitet werden. Im Einzelnen sind dies die Kompetenzen *Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), Mathematisch modellieren (K3), Mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)* und *Kommunizieren (K6)*. Diese allgemeinen mathematischen Kompetenzen werden zwar im Verbund erworben bzw. angewendet, d. h. bei der Bearbeitung eines mathematischen Gegenstands werden oft mehrere der hier aufgeführten Kompetenzen benötigt, jedoch sind sie differenziert zu betrachten. Mit der getrennten Betrachtung ist zum einen die Absicht verbunden, spezifische Eigenschaften und Anforderungen von Aufgaben im Mathematikunterricht transparent zu machen. Dies ermöglicht es, den Mathematikunterricht differenzierter zu planen. Ein mathematischer Inhalt wird dann z. B. entlang verschiedener Tätigkeiten den Schülerinnen und Schülern zugänglich gemacht. Zum anderen ermöglicht die getrennte Betrachtung von allgemeinen mathematischen Kompetenzen Schülerleistungen differenzierter zu analysieren und so gezieltere Diagnosen zu stellen.

Die zweite Dimension des Modells bilden fünf *Leitideen*. Aus ihnen ergeben sich *inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen*. Diese fünf Leitideen sind *Zahl (L1), Messen (L2), Raum und Form (L3), Funktionaler Zusammenhang (L4)* und *Daten und Zufall (L5).* Mit den Leitideen ist die Absicht verbunden, die Phänomene mathematischer Tätigkeiten zu strukturieren (Freudenthal, 1983). Mit ihnen wird versucht zu fassen, welche mathematischen Mittel zum Einsatz kommen, wenn eine Situation oder ein Problem im Mathematikunterricht angegangen wird. In der Konsequenz bedeutet das, dass sie zwar mit Fachgebieten der Mathematik in Verbindung stehen, mit diesen jedoch nicht identisch sind.

Weiterhin ist darauf hinzuweisen, dass alle Leitideen gleichberechtigt nebeneinanderstehen. Auch wenn der Aufbau eines an die Fachsystematik anschlussfähigen konzeptuellen Systems Ziel des Mathematikunterrichts sein soll, sind die Leitideen und auch die inhaltsbezogenen Kompetenzen, welche zu den einzelnen Leitideen gehören, nicht zuallererst der Fachsystematik verpflichtet. Weiterhin folgen die Leitideen auch nicht einem didaktischen Aufbau im Sinne einer zeitlichen Abfolge im Lernprozess („erst kommt das Zählen, dann kommt das Messen, usw.“). Sie geben eine Ordnung ab, die es erlaubt bestimmte mathematische Phänomene unter einer Kategorie, d. h. einer Leitidee, zusammenzufassen. Leitideen können als fundamentale Ideen aufgefasst werden (vgl. Schwill, 1993), die im Mathematikunterricht auf jedem intellektuellen Niveau vermittelt werden können und in verschiedenen Situationen vielfältig anwendbar sind. In den Bildungsstandards wird dazu erläutert: „Eine Leitidee vereinigt Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete und durchzieht ein mathematisches Curriculum spiralförmig. Die Zuordnung einer inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz zu einer mathematischen Leitidee ist nicht in jedem Fall eindeutig, sondern davon abhängig, welcher Aspekt mathematischen Arbeitens im inhaltlichen Zusammenhang betont werden soll.“ (KMK 2003, S. 18).

Die dritte und letzte Dimension des Kompetenzmodells der Bildungsstandards bilden drei Anforderungsbereiche. Anforderungsbereiche beschreiben unterschiedliche Niveaus, auf denen eine bestimmte allgemeine Kompetenz zur Bearbeitung einer mathematischen Aufgabe benötigt wird. Im Anforderungsbereich I werden allgemeine Kompetenzen beschrieben, die zum Reproduzieren unterrichtlicher Inhalte befähigen. Zum Anforderungsbereich II zählen solche allgemeinen Kompetenzen, die es Schülerinnen und Schülern ermöglichen Zusammenhänge herzustellen und Gelerntes anzuwenden. In den Anforderungsbereich III gehören Kompetenzen, die es Schülerinnen und Schülern erlauben zu verallgemeinern und zu reflektieren.

Das dreidimensionale Kompetenzmodell im Fach Mathematik erlaubt es, sowohl den Lernstand von Schülerinnen und Schülern als auch Aufgaben und Probleme durch einen oder mehrere Werte auf jeder der drei „Achsen“ des Modells zu beschreiben. Dies ermöglicht es Anforderungen transparent zu machen, die Entwicklung eines kompetenzorientierten Unterrichts zu fördern sowie Schülerleistungen differenziert zu analysieren und gezielte Diagnosen zu stellen.

Alle Bestandteile des Kompetenzmodells sind zentrale Punkte der Bildungsstandards und sind eng miteinander verzahnt. Dies bedeutet auch, dass prozessbezogene Kompetenzen stets im Verbund mit inhaltsbezogenen Kompetenzen erworben werden und umgekehrt. Im Folgenden wird aus dem Kompetenzmodell die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang (L4)* herausgegriffen und erläutert.

3 Die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang*

Die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang (L4)* umfasst Phänomene mathematischen Handelns, wie sie für den Umgang mit Zuordnungen, Veränderungen und auch Gleichungssystemen typisch sind. In den Bildungsstandards im Fach Mathematik werden dazu verschiedene inhaltsbezogene Kompetenzen unter der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang (L4)* zusammengefasst (KMK 2003). Dazu zählen, dass die Schülerinnen und Schüler

- Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge nutzen,
- funktionale Zusammenhänge erkennen und beschreiben und diese in sprachlicher, tabellarischer oder graphischer Form sowie gegebenenfalls als Term darstellen,
- unterschiedliche Darstellungen funktionaler Zusammenhänge (wie lineare, proportionale und antiproportionale) analysieren, interpretieren und vergleichen,
- realitätsnahe Probleme im Zusammenhang mit linearen, proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen lösen,
- lineare Gleichungssysteme graphisch interpretieren,
- Gleichungen, und lineare Gleichungssysteme kalkülmäßig bzw. algorithmisch, auch unter Einsatz geeigneter Software lösen, und ggf. die Effektivität ihres Vorgehens mit anderen Lösungsverfahren (wie mit inhaltlichem Lösen oder Lösen durch systematisches Probieren) vergleichen,
- Fragen der Lösbarkeit und Lösungsvielfalt von linearen und quadratischen Gleichungen sowie linearen Gleichungssystemen untersuchen und diesbezüglich Aussagen formulieren,
- kennzeichnende Merkmale von Funktionen bestimmen und Beziehungen zwischen Funktionsterm und Graph herstellen,
- insbesondere lineare und quadratische Funktionen sowie Exponentialfunktionen bei der Beschreibung und Bearbeitung von Problemen anwenden,
- die Sinusfunktion zur Beschreibung von periodischen Vorgängen verwenden,
- Veränderungen von Größen mittels Funktionen, auch unter Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms beschreiben,
- zu vorgegebenen Funktionen Sachsituationen angeben, die mit Hilfe dieser Funktion beschrieben werden können. (KMK 2003).

3.1 Funktionales Denken

Wie die beschriebenen Kompetenzen erkennen lassen, ist es Ziel des Mathematikunterrichts, dass Schülerinnen und Schüler erlernen, mit Funktionen flexibel und auf vielerlei Weise umzugehen (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand 2016). Die (Weiter-)Entwicklung des sogenannten *funktionalen Denkens* (Vollrath 1989) wird durch den

Umgang mit vielfältigen Phänomenen im Bereich der Funktionen ermöglicht. Grundlegend für die Fähigkeit in unterschiedlichen Situationen angemessen umgehen zu können, ist der Aufbau eines entsprechenden Verständnisses des Funktionsbegriffs. In der Literatur werden dabei in Bezug auf Funktionen häufig drei Arten von inhaltlichen Deutungen, sogenannte Grundvorstellungen, unterschieden (vom Hofe & Blum, 2016; Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand 2016). Zum einen können funktionale Zusammenhänge als (eindeutige) *Zuordnungen* aufgefasst werden. Aus dieser Perspektive wird eine Funktion dadurch charakterisiert, dass sie jedem Wert einer Größe genau einen Wert einer zweiten Größe zuordnet bzw. jedem Element einer Definitionsmenge genau ein Element einer Zielmenge zuordnet. Das kann sowohl in der frühen Beschäftigung mit Funktionen geschehen, etwa wenn Kinder ihren Körpergrößen oder Haarfarben zugeordnet werden, behält aber auch später seine Bedeutung bei, etwa wenn Funktionswerte an einzelnen Stellen bestimmt werden. Sehr deutlich erkennbar ist diese Sichtweise bei der tabellarischen Darstellung einer Funktion, bei der jeweils dem Wert einer Zelle der Wert der benachbarten Zelle zugeordnet wird, was in Abbildung 2 der horizontalen Leserichtung der Tabelle entspricht.

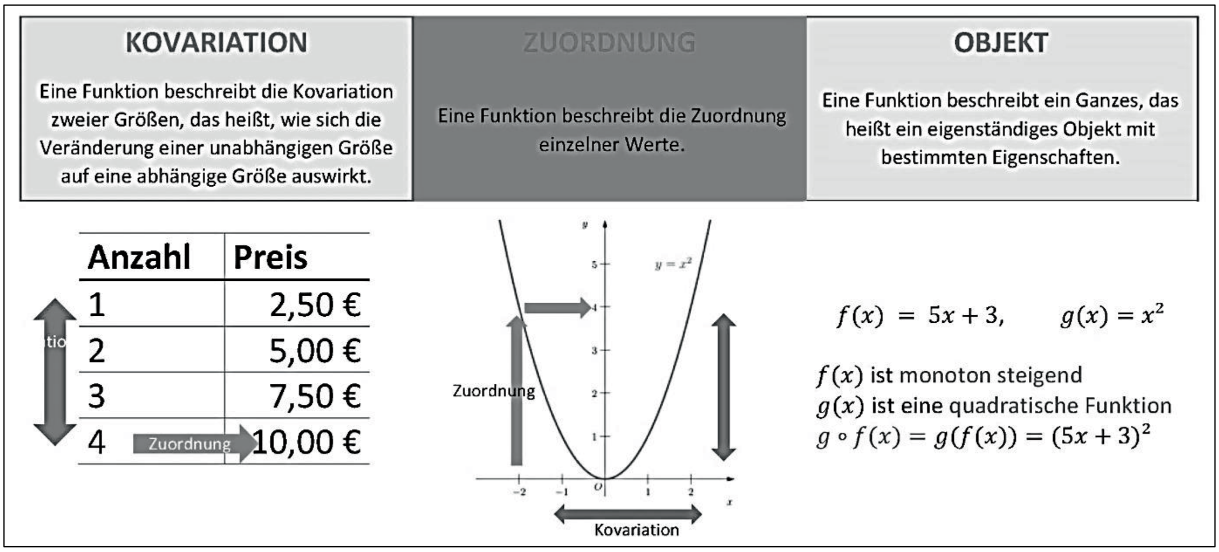


Abbildung 2: *Grundvorstellungen von Funktionen*

Wird dieselbe Tabelle eher vertikal gelesen, so wird eine andere Auffassung des Funktionsbegriffs deutlich, nämlich die *Kovariationsvorstellung* (Rolfes, Roth & Schnotz, 2013). Aus dieser Perspektive ist für Funktionen charakteristisch, dass sie erfassen, wie sich Änderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirken bzw. wie die zweite Größe durch die erste beeinflusst wird. Mit anderen Worten geben Funktionen also wieder, wie sich beispielsweise y-Werte verändern, wenn sich die zugehörigen x-Werte ändern. In Bezug auf die eben erwähnte Wertetabelle wird diese inhaltliche Bedeutung dadurch erfasst, dass die Veränderung der x-Werte in vertikaler Leserichtung der Tabellenspalte mit der Veränderung der y-Werte in der nebenstehenden Spalte verglichen wird. So ist das Ableiten von „Wenn…, dann…“-Aussagen möglich, etwa „Wenn die x-Werte steigen, dann steigen auch die y-Werte“. Diese Vorstellung lässt sich ebenfalls in der graphischen Darstellung einer Funktion wiederfinden, indem der Verlauf eines Graphen betrachtet wird. Es wird bei der *Kovariationsvorstellung* dabei ein lokaler Bereich betrachtet, auf dem die Veränderung der Funktionswerte erfasst wird. Es ist jedoch auch möglich, den Graphen einer Funktion mit Hilfe der *Zuordnungsvorstellung* zu deuten, indem einzelne Punkte, das heißt die Zuordnung zweier Werte zu einem Wertepaar, betrachtet werden. Damit entspricht diese Sicht eher einer punktuellen Sichtweise auf die Funktion. In beiden Repräsentationsformen, sowohl der Wertetabelle als auch dem Graphen, ist es meist nicht möglich, die Funktion als Ganzes, sondern nur Ausschnitte von ihr darzustellen. Die Grundvorstellung, eine Funktion als ein einziges Objekt, das einen Zusammenhang als Ganzes beschreibt, zu betrachten, wird als *Objektvorstellung* bezeichnet. Diese Vorstellung ist insbesondere für das fortgeschrittene Arbeiten mit Funktionen, bei denen Operationen wie das Verketten oder Ableiten von Funktionen ausgeführt werden, wichtig. In der Sekundarstufe I kommt diese Vorstellung zum Tragen, wenn Funktionen auf bestimmte Eigenschaften wie etwa Monotonie, Symmetrie oder Zugehörigkeit zu einer Funktionsklasse hin untersucht werden. Besonders im Vordergrund steht diese Vorstellung bei der Betrachtung der symbolischen Darstellung einer Funktion durch einen Term, an dem durch die Betrachtung bestimmter Kenngrößen, wie etwa Steigung und y-Achsenabschnitt bei einer linearen Funktion, Eigenschaften wie Monotonie und Schnittpunkte mit der y-Achse, bestimmt werden können. Die drei Grundvorstellungen von Funktionen werden in Abbildung 2 noch einmal veranschaulicht.

3.2 Darstellungsformen, Darstellungswechsel und typische Lernschwierigkeiten

Im obigen Abschnitt wurden drei Darstellungsformen von Funktionen erwähnt, nämlich die tabellarische, die graphische sowie die symbolische Repräsentation. Diese drei Formen lassen sich noch erweitern um die verbale Darstellung einer Funktion, bei der funktionale Zusammenhänge im Text repräsentiert werden sowie um die reale, situative Darstellung einer Funktion. So können Schülerinnen und Schüler beispielsweise Weg-Zeit-Zusammenhänge in einer realen Situation erfassen und diese dann in andere Darstellungsformen wie eine Tabelle oder eine Graphik übertragen. Dabei spielt allerdings meist die verbale Darstellung der Beobachtungen eine entscheidende Rolle, sodass die situativen und die verbalen Darstellungsformen besonders eng miteinander verknüpft sind.

Es wurde oben ebenfalls bereits deutlich, dass bei unterschiedlichen Darstellungen unterschiedliche Grundvorstellungen im Vordergrund stehen können, gleichzeitig aber dieselben Objekte betrachtet werden. Um flexibel mit unterschiedlichen Problemsituationen im Bereich funktionale Zusammenhänge umgehen zu können, sind dementsprechend Fähigkeiten zu einem flexiblen Umgang mit und auch zu Wechseln zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen notwendig. Gerade diese Tätigkeiten stellen Schülerinnen und Schüler aber häufig vor große Herausforderungen (Nitsch 2015). Dabei ist zudem zu beachten, dass auch die Richtung des Darstellungswechsels eine Rolle spielt, sodass beispielsweise der Wechsel von einer Wertetabelle zu einem Graphen durchaus anderer Fähigkeiten bedarf als die umgekehrte Richtung vom Graphen zur Wertetabelle (Janvier 1987). Besonders deutlich zeigt sich dies, wenn man die nötigen Fähigkeiten betrachtet, die es bedarf, eine Wertetabelle mit Hilfe einer gegebenen Funktionsvorschrift auszufüllen (von algebraisch zu tabellarisch) im Gegensatz zu den Fähigkeiten zu der deutlich schwierigeren Umformung von einer Tabelle zur algebraischen Repräsentation.

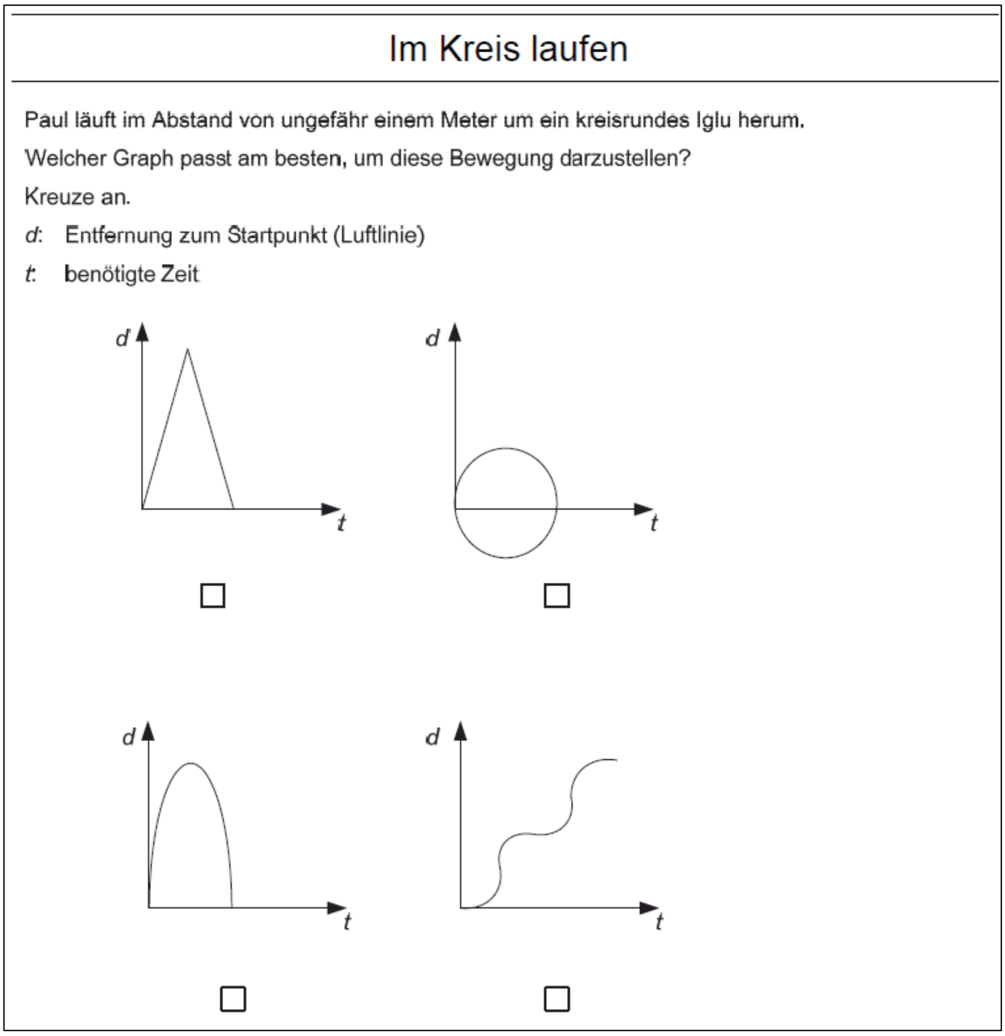
Des Weiteren können Darstellungswechsel auch nur innerhalb einer Darstellungsform geschehen. Beispielsweise kann bei einer graphischen Darstellung für Prognosen oder Zwischenwerte ein anders skaliertes Koordinatensystem betrachtet werden (z.B. durch Hineinzoomen mit einem graphischen Taschenrechner) (Laakmann, 2013), in einer Tabelle können Wertepaare ergänzt werden und Funktionsterme oder -gleichungen können durch algebraische Umformungen in andere Gestalt gebracht werden. Für eine adäquate Begriffsbildung von Funktionen sind allerdings die sogenannten *conversions* (Duval, 2000), das heißt die Wechsel zwischen zwei Darstellungsformen, noch entscheidender. Denn oft sind Lernende nur dann zu erfolgreichem Problemlösen im Bereich des *Funktionalen Zusammenhangs* fähig, wenn sie flexibel mit unterschiedlichen Darstellungsformen umgehen können. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn funktionale Zusammenhänge einer verbalen oder situativen Darstellung, etwa einem realweltlichen Kontext, entnommen werden und mit einer passenden Funktion modelliert werden müssen. Tabelle 1 gibt Beispiele für Tätigkeiten bei Darstellungswechseln.

Tabelle 1: *Tätigkeiten beim Darstellungswechsel (nach Laakmann, 2013); grau unterlegt: Tätigkeiten beim Darstellungswechsel innerhalb einer Darstellungsform*

von / nach	verbal/situativ	graphisch	tabellarisch	algebraisch
verbal/situativ	umformulieren	skizzieren	Werte finden	algebraisch berechnen
graphisch	interpretieren	Skalenskalierung ändern	ablesen	annähern, Kurven durch Punkte legen
tabellarisch	lesen	Punkte einzeichnen	weitere Werte ermitteln	annähern, anpassen (z.B. Regressionen)
algebraisch	Formeln interpretieren	skizzieren	berechnen	Algebraisch umformulieren

Es existiert eine Vielzahl an Arbeiten, die sich mit Lernschwierigkeiten im Bereich *Funktionaler Zusammenhang (L4)* beschäftigen, deren Wiedergabe den Rahmen der vorliegenden Handreichung sprengen würde. Stattdessen werden drei typische Fehler bei Darstellungswechseln beschrieben. Für eine ausführliche Darstellung sei auf Nitsch (2015) verwiesen.

Einer der bekanntesten Fehlertypen ist der Graph-als-Bild-Fehler, auch ikonische Interpretation genannt, bei dem der Funktionsgraph als Situationsabbild interpretiert wird, der wirkliche Zusammenhang aber nicht erkannt wird. Die Beispielaufgabe „Im Kreis laufen" (vgl. Abbildung 3) lässt eine solche Fehlinterpretation sichtbar werden. Dort soll das Diagramm angekreuzt werden, das bei einem Lauf um ein kreisrundes Iglu die Entfernung zum Startpunkt, gemessen in der Luftlinie, über die Zeit hinweg widerspiegelt. Während es sich bei der dritten Antwortalternative (unten links) um die richtige Antwort handelt, entspricht das zweite Diagramm (oben rechts) dem Graph-als-Bild-Fehler, bei dem die Form des Laufweges mit der zu betrachtenden funktionalen Abhängigkeit der Entfernung von der Zeit gleichgesetzt wird. Um diese Fehlvorstellung zu beheben, ist eine stärker auf die Kovariation abzielende Beschäftigung mit der Situation sinnvoll, bei der die Schülerinnen und Schüler nachvollziehen, wie sich die Entfernung über die Zeit hinweg verändert. Dies kann auch enaktiv durch Ablaufen der Strecke und Messung der Entfernung geschehen (vgl. Brauner 2008).



Im Kreis laufen

Paul läuft im Abstand von ungefähr einem Meter um ein kreisrundes Iglu herum.
Welcher Graph passt am besten, um diese Bewegung darzustellen?
Kreuze an.
d: Entfernung zum Startpunkt (Luftlinie)
t: benötigte Zeit

Abbildung 3: *Aufgabe „Im Kreis laufen“*

Ein anderer weit verbreiteter Fehlertyp bezieht sich auf die Verwechslung von Steigung und Funktionswert. Die Beispielaufgabe aus dem CODI-Test[3] (vgl. Abbildung 4) lässt eine solche Fehlvorstellung erkennen. Dargestellt ist ein Weg-Zeit-Diagramm und es wird nach dem Fahrzeug mit der höchsten Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 5 gefragt. Dementsprechend sollte Fahrzeug Nr. 1 genannt werden, da dessen Graph die höchste Steigung aufweist. Ein häufiger Fehler ist aber, dass Fahrzeug Nr. 2 genannt wird, da dessen Graph an der Stelle t = 5 über dem Graphen von Fahrzeug Nr. 1 liegt. In diesem Fall ist es möglich, dass der Funktionswert mit der Steigung verwechselt wurde. Es kann allerdings auch sein, dass der Schüler oder die Schülerin noch kein verlässliches Konzept von Geschwindigkeit aufgebaut hat und es daher zu Schwierigkeiten kommt.

[3] Der Test ist abrufbar unter www.codi-test.de.

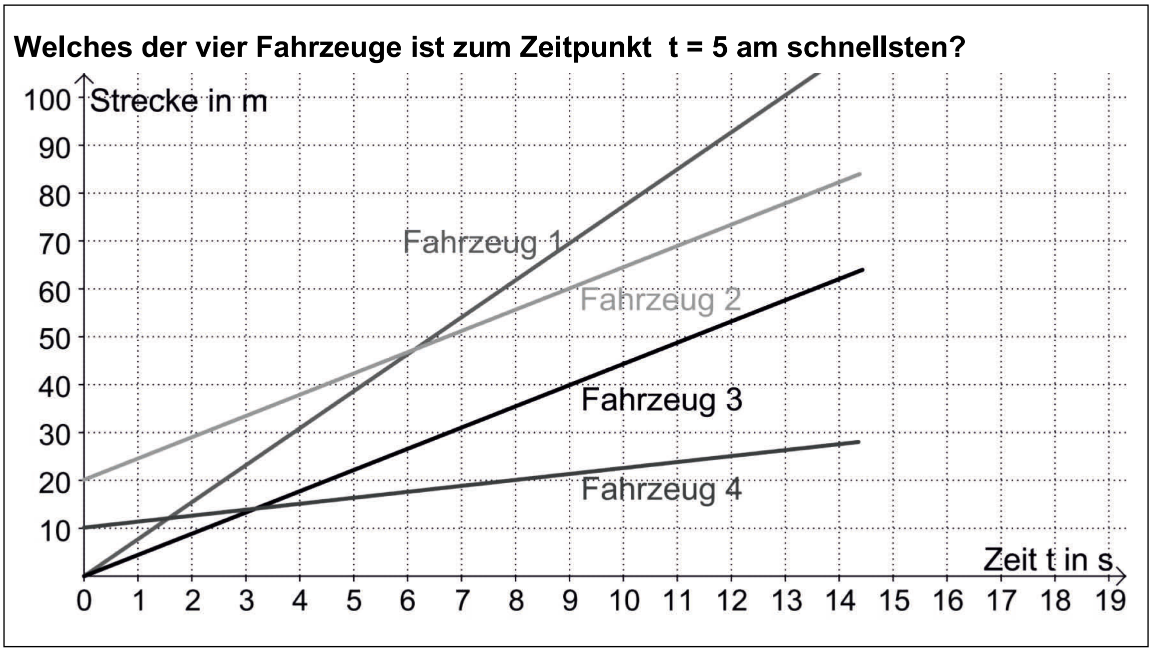


Abbildung 4: *Beispielaufgabe aus dem CODI-Test zur Verwechslung Steigung und Höhe*

Der dritte häufige Fehler, die Verwechslung von Intervall und Punkt, kann ebenfalls mit dem Diagramm in Abbildung 4 erfasst werden, indem gefragt wird, wann Fahrzeug 1 eine längere Strecke zurücklegte als Fahrzeug 2. In Studien tendierten Lernende dazu, das „wann" als unpräzise zu empfinden und statt eines Intervalls (hier etwa von t = 6 bis t = 14) einen Punkt (hier den Schnittpunkt bei t = 6) anzugeben (Bell & Janvier 1981, Preece 1983). Der Fehler besteht also darin, Punkte anzugeben, obwohl die Betrachtung von Intervallen nötig gewesen wäre.

3.3 Digitale Werkzeuge in der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang*

Einer der großen Vorteile des Einsatzes digitaler Werkzeuge wie Dynamischer Geometrie-Software (DGS), graphischer Taschenrechner, Tabellenkalkulation oder Funktionenplotter liegt in der einfachen Visualisierung von ansonsten nur mühsam sichtbar zu machenden Zusammenhängen. Durch Schieberegler in einer DGS können die Auswirkungen von sich ändernden Parametern einfach erkundet werden (vgl. Abbildung 5).

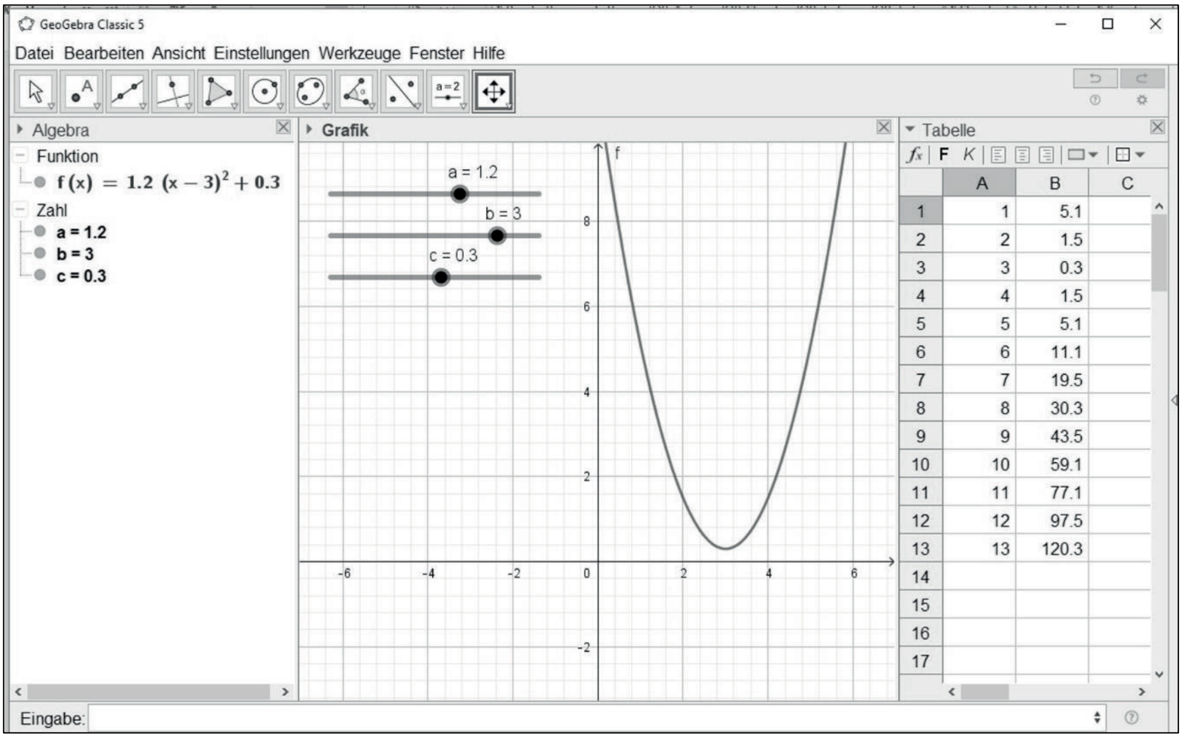


Abbildung 5: *Beispiel für verschiedene Darstellungsformen inkl. Schieberegler in der DGS GeoGebra*

Dabei existieren heute eine Vielzahl sogenannter Multirepräsentationswerkzeuge, die dazu in der Lage sind, verschiedene, voneinander abhängige Darstellungen einer Funktion anzuzeigen. In der obigen Darstellung (Abbildung 5) sind drei Fenster zu erkennen, in denen sowohl die algebraische, die graphische als auch die tabellarische Darstellung einer Funktion zu sehen sind. Diese drei Darstellungen können mit Hilfe von Schiebereglern gleichzeitig dynamisch verändert werden.

Die Aufgabe „Joggen“ (vgl. Abbildung 6) zeigt, dass auch Tabellenkalkulationen im Zusammenhang mit funktionalen Zusammenhängen gut eingesetzt werden können. In der abgebildeten Teilaufgabe geht es zum einen um das Erkennen der Bildungsvorschrift für den Funktionsterm, zum anderen aber auch um die korrekte Syntax in Zellenschreibweise. Im Unterricht können solche Tabellen weiterführend genutzt werden und die zugehörigen Diagramme geplottet werden. Diese können dann zu Diskussionen etwa über Gültigkeitsbereiche einer solchen Faustformel oder zur Kontrastierung mit anderen Modellen führen.

Die ideale Trainingsbelastung

Rechnen Sie 200 minus Lebensalter. Das ergibt den Maximalpuls. Beim Training sollte man mindestens 65% vom Maximalpuls erreichen, aber auch nicht mehr als 85%.

Teilaufgabe 3

Zu einem Lauftreff kommen ganz unterschiedlich alte Menschen. Der Trainer möchte jedem Einzelnen sehr schnell den Bereich für seinen Trainingspuls nennen können. Er will deshalb eine Tabelle erstellen, aus der er für jedes Lebensalter sofort die richtigen Werte für den Trainingspuls ablesen kann. Er verwendet dazu eine Tabellenkalkulation:

	A	B	C	D
1	**Pulswerte beim Training**			
2				
3	**Lebensalter**	**Maximalpuls**		
4	15	185	121	157
5	16			
6	17			
7	18			
8	19			
9	20			
10	21			
11	22			
12	23			
13	24			
14	25			
15	26			
16	27			
17	28			
18	29			
19	30			

Der Wert für die obere Grenze des Trainingspulses in der Zelle D4 wird mit einer Formel berechnet. In dieser Formel wird für das Lebensalter die Zellbezeichnung A4 verwendet.

Gib eine passende Formel hierfür an.

D4: =

***Abbildung 6:** Beispielaufgabe „Joggen“*

4 Allgemeine mathematische Kompetenzen und die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang*

Wie in Abschnitt 2 bereits erwähnt, unterscheidet das Kompetenzmodell der Bildungsstandards im Fach Mathematik allgemeine mathematische Kompetenzen (Prozessdimension), inhaltsbezogene mathematischen Kompetenzen, strukturiert nach Leitideen (Inhaltsdimension) und Anforderungsbereiche. Dem liegt der Gedanke zugrunde, dass Prozess- und Inhaltskompetenzen stets im Verbund erworben werden. Um diesen Gedanken zu konkretisieren, wird im Folgenden erläutert, wie Prozesskompetenzen im Verbund mit Inhaltskompetenzen der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang (L4)* gefördert und diagnostiziert werden können. Diese Erläuterungen werden ergänzt durch Hinweise dazu, welche Möglichkeiten digitale Medien und Werkzeuge in diesen Bereichen bieten bzw. worauf bei der Nutzung solcher Werkzeuge zu achten ist.

4.1 Mathematisch argumentieren

Die Kompetenz *Mathematisch argumentieren (K1)* umfasst Tätigkeiten wie das Stellen von für die Mathematik charakteristischen Fragen und das Äußern von begründeten Vermutungen. Ebenso gehört zu dieser Kompetenz das Entwickeln mathematischer Argumentationen wie Erläuterungen, Begründungen und Beweise. Außerdem zählen auch das Beschreiben und Begründen von Lösungswegen dazu (KMK 2003).

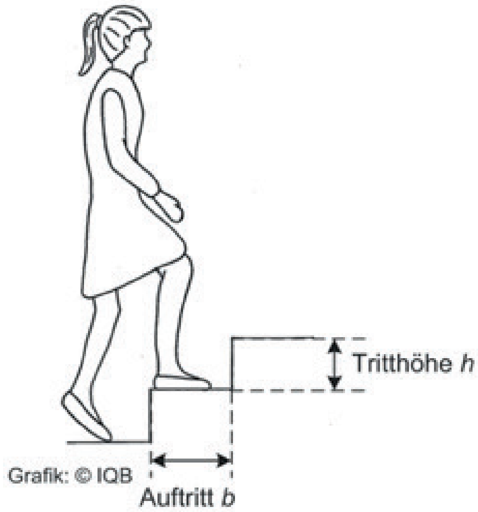
Die Aufgabe „Treppenmaße“ (vgl. Abbildung 7) zeigt exemplarisch, wie die Kompetenz des Argumentierens innerhalb der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang (L4)* gefördert werden kann. Dort werden die Schülerinnen und Schüler zunächst in den situativen Kontext der Schrittmaßregel für Treppen eingeführt. Die dritte Teilaufgabe zu diesem Kontext besteht darin, eine Behauptung mit mathematischen Mitteln zu prüfen und zu belegen oder zu widerlegen, spricht also insbesondere die Kompetenz des Argumentierens an. Die Aufgabe zeigt recht deutlich, wie wichtig der flexible Umgang mit den Grundvorstellungen zu Funktionen ist. So wird in der Aufgabe eine Gleichung mit zwei Variablen gegeben, die aber noch nicht der vertrauten symbolischen Darstellung einer Funktion entspricht, bei der jeweils eine Variable auf einer Seite des Gleichheitszeichens steht. Dennoch ist es nötig zur Lösung der Aufgabe die Kovariation der beiden Variablen zu betrachten. Deutlich wird dieser Zusammenhang durch die verbale Beschreibung der Situation in dem „je…, desto…“-Satz. Damit dieser Satz überhaupt in Zusammenhang mit einer funktionalen Betrachtung gebracht werden kann, ist es nötig, dass Schülerinnen und Schüler über die Vorstellung verfügen, dass eine Funktion angibt, wie eine Größe in Abhängigkeit von der Variation einer anderen Größe variiert. In der gegebenen Gleichung ist es also notwendig, zu überlegen wie sich der Auftritt b verändert, wenn die Tritthöhe h immer kleiner wird. Da sich der Auftritt b durch Umstellen der gegebenen Gleichung auch als $b = 63-2h$ schreiben lässt, lässt sich schnell ableiten, dass die zu prüfende Aussage stimmt. Diese Gleichung kann auch als Gleichung einer linearen Funktion mit negativer Steigung von -2 und y-Achsenabschnitt 63 aufgefasst werden. Dabei zeigt die negative Steigung an, dass die Werte für b bei wachsendem h immer kleiner werden. Da in der Aufgabe allerdings von kleiner werdendem h gesprochen wird, müssen die Werte der x-Achse von rechts nach links betrachtet werden, womit also bei kleiner werdendem h der Auftritt b steigt. Dieser Zusammenhang kann von den Schülerinnen und Schülern auch durch das Anfertigen einer Tabelle entdeckt und zur Argumentation verwendet werden. Dazu ist zunächst das Einsetzen verschiedener Werte nötig und dann die Feststellung der Linearität des Zusammenhangs.

Um also in dieser Teilaufgabe korrekt argumentieren zu können, ist es unerlässlich, ein entsprechendes funktionales Verständnis zu aktivieren. Dies zeigt erneut, dass die in den Bildungsstandards formulierten prozessbezogenen Kompetenzen stets im Zusammenhang mit den inhaltlichen Leitideen erworben werden müssen und keinesfalls „inhaltsleer“ sind.

Treppenmaße

Man muss jeden Tag viele verschiedenartige Treppen überwinden. Damit man das Treppensteigen als angenehm empfindet, orientieren sich Treppenbauer an der folgenden Schrittmaßregel (siehe Abbildung):

Schrittmaßregel: $\mathbf{2 \cdot h + b = 63\,cm}$



(nicht maßstabsgerecht)

Teilaufgabe 3

Beim Bau einer Treppe soll die Schrittmaßregel $2 \cdot h + b = 63\,\text{cm}$ beachtet werden.

Peter behauptet: „Es gilt dann: Je kleiner die Tritthöhe *h*, desto größer der Auftritt *b*.“

Hat Peter Recht?

Kreuze an.

☐ Ja ☐ Nein

Begründe deine Antwort.

Abbildung 7: *Beispielaufgabe „Treppenmaße“*

4.2 Probleme mathematisch lösen

Die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen (K2)* bezieht sich darauf, Aufgaben zu lösen, die keine Routinen, bereits strukturierte Lösungswege oder ähnliches abfragen, sondern die eine Art Hürde zwischen Ausgangspunkt und dem Zielzustand besitzen. Laut Dörner (1983), ist „von Problemen [...] die Rede, wenn die Mittel zum Erreichen eines Zieles unbekannt sind oder die bekannten Mittel auf neue Weise zu kombinieren sind, aber auch dann, wenn über das angestrebte Ziel keine klaren Vorstellungen existieren“ (S. 302 f.). Um Probleme mathematisch zu lösen, können verschiedene heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien nützlich sein. Sie helfen beispielsweise, sich einem Problem zu nähern, es zu strukturieren oder einen Lösungsplan zu erstellen (Bruder 2002, Bruder & Collet 2012).

Ein Beispiel für eine Aufgabe innerhalb der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang (L4)*, bei der vor allem Problemlösekompetenzen benötigt werden, ist die Aufgabe „Brunnen“ aus dem aktuellen VERA-8-Testheft (vgl. Abbildung 8). Dort wird die Falltiefe einer Münze der Fallzeit zugeordnet. In der abgebildeten Teilaufgabe wird aus mathematischer Perspektive nach dem x-Wert gefragt, an dem $y=152{,}5$ gilt. Da der gegebene Zusammenhang allerdings quadratisch ist, verfügen die Schülerinnen und Schüler in der Klasse 8 noch nicht über Routineverfahren, solche Gleichungen zu lösen, weswegen sie auf Problemlöseverfahren zurückgreifen müssen. Insbesondere ein Darstellungswechsel wie etwa die Nutzung einer Tabelle als heuristisches Hilfsmittel kann dabei helfen, die Ergebnisse eines systematischen Probierens festzuhalten und sich so der gesuchten Lösung zu nähern.

Brunnen

Auf der Festung Königstein in Sachsen befindet sich ein 152,5 m tiefer Brunnen. Sarah lässt eine Münze in diesen Brunnen fallen.
Der Weg der Münze beim Fallen kann annähernd mit der Gleichung $y = 5 \cdot x \cdot x$ beschrieben werden. Dabei wird der Weg y der Münze beim Fall in Metern und die Zeit x nach dem Loslassen in Sekunden angegeben.

Wie viele Sekunden fällt die Münze etwa, bis sie am Boden angekommen ist?

.... s

Notiere deinen Lösungsweg.

***Abbildung 8:** Beispielaufgabe „Brunnen“*

4.3 Mathematisch modellieren

Die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang (L4)* bietet die Möglichkeit reale Phänomene unter funktionalen Gesichtspunkten zu modellieren. Zur Kompetenz *Mathematisch modellieren (K3)* gehört es, dass Schülerinnen und Schüler den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen (Kaiser, Blum, Borromeo Ferri, & Greefrath, 2015). Weiterhin gehört zu dieser Kompetenz, dass Schülerinnen und Schüler im jeweiligen mathematischen Modell arbeiten und Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen.

Beim mathematischen Modellieren kommt den Grundvorstellungen eine besondere Bedeutung zu, da diese, wie in Abbildung 9 zu sehen ist, als eine Art Bindeglieder zwischen dem realweltlichen Kontext und der Mathematik gesehen werden können. Dies erklärt sich dadurch, dass die Grundvorstellungen den mathematischen Objekten und Begriffen eine inhaltliche Bedeutung verleihen. Wenn also ein mathematisches Modell, etwa eine Funktion, einem bestimmten realweltlichen Kontext zugeordnet werden muss, ist die Aktivierung von Grundvorstellungen unerlässlich. Gleichzeitig wird durch den Kontakt mit realweltlichem Kontext den mathematischen Begriffen auch eine inhatliche Bedeutung verliehen, womit auch Grundvorstellungen aufgebaut werden können.

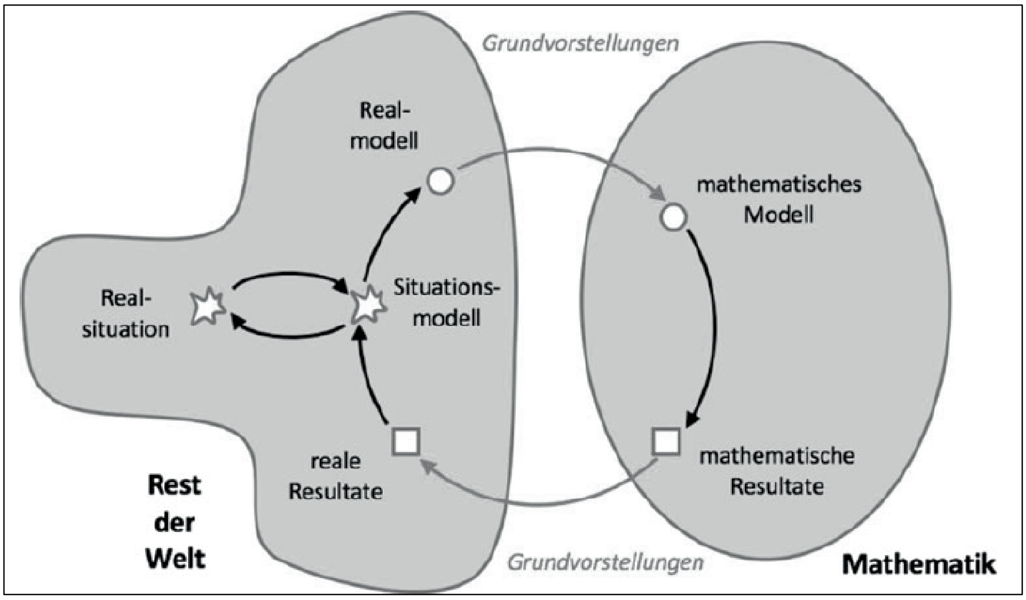


Abbildung 9: *Grundvorstellungen beim Modellieren (Greefrath 2018)*

Das mathematische Modellieren geht zunächst stets von einer Realsituation aus, deren Problemhaltigkeit von den Schülerinnen und Schülern erfasst werden muss. Dadurch entsteht eine mentale Repräsentation der Situation, das sogenannte Situationsmodell. Aufbauend auf diesem individuellen Verständnis der Situation müssen die Lernenden dann die reale Problemstellung soweit strukturieren und vereinfachen, dass eine Übersetzung in die Sprache der Mathematik, das heißt die Erstellung eines mathematischen Modells, möglich wird. Durch die Anwendung mathematischer Methoden kann dann ein mathematisches Resultat gefunden werden, welches wiederum auf die reale Situation rückbezogen werden muss. An dieser Stelle spielen erneut die Grundvorstellungen zu den mathematischen Objekten, mit denen man gearbeitet hat, eine entscheidende Rolle. Im Anschluss müssen die so gefundenen realen Resultate noch validiert, das heißt auf ihre Plausibilität hin überprüft werden. Dazu sollten sowohl Annahmen, Modelle als auch das Ergebnis selbst kritisch hinterfragt werden. Der so dargestellte Kreislauf schließt dann, wenn ein befriedigendes Ergebnis gefunden wurde, mit dessen Vermittlung.

Die Aufgabe „Tropfender Wasserhahn“ (vgl. Abbildung 10) illustriert, wie die Kompetenz *Mathematisch modellieren (K3)* in dem aktuellen VERA-8-Test im Bereich *Funktionaler Zusammenhang (L4)* gefordert wird.

Dort wird eine Situation beschrieben, die durchaus Bezug zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler besitzt und gleichzeitig ein Phänomen von gesellschaftlicher Bedeutung, nämlich Wasserverschwendung anspricht. Dabei wird die Situation bereits durch das Vorgeben einiger Annahmen vereinfacht, so etwa, dass das Wasser in gleichmäßigen Abständen tropft und sich dies in dem betrachteten Zeitraum nicht ändert. So können sich die Schülerinnen und Schüler auf die Übersetzungsprozesse in die und aus der Mathematik konzentrieren, auch wenn die Thematisierung solcher Annahmen und der entsprechenden Konsequenzen beim unterrichtlichen Einsatz einer solchen Aufgabe durchaus von Interesse sein kann. Bleiben solche Diskussionen aus, so besteht die Gefahr, dass einem Modell (hier: die perfekte Proportionalität) blindlings vertraut wird, obwohl ein solches Modell die Realität nur selten wirklich abbildet.

Der Kern der Aufgabe besteht darin, ein geeignetes mathematisches Modell zu finden, mit dem die Menge des verloren gegangenen Wassers nach einer Woche bestimmt werden kann. Dazu müssen wiederum bestimmte Grundvorstellungen zu Funktionen aktiviert werden, zum einen die Zuordnungsvorstellung, da die Zuordnung „Zeit – verlorene Wassermenge“ betrachtet werden muss, zum anderen aber auch die Kovariationsvorstellung, da insbesondere die Proportionalität der verlorenen Wassermenge zur Zeit angenommen werden muss, um zu einer Lösung der Frage zu kommen. Führt man die Aufgabe noch weiter, so kann die zu betrachtende Funktion auch als lineare Funktion mit bestimmten Eigenschaften identifiziert werden. Diese Auffassung entspricht der Betrachtung der Funktion unter der Objektvorstellung und kann insbesondere bei der Validierung des verwendeten Modells sinnvoll sein. Dies wird in der knappen Formulierung der Beispielaufgabe allerdings aus testtheoretischen sowie zeitökonomischen Gründen nicht explizit gefordert, sollte im Unterricht aber auch thematisiert werden.

Zur Lösung der Aufgabe kann dabei zunächst der Zuwachs der verlorenen Wassermenge pro Stunde bestimmt werden und mit der Anzahl der Stunden in einer Woche multipliziert werden. Das Ergebnis von circa 50,4 Litern ist dann der gesuchte Wert. Zu seiner Überprüfung sollte Stützpunktwissen herangezogen werden, um die Größenordnung zu vergleichen. So fassen handelsübliche Putzeimer häufig 10 Liter. Solche Größen können helfen, die Plausibilität von ermittelten Ergebnissen abzuschätzen.

Bei Familie Rector tropft seit einigen Tagen ein undichter Wasserhahn.

Ben, der Sohn der Familie, will untersuchen, wie viel Wasser dabei verloren geht. Er fängt das gleichmäßig tropfende Wasser in einem Messbecher auf.

Ben sieht ab und zu nach, wie viel Wasser inzwischen im Messbecher ist. Die Tabelle zeigt Bens Messergebnisse.

Zeit in Stunden	0,5	4
Wassermenge in cm^3	150	1200

Ben erfährt, dass der Wasserhahn erst in einer Woche repariert werden kann.

Er überlegt, wie viel Wasser in einer Woche verloren geht, wenn der Wasserhahn gleichmäßig weitertropft.

Gib die Menge an.

.... Liter

Notiere deinen Lösungsweg.

Abbildung 10: *Beispielaufgabe „Tropfender Wasserhahn“*

4.4 Mathematische Darstellungen verwenden

Die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden (K4)* erfordert, verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen anzuwenden, zu interpretieren und zu unterscheiden, Beziehungen zwischen Darstellungsformen zu erkennen und unterschiedliche Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auszuwählen und zwischen ihnen zu wechseln. Die Ausführungen in Abschnitt 3.2 zu den unterschiedlichen Darstellungsformen und den typischen Schülerfehlern in diesem Bereich haben bereits die besondere Rolle dieser Kompetenz im Umgang mit Funktionen gezeigt.

Auch in den VERA-8 Aufgaben finden sich daher einige Aufgaben, in denen besonders Kompetenzen in diesem Bereich erforderlich sind, beispielsweise die Teilaufgabe in Abbildung 11, die sich an die in 4.2 präsentierte Aufgabe „Brunnen“ anschließt.

Dort ist es Aufgabe der Schülerinnen und Schüler, den dargestellten Sachverhalt des Fallens einer Münze in einen Brunnen über die Zeit hinweg in einem Funktionsgraphen wiederzuerkennen und anzukreuzen. Dabei bilden die verschiedenen Antwortmöglichkeiten auch unterschiedliche Fehlvorstellungen ab. Der erste Graph zeigt einen linearen Zusammenhang für den gilt, je länger die Münze fällt, desto weiter der zurückgelegte Weg. Diese Annahme ist ja auch für die gegebene Situation durchaus gerechtfertigt, allerdings setzt sie eine gleichbleibende Fallgeschwindigkeit voraus. Da die Schülerinnen und Schüler am Ende der Klasse 8 noch nicht unbedingt über Wissen zu quadratischen Funktionen verfügen, können sie kaum auf Eigenschaften der beiden Funktionenarten und damit auf die Objektvorstellung zurückgreifen. Eine kovariationale Betrachtung der Situation ist in diesem Fall gewinnbringender und wirkt einer Übergeneralisierung linearer Zusammenhänge entgegen. Wird die zweite Antwortmöglichkeit angekreuzt, so ist vermutlich der Graph-als-Bild-Fehler aufgetreten, da der dargestellte Graph an den Fallweg einer Münze erinnert. Die dritte Antwortmöglichkeit zeigt ebenfalls einen fallenden Graphen, der vermutlich von Schülerinnen und Schülern gewählt wird, weil er zum einen scheinbar das Fallen der Münze zeigt, gleichzeitig aber auch zu den ihnen bereits vertrauten (linearen) Funktionen gehört. Der vierte Graph stellt die korrekte Alternative dar.

Welcher Graph passt am besten zu dem Weg der Münze beim Fallen?

Kreuze an.

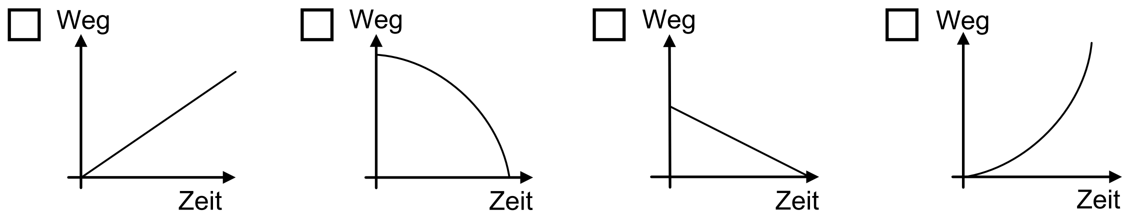


Abbildung 11: *Teilaufgabe zu „Brunnen“*

4.5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Zur Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)* gehört es, mit Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Diagrammen und Tabellen zu arbeiten, symbolische und formale Sprache und natürliche Sprache wechselseitig zu übersetzen, Lösungs- und Kontrollverfahren auszuführen und mathematische Werkzeuge wie Formelsammlungen und Taschenrechner sinnvoll und verständig einzusetzen.

Innerhalb der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang (L4)* kommt in diesem Bereich besonders dem Lösen von Gleichungen eine Bedeutung zu, etwa wenn Stellen gefunden werden sollen, an denen die Funktion eine vorgegebene Besonderheit aufweist wie etwa Nullstellen, Stellen, an denen Funktionen einen bestimmten Wert haben, Schnittpunkte oder in der Oberstufe auch Extrema und Wendepunkte. Dabei kann auch das Verwenden von digitalen Werkzeugen eine wichtige Rolle spielen wie Abschnitt 3.3 gezeigt hat.

Die Aufgabe „Ampelkarte“ (vgl. Abbildung 12) thematisiert den Nährwertgehalt von Lebensmitteln bzw. Getränken und erfordert sowohl Fähigkeiten im Umgang mit mathematischen Darstellungen und Fähigkeiten im *Kommunizieren (K6),* aber eben auch Fähigkeiten im Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik. Die Schülerinnen und Schüler sollen mit Hilfe der tabellarischen Darstellung der Intervalle der drei Ampelfarben entscheiden, ob der Zuckergehalt verschiedener Getränke als hoch zu bewerten ist. Während für die Einschätzung des Zuckergehalts von Orangensaft der gegebene Wert einfach mit den in der Tabelle angegebenen Werten abgeglichen werden kann, muss für die Apfelschorle und die Cola zunächst die Zuckermasse von 100 ml dieser Getränke umgerechnet werden, bevor ein Abgleich mit der Tabelle vorgenommen werden kann. Zur Lösung der Aufgabe sind demnach Routineverfahren im Umgang mit proportionalen Zusammenhängen nötig. Dabei muss für die Zuordnung „Volumen Getränk → enthaltene Zuckermasse“ also der Funktionswert an der Stelle 100 ml berechnet werden.

Ampelkarte

Lebensmittel enthalten unter anderem Fett, gesättigte Fettsäuren, Zucker und Salz zu unterschiedlich hohen Anteilen. Die drei Farben der sogenannten Ampelkarte sollen helfen, die Höhe der jeweiligen Anteile einzustufen.

Teilaufgabe 2

Für Getränke gelten sogar nur halbe Werte im Vergleich zur Tabelle in Teilaufgabe 1.

Alle Angaben beziehen sich auf 100 ml des Getränks.

Bestandteil	**gering (grün)**	**mittel (gelb)**	**hoch (rot)**
Fett	< 1,5 g	1,5 – 10 g	> 10 g
gesättigte Fettsäure	< 0,75 g	0,75 – 2,5 g	> 2,5 g
Zucker	< 2,5 g	2,5 – 6,25 g	> 6,25 g
Salz	< 0,15 g	0,15 – 0,75 g	> 0,75 g

Prüfe, ob der Zuckeranteil der folgenden Getränke hoch ist.

Kreuze jeweils an.

	ja	nein
Orangensaft: 100ml enthalten 9,3g Zucker	☐	☐
Apfelschorle: 200ml enthalten 10,6g Zucker	☐	☐
Cola: ein Glas (250ml) enthält 27g Zucker	☐	☐

Abbildung 12: *Beispielaufgabe „Ampelkarte“*

4.6 Kommunizieren

Im Fach Mathematik umfasst die Kompetenz *Kommunizieren (K6)* Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse zu dokumentieren, verständlich darzustellen und zu präsentieren, Fachsprache adressatengerecht zu verwenden und Äußerungen von anderen sowie Texte zu mathematischen Inhalten zu verstehen und zu überprüfen.

Mit der Kompetenz *Kommunizieren (K6)* werden also sowohl rezeptive als auch produktive Anforderungen an Schülerinnen und Schüler beschrieben. Dabei ist es wichtig zu betonen, dass die rezeptiven Anforderungen über das bloße Lesen und Verstehen von Mathematikaufgaben hinausgehen.

Die Beispielaufgabe „Lineare Funktionen anwenden" (vgl. Abbildung 13) zeigt, wie die Kompetenz *Kommunizieren (K6)* in Kombination mit der Kompetenz *Mathematisch modellieren (K3)* erworben werden kann. In dieser Aufgabe werden den Schülerinnen und Schüler verschiedene verbale Darstellungen einer Zuordnung präsentiert. In diesem Fall besteht die Hauptanforderung im Bereich des Kommunizierens in dem Entnehmen relevanter Informationen, um diese anschließend in eine symbolische Funktionsdarstellung übersetzen zu können. Alternative Aufgabenformate, die besonders das produktive Kommunizieren fördern, fordern Schülerinnen und Schüler häufig zur selbstständigen Textproduktion und zur Vermittlung von mathematischen Sachverhalten auf. An dieser Stelle ist deutlich zu sehen, dass die Fähigkeiten zum Darstellungswechsel den in den Bildungsstandards formulierten Kompetenzanforderungen nicht entgegenstehen, sondern Hand in Hand mit diesen einhergehen.

Lineare Funktionen anwenden

Im Folgenden sind Sachsituationen beschrieben, bei denen jeweils eine Größe einer anderen zugeordnet ist. Diese Zuordnungen lassen sich durch Gleichungen darstellen.

Ordne jeder Sachsituation die passende Gleichung zu, indem du sie jeweils verbindest.

Herr Hinze kauft einen Rosenstrauß. Eine Rose kostet 2€. Im Blumenladen wird für das Binden des Straußes zusätzlich 0,50€ berechnet.	$y = 0{,}5x + 2$
Florian verkauft auf dem Bücherbasar seine alten Comics für je 2€. Von seinen Einnahmen muss er 5€ Standgebühr bezahlen. Trotzdem erwartet er, dass er einen guten Gewinn macht.	$y = 2x - 5$
Sven leiht sich im Urlaub ein Fahrrad. Er muss eine Grundgebühr von 2€ bezahlen und zusätzlich pro Tag eine Leihgebühr von 5€.	$y = 2x + 0{,}5$
Frau Meier kauft für eine Bastelarbeit farbige Pappe. Jeder Bogen kostet 0,50€. Außerdem kauft sie eine Tube Spezialkleber für 2,00€.	$y = 5x + 2$

Abbildung 13: Beispielaufgabe „Lineare Funktionen anwenden"

5 Schlussbemerkung

Die Erläuterungen in dieser Handreichung haben einen kleinen Einblick in die Vielschichtigkeit der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang (L4)* gegeben, ohne diese erschöpfend beschreiben zu können. Es wurde deutlich, dass, wie bei jeder anderen Leitidee auch, die zu erwerbenden allgemeinen mathematischen Kompetenzen untrennbar mit den inhaltlichen Aspekten verzahnt sind. Dies macht deutlich, dass die Bildungsstandards keinesfalls einen inhaltsleeren Kompetenzaufbau fordern, sondern mit den allgemeinen mathematischen Kompetenzen Fähigkeiten identifizieren, die in jedem Inhaltsbereich und inhaltsübergreifend nötig sind, um angemessen mit mathematischen Objekten operieren und mathematische Sachverhalte verstehen und bearbeiten zu können. Gleichzeitig ist anzumerken, dass alle Leitideen auch an gewissen Stellen eine Nähe zueinander aufweisen. Bei der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang (L4)* ist dies beispielsweise der Fall, wenn Funktionen als Modelle genutzt werden, um statistische Daten zu analysieren oder aus diesen Schlüssen zu ziehen. Auch sind beispielsweise in Diagrammen, wie sie Teil der Leitidee *Daten und Zufall (L5)* sind, Zuordnungen zu erkennen. Neben dieser Verzahnung auf horizontaler Ebene, ist die vertikale Verzahnung der Behandlung der Leitideen über die verschiedenen Schuljahre hinweg entscheidend. Dem sogenannten Spiralprinzip folgend, gestaltet sich das Lernen stets vorwegnehmend und fortsetzend, indem die Behandlung eines inhaltlichen Themas stets an bereits zuvor erworbenem Wissen anknüpft. Die Erläuterungen zur Leitidee *Funktionaler Zusammenhang (L4)* haben gezeigt, wie verschiedene Vorstellungen des Funktionsbegriffs mit der Zeit erworben und vernetzt werden.

6 Literaturverzeichnis

Bell, A., Janvier, C. (1981): The interpretation of graphs representing situations. In: *For the Learning of Mathematics*, 2(1), 34–42.

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R., Köller, O. (2006): *Bildungsstandards Mathematik: konkret*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Brauner, U. (2008): Graphen gehen - ein Gefühl für Diagramme entwickeln. In: *Mathematik lehren*, 148, 20-24.

Bruder, R. (2002): Lernen, geeignete Fragen zu stellen. Heuristik im Mathematikunterricht. In: *Mathematik lehren*, 115, 4–8.

Bruder, R., Collet, C. (2012): *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Dörner, D. (1983): *Lohhausen: Vom Umgang mit Unbestimmtheit und Komplexität*. Bern: Huber.

Freudenthal, H. (1983): *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Greefrath, G. (2018): *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht. Didaktische Perspektiven zum Sachrechnen in der Sekundarstufe* (Sachrechnen (Neuauflage)). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Ulm, V. Siller, H.-S. & Weigand, H.-G. (2016): *Didaktik der Analysis*. Berlin: Springer Spektrum.

Hofe, R. vom, Blum, W. (2016): "Grundvorstellungen" as a Category of Subject-Matter Didactics. In: *Journal für Mathematikdidaktik*, 225–254.

Janvier, C. (1987): Translation process in mathematics education. In: C. Janvier (Hg.): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: L.Erlbaum Associates, 27–31.

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R. & Greefrath, G. (2015): Anwendungen und Modellieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik,* 357–383, Berlin Heidelberg: Springer.

KMK (2003): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf (abgerufen am: 12.09.2018).

KMK (2004): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss.* URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Haupt.pdf (abgerufen am: 12.09.2018).

Nitsch, R. (2015): *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Preece, J. (1983): *A survey of graph interpretation and sketching errors.* Milton Keynes, England (CAL Research Group Tech. Rep., No.34.

Rolfes, T., Roth, J. & Schnotz, W. (2013: Der Kovariationsaspekt von Funktionen in der Sekundarstufe I, In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*.

Schwill, A. (1993): Fundamentale Ideen der Informatik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 25 (1), 20 - 31.

Vollrath, H.-J. (1989): Funktionales Denken. In: *Journal für Mathematikdidaktik, 10*, 3–37.

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61(1), 37 - 46.