HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

IQB
Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten 2018
8. Jahrgangsstufe (VERA-8)
Mathematik – Didaktische Handreichung
Modul B

Didaktische Erläuterung
Leitidee Raum und Form

Inhaltsverzeichnis

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien auch

onlne finden können?

www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

1 Einleitung

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz mit ihren Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen bilden die Grundlage für die VERgleichsArbeiten in der 8. Jahrgangsstufe (VERA-8) im Fach Mathematik. Daher wird in dieser didaktischen Handreichung – wie in den Handreichungen der letzten Jahre auch – zunächst der Aufbau der Bildungsstandards vorgestellt (siehe Abschnitt 2, S. 2). Anschließend wird die Leitidee *Raum und Form* näher erläutert (siehe Abschnitt 3, S. 5) und abschließend unter besonderer Berücksichtigung einzelner allgemeiner mathematischer Kompetenzen betrachtet (siehe Abschnitt 4, S.13).

Dabei wird in allen Abschnitten ein besonderes Augenmerk auf die Hürden und Herausforderungen gelegt, die im Rahmen der Leitidee *Raum und Form* bezogen auf die Kompetenzentwicklung von Schülerinnen und Schülern auftreten können. Neben einigen Vorschlägen zur Bewältigung dieser Hürden und Herausforderungen wird anhand von Testaufgaben von VERA-8 aufgezeigt, wie inhaltliche und prozessbezogene Anforderungen zur Leitidee *Raum und Form* beschrieben und wie diese Aufgaben als Ausgangspunkt für die unterrichtliche Praxis nutzbar gemacht werden können. Außerdem werden an vielen Stellen Hinweise zum sinnvollen Einsatz digitaler Werkzeuge gegeben.

2 Bildungsstandards und das Kompetenzmodell im Fach Mathematik

Im Anschluss an die Ergebnisse mehrerer großer Vergleichsstudien wie etwa der PISA-Studie führte die Kultusministerkonferenz (KMK) ab dem Jahr 2003 Bildungsstandards für die Fächer Deutsch, Mathematik und Erste Fremdsprache (Englisch/Französisch) ein[1]. Damit wurde die Erwartung verbunden, Zielklarheit in Bezug auf die Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in diesen Fächern zu erhalten, sowie eine Überprüfung des Erreichten zu ermöglichen (Blum, Drüke-Noe, Hartung & Köller, 2006, S. 14ff.). So sollte der Übergang von einer sehr stark inputorientierten Steuerung im Bildungswesen zu einer Kombination aus Input- und Output-Steuerung erreicht werden. Die zentrale Idee dabei war es Kriterien festzulegen, anhand derer die Leistung von Lernenden bzw. Lerngruppen auch über die Grenzen eines Bundeslandes hinaus verglichen werden können und die eine länderübergreifende Standardsetzung ermöglichen. Zu diesem Zweck greifen die Bildungsstandards allgemeine Bildungsziele auf und benennen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe an zentralen Inhalten erworben haben sollen (KMK, 2003/2004).

Den Bildungsstandards für das Fach Mathematik liegt der Anspruch zu Grunde, den Mathematikunterricht allgemeinbildend zu gestalten. Dabei wird davon ausgegangen, dass ein all-

[1] https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html

gemeinbildender Mathematikunterricht Schülerinnen und Schülern die folgenden drei Grunderfahrungen ermöglicht:

(1) *Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,*

(2) *mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,*

(3) *in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben (Winter, 1995, S.1).*

Eingedenk dieser drei Grunderfahrungen wurde das Kompetenzmodell im Fach Mathematik entwickelt, welches im Folgenden erläutert wird. Das Kompetenzmodell, welches den Bildungsstandards im Fach Mathematik zugrunde liegt, ergibt sich nicht allein aus der Fachsystematik, sondern ist ausgerichtet an Lernprozessen und Phänomenen mathematischen Handelns im Unterricht und im Alltag. Es werden in diesem Modell zunächst die folgenden drei Dimensionen unterschieden (siehe Abbildung 1):

1. *Allgemeine mathematische Kompetenzen*
2. *Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen, strukturiert nach Leitideen, und*
3. *Anforderungsbereiche.*

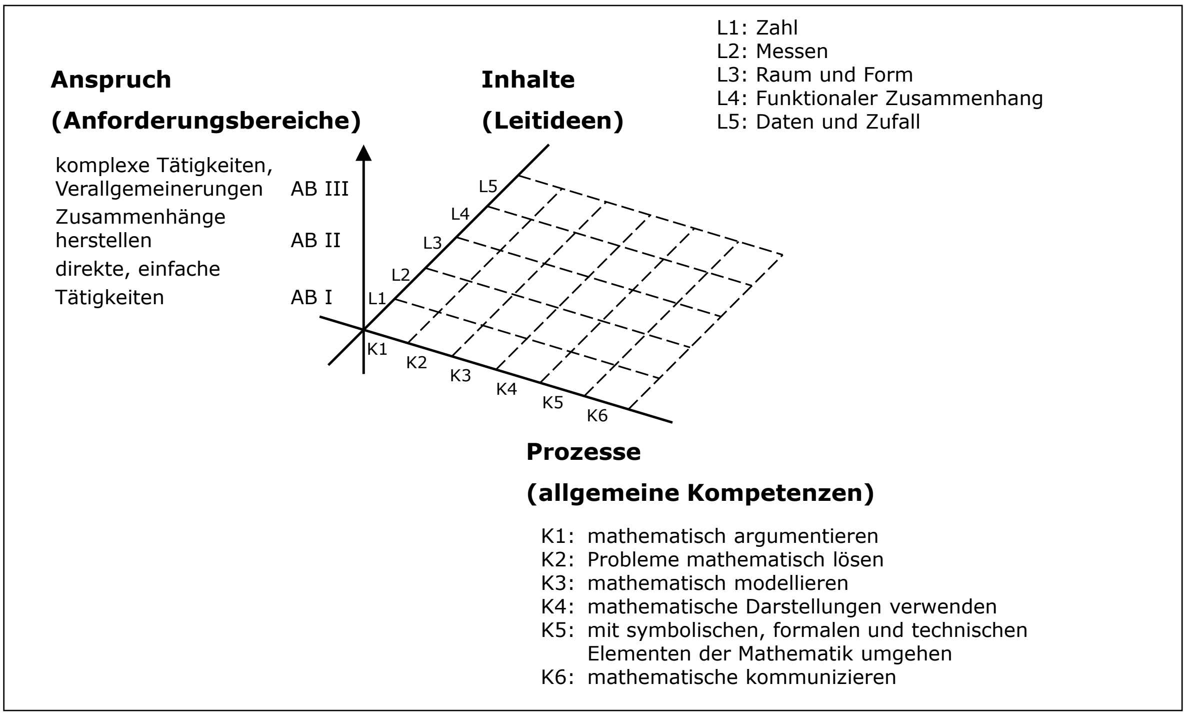


***Abbildung 1**: Kompetenzmodell der Bildungsstandards (https://www.iqb.hu-berlin.de/institut/ab/sek1_ma)*

Die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* bilden die Prozessdimension des Modells und beschreiben, auf welche Art mathematische Inhalte bearbeitet werden. Im Einzelnen sind dies die Kompetenz *mathematisch argumentieren* (K1), *Probleme mathematisch lösen* (K2), *mathematisch modellieren* (K3), *mathematische Darstellungen verwenden* (K4), *mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) und *mathematisch kommunizieren* (K6). Diese allgemeinen mathematischen Kompetenzen werden zwar im Verbund erworben bzw. angewendet, das heißt bei der Bearbeitung eines mathematischen Gegenstands werden oft mehrere der hier aufgeführten Kompetenzen benötigt, jedoch sind sie differenziert zu betrachten. Mit der getrennten Betrachtung ist zum einen die Absicht verbunden, spezifische Eigenschaften und Anforderungen von Aufgaben im Mathematikunterricht transparent zu machen. Dies ermöglicht es, den Mathematikunterricht differenzierter zu planen. Ein mathematischer Inhalt wird dann z. B. entlang verschiedener Tätigkeiten den Schülerinnen und Schülern zugänglich gemacht. Zum anderen ermöglicht die getrennte Betrachtung von allgemeinen mathematischen Kompetenzen Schülerleistungen differenzierter zu analysieren und so gezieltere Diagnosen zu stellen.

Die zweite Dimension des Modells, das heißt die *Inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen,* bilden fünf *Leitideen*. Diese Inhaltsdimension beschreibt mathematische Konzepte, die in einer Situation angewendet werden. Diese fünf Leitideen sind im Einzelnen *Zahl* (L1), *Messen* (L2), *Raum und Form* (L3), *Funktionaler Zusammenhang* (L4) und *Daten und Zufall* (L5). Mit den Leitideen ist die Absicht verbunden, die Phänomene mathematischer Tätigkeiten zu beschreiben (Freudenthal, 1983). Mit ihnen wird versucht zu fassen, welche mathematischen Mittel zum Einsatz kommen, wenn eine Situation oder ein Problem im Mathematikunterricht angegangen wird. In der Konsequenz bedeutet das, dass sie zwar mit Fachgebieten der Mathematik in Verbindung stehen, mit diesen jedoch nicht identisch sind. Weiterhin ist darauf hinzuweisen, dass alle Leitideen gleichberechtigt nebeneinander stehen. Auch wenn der Aufbau eines an die Fachsystematik anschlussfähigen konzeptuellen Systems Ziel des Mathematikunterrichts sein soll, sind die Leitideen und auch die inhaltsbezogenen Kompetenzen, welche zu den einzelnen Leitideen gehören, nicht zuallererst der Fachsystematik verpflichtet. Es ergibt sich aus ihnen keine Hierarchie, wie es beispielsweise in einem axiomatisch aufgebauten Fachgebiet der Mathematik der Fall wäre. Weiterhin folgen die Leitideen auch nicht einem didaktischen Aufbau im Sinne einer zeitlichen Abfolge im Lernprozess („erst kommt das Zählen, dann kommt das Messen, usw.“). Sie geben eine Ordnung ab, die es erlaubt, bestimmte mathematische Phänomene unter einer Kategorie, d. h. einer Leitidee, zusammenzufassen. Leitideen können als fundamentale Ideen aufgefasst werden (Schwill, 1993), die im Mathematikunterricht auf jedem intellektuellen Niveau vermittelt werden können und in verschiedenen Gebieten eines Bereichs vielfältig anwendbar sind. In den Bildungsstandards wird dazu erläutert:

> Eine Leitidee vereinigt Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete und durchzieht ein mathematisches Curriculum spiralförmig. Die Zuordnung einer inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz zu einer mathematischen Leitidee ist nicht in jedem

Fall eindeutig, sondern davon abhängig, welcher Aspekt mathematischen Arbeitens im inhaltlichen Zusammenhang betont werden soll (KMK, 2003, S. 18).

Die dritte und letzte Dimension des Kompetenzmodells der Bildungsstandards bilden drei Anforderungsbereiche. Anforderungsbereiche beschreiben unterschiedliche Niveaus, auf denen eine bestimmte allgemeine Kompetenz zur Bearbeitung einer mathematischen Aufgabe benötigt wird. Es werden dabei in der Regel drei Anforderungsbereiche unterschieden. Mit dem Anforderungsbereich I werden Anforderungen an allgemeine Kompetenzen beschrieben, die zum Reproduzieren unterrichtlicher Inhalte befähigen. Zum Anforderungsbereich II zählen solche Anforderungen an allgemeine Kompetenzen, die es Schülerinnen und Schülern ermöglichen Zusammenhänge herzustellen und Gelerntes anzuwenden. In den Anforderungsbereich III gehören dann diejenigen Anforderungen, die es Schülerinnen und Schülern erlauben zu verallgemeinern und zu reflektieren.

Das dreidimensionale Kompetenzmodell im Fach Mathematik erlaubt es sowohl den Lernstand von Schülerinnen und Schülern als auch Aufgaben und Probleme durch einen oder mehrere Werte auf jeder der drei „Achsen“ des Modells zu beschreiben. Dies ermöglicht es Anforderungen transparent zu machen, die Entwicklung eines kompetenzorientierten Unterrichts zu fördern sowie Schülerleistungen differenziert zu analysieren und gezielte Diagnosen zu stellen.

Alle Bestandteile des Kompetenzmodells sind zentrale Punkte der Bildungsstandards und stehen gleichwertig nebeneinander. Im Folgenden wird ein spezieller Aspekt, die Leitidee *Raum und Form*, herausgegriffen und erläutert. Dies bedeutet jedoch nicht, dass andere Bestandteile der Bildungsstandards diesem Aspekt in irgendeiner Weise nachstehen. Insbesondere die verstärkte Orientierung an den allgemeinen mathematischen Kompetenzen (Prozessdimension des Kompetenzmodells) ist eine Errungenschaft der Bildungsstandards, die auch bei der gesonderten Betrachtung einer Leitidee nicht in Vergessenheit geraten darf.

3 Die Leitidee *Raum und Form*

Die Leitidee *Raum und Form* umfasst Phänomene mathematischen Handelns, wie sie im Umgang mit Objekten in der Ebene und im Raum zu beobachten sind. In den Bildungsstandards im Fach Mathematik werden dazu verschiedene inhaltsbezogene Kompetenzen unter der Leitidee *Raum und Form* zusammengefasst (KMK, 2003). Diese lauten:

Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen und beschreiben geometrische Strukturen in der Umwelt,
- operieren gedanklich mit Strecken, Flächen und Körpern,
- stellen geometrische Figuren im kartesischen Koordinatensystem dar,
- stellen Körper (z. B. als Netz, Schrägbild oder Modell) dar und erkennen Körper aus ihren entsprechenden Darstellungen,

- analysieren und klassifizieren geometrische Objekte der Ebene und des Raumes,
- beschreiben und begründen Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte (wie Symmetrie, Kongruenz, Ähnlichkeit, Lagebeziehungen) und nutzen diese im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachzusammenhängen,
- wenden Sätze der ebenen Geometrie bei Konstruktionen, Berechnungen und Beweisen an, insbesondere den Satz des Pythagoras und den Satz des Thales,
- zeichnen und konstruieren geometrische Figuren unter Verwendung angemessener Hilfsmittel wie Zirkel, Lineal, Geodreieck oder dynamische Geometriesoftware,
- untersuchen Fragen der Lösbarkeit und Lösungsvielfalt von Konstruktionsaufgaben und formulieren diesbezüglich Aussagen,
- setzen geeignete Hilfsmittel beim explorativen Arbeiten und Problemlösen ein (KMK, 2003, S.13).

Die Auflistung der Phänomene mathematischen Handelns, die unter der Leitidee *Raum und Form* zusammengefasst werden, lassen bereits die Nähe zum Themenfeld Geometrie erkennen.

Die Entwicklung geometrischen Begriffswissens wurde bereits vielfach erforscht und es existieren verschiedene Modelle, die Lernprozesse auf diesem Gebiet beschreiben. Zu erwähnen ist das Modell von van Hiele (van Hiele, 19647; Franke, 2007, S. 113ff.), das auch in empirischen Studien bestätigt wurde (Burger & Shaughnessy, 1986). Gemäß dieses Modells werden Begriffe langfristig in fünf Stufen erlernt. Auf der ersten Stufe weisen Schülerinnen und Schüler ein intuitives Begriffsverständnis auf, das auf einer Visualisierung und weniger auf logischem Denken beruht. Auf dieser Stufe erkennen sie beispielsweise Figuren und können sie benennen, aber noch nicht aufgrund charakteristischer Eigenschaften einordnen. Auf der zweiten Stufe hingegen bauen die Schülerinnen und Schüler ein inhaltliches Begriffsverständnis auf, indem beispielsweise Eigenschaften von Figuren entdeckt und analysiert werden. Auf der folgenden Stufe, der Stufe des integrierten Begriffsverständnisses, werden Abstraktionen vorgenommen und Beziehungen zwischen Objekten erkannt. Auf dieser Stufe können Schülerinnen und Schüler ihre logischen Schlussfolgerungen mit informellen Argumenten begründen und einen neuen Begriff in ein Netz anderer Begriffe einordnen. Auf der vierten Stufe, der Stufe des formalen Begriffsverständnisses und der Deduktion, können Schülerinnen und Schüler Beweise konstruieren, die Rolle von Axiomen und Definitionen verstehen und zwischen notwendigen und hinreichenden Bedingungen unterscheiden. Auf der fünften und letzten Stufe, der Stufe des strengen Begriffsverständnisses, verstehen die Lernenden (die auf diesem Niveau in der Regel bereits keine Schülerinnen oder Schüler mehr sind) die formalen Aspekte des logischen Schließens sowie den Aufbau mathematischer Systeme. Sie verstehen indirekte Beweise sowie nicht-euklidische Systeme (Mason, 2002).

Entscheidend bei einer solchen modellhaften Unterscheidung von Stufen ist, dass geometrische Objekte für Lernende unterschiedliche Bedeutungen haben können und dass auf einer Stufe das Denken der darunter- und davorliegenden Ebenen vorausgesetzt werden muss (Weigand et al., 2014).

Konkret findet im Bereich der Leitidee *Raum und Form* in den Klassen 5 und 6 meist geometrische Begriffsbildung und Figurenlehre statt, z. B. zu geometrischen Objekten wie Strecken, Geraden, Vielecken, Winkeln und Kreisen und zu Körpern wie Würfel und Quader.

Darüber hinaus werden im Unterricht auch Abbildungen und Spiegelungen und auch Symmetrien thematisiert. In den Klasse 7 und 8 bezieht man sich meist auf Drei- und Vierecke, Schnittpunktsätze, Symmetrieeigenschaften, Kreise und Kreistangenten. Oft wird in diesem Zeitraum auch die Kongruenzgeometrie mit Kongruenzsätzen und -abbildungen thematisiert. Diese Inhalte werden in den folgenden Jahren um Ähnlichkeitsgeometrie (Strahlensätze, zentrische Streckung und Ähnlichkeitssätze), der Satzgruppe des Pythagoras oder der Trigonometrie ergänzt. Hinzu kommt die Thematisierung weiterer Körper wie Prismen, Zylinder, Kegel und Kugeln.

Im Laufe der gymnasialen Oberstufe tritt die Leitidee *Raum und Form* insbesondere im Zusammenhang mit der Koordinatengeometrie und der analytischen Geometrie auf, zum Beispiel wenn Objekte klassifiziert oder Sätze der Geometrie innerhalb der Vektorrechnung Anwendung finden. Umgekehrt können beide Themengebiete zum Beispiel dazu dienen, das Verständnis von funktionalen Zusammenhängen zu erweitern oder Messungen durchzuführen. So können beispielweise geometrische Abbildungen wie affine Abbildungen oder Projektionen behandelt werden oder Winkel und Abstände im dreidimensionalen Raum bestimmt werden. Beides verdeutlicht, dass ein Themengebiet der Mathematik nicht deckungsgleich mit einer Leitidee ist und im Unterricht, der zwar hauptsächlich einer Leitidee wie etwa *Raum und Form* gewidmet ist, auch andere Leitideen eine wichtige Rolle spielen können.

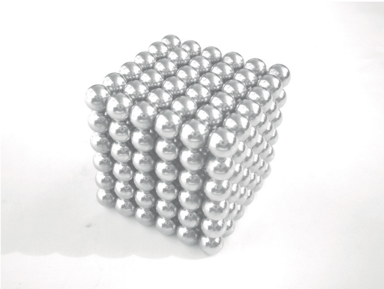
Wie oben bereits erwähnt, ist eine Leitidee daher mehr als eine andere Bezeichnung für ein Themenfeld. Eine Beispielaufgabe aus dem Geometrieunterricht ist nicht zwangsläufig der Leitidee *Raum und Form* zuzuordnen, sondern kann beispielsweise auch Inhalte anderer Leitideen beinhalten. Zum besseren Verständnis dieses Zusammenhangs wird im Folgenden die Leitidee *Raum und Form* den Leitideen *Messen* (siehe Abschnitt 3.1, S. 7) und *Funktionaler Zusammenhang* (siehe Abschnitt 3.2, S. 9) gegenübergestellt. Anschließend wird auf die Förderung des räumlichen Denkens und der Entwicklung von Raumvorstellungen Bezug genommen (siehe Abschnitt 3.3, S. 11).

3.1 Die Leitidee *Raum und Form* im Vergleich zur Leitidee *Messen*

Viele der Aufgaben, bei denen geometrische Anforderungen gestellt werden, zählen entweder zur Leitidee *Messen* oder zur Leitidee *Raum und Form*. Beiden Leitideen ist gemein, dass sie auf solche inhaltsbezogenen Kompetenzen abzielen, die im Umgang mit geometrischen Objekten benötigt werden (dabei umfasst die Leitidee *Messen* zusätzlich auch den Umgang mit anderen Größen wie etwa Massen und Zeiten). Der entscheidende Unterschied besteht darin, dass unter der Leitidee *Messen* solche Kompetenzen gefasst werden, die auf das Bestimmen von oder Arbeiten mit Größen wie Streckenlängen, Flächen- oder Volumenmaße oder auch Winkelgrößen abzielen. Es geht also primär um die Quantifizierung geometrischer Objekte, wohingegen es bei der Leitidee *Raum und Form* eher um die qualitative Erfassung geometrischer Objekte geht (zur Leitidee *Messen* siehe: Didaktische Handreichungen zu VERA-8-2017). Hierbei ergeben sich gewisse Schnittmengen, die auf die Nähe beider Leitideen hinweisen. So werden beispielsweise Konstruktionen und Beweise von geometrischen Sachverhalten auf Grundlage von Sätzen der Geometrie innerhalb der Leitidee *Raum und Form* angesiedelt. Berechnungen von Größen mithilfe von Formeln werden hingegen der Leitidee *Messen* zugeordnet. Wird allerdings mithilfe des Satzes von Pythagoras eine Seitenlänge berechnet, zählt dies auch zur Leitidee *Raum und Form*. Ausschlaggebend für diese Zuordnung ist der Umstand, dass ein geometrischer Satz angewendet wird. Im Vordergrund steht hierbei der qualitative Zusammenhang zwischen den Quadratflächen über den Seiten des Dreiecks und einem Innenwinkel des Dreiecks. Diese Unterscheidung kann anhand weiterer Beispiele verdeutlicht werden. So zählt das Messen einer Winkelgröße zur Leitidee *Messen*, die Kategorisierung von Winkelgrößen in spitze, rechtwinklige, stumpfe und überstumpfe Winkel gehört hingegen zur Leitidee *Raum und Form*. Eine Schnittmenge beider Leitideen ergibt sich ebenso im Umgang mit trigonometrischen Zusammenhängen und Ähnlichkeitsbeziehungen. Werden solche Zusammenhänge und Beziehungen vornehmlich zum Analysieren und Klassifizieren geometrischer Objekte verwendet, deutet dies auf die Zugehörigkeit einer Aufgabe zur Leitidee *Raum und Form* hin. Werden sie hingegen vornehmlich für Berechnungen von Größen herangezogen, deutet dies eher auf die Zugehhörigkeit zur Leitidee *Messen* hin. Solcherlei Unterschiede sollen mithilfe eines Aufgabenbeispiels aus dem aktuellen VERA-8-Test verdeutlicht werden.

Die Aufgabe „Magnetkugelwürfel“ (siehe Abbildung 2) erweckt zunächst den Anschein einer Volumen- und Flächenberechnung, was eine Zuordnung zur Leitidee *Messen* rechtfertigen würde (streng genommen werden hier Anzahlen von Kugeln bestimmt, was sogar eine Nähe zur Leitidee *Zahl* vermuten lässt). Für die Zuordnung zu einer Leitidee fragt man nach der wesentlichen Anforderung in der Aufgabe. Wesentlich ist hierbei, dass gedanklich mit einem aus Kugeln zusammengesetzten Körper operiert wird. Dieser Körper kann nicht ad hoc mit dem geometrischen Körper „Würfel“ gleichgesetzt werden. Insbesondere kann in Teilaufgabe 2 einfach auf das Verfahren der Berechnung der Mantelfläche zurückgegriffen werden. Es stellt sich somit ein Problem, dessen Lösung das (gedankliche) Zerlegen des Körpers in Teilkörper erforderlich macht. Deshalb wird diese Aufgabe der Leitidee *Raum und Form* zugeordnet.

Der abgebildete Würfel ist innen und außen vollständig aus kleinen Magnetkugeln aufgebaut.



Teilaufgabe 1

Aus wie vielen Magnetkugeln besteht dieser Würfel insgesamt?

.... Magnetkugeln

Teilaufgabe 2

Aus wie vielen kleinen Magnetkugeln besteht die „Außenfläche“ dieses Würfels?

Kreuze an.

☐ 136 ☐ 150 ☐ 152 ☐ 168 ☐ 216

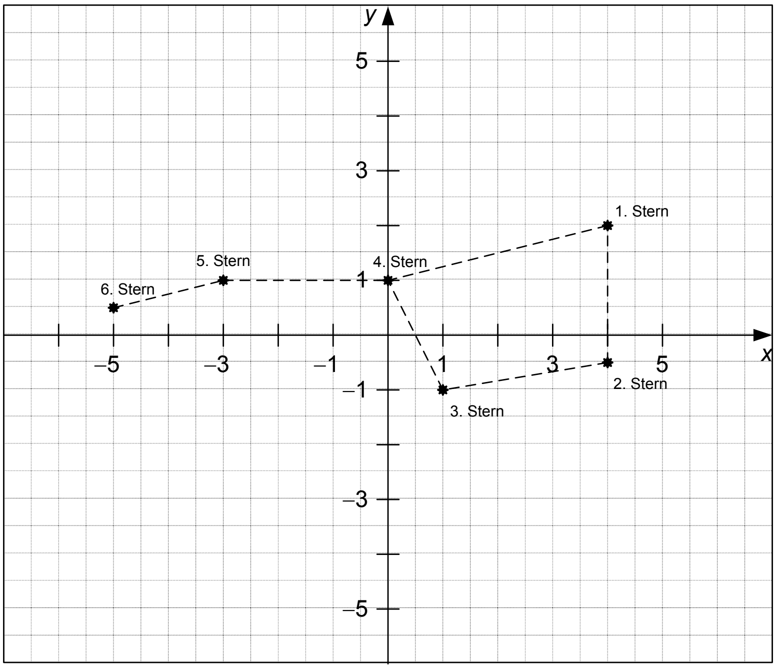
***Abbildung 2:** Aufgabe „Magnetkugelwürfel“*

3.2 Die Leitidee *Raum und Form* im Vergleich zur Leitidee *Funktionaler Zusammenhang*

Auch mit der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* bildet die Leitidee *Raum und Form* inhaltliche Überschneidungen. Bezogen auf den Mathematikunterricht kann dies z. B. dann der Fall sein, wenn funktionale Zusammenhänge und geometrische Objekte im kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden. Eine Nähe beider Leitideen ergibt sich in der Sekundarstufe I im Zusammenhang mit Punkten, Strecken, Halbgeraden, Geraden sowie Parabeln. Diese Konzepte können innerhalb der Koordinatengeometrie als reine geometrische Objekte betrachtet werden. Sie können aber auch, sofern jeder *x*-Wert genau einem *y*-Wert zugeordnet wird, als funktionale Zusammenhänge angesehen werden. Ein und dasselbe Phänomen kann also auf unterschiedliche Charakteristika verweisen; einmal wird eine geometrische Form als Objekt an sich, einmal als Graph einer Funktion interpretiert. Algebraisch wird deshalb zwischen einer Geraden- und Parabelgleichung auf der einen Seite und den Funktionsgleichungen auf der anderen Seite unterschieden (mitunter soll in Geraden- und Parabelgleichungen „ $y =$“ auf die geometrische Deutung verweisen und in Funktionsgleichungen „ $f(x) =$“ auf den funktionalen Zusammenhang).

Anhand der Aufgabe „Großer Wagen“ (siehe Abbildung 3) sollen die Gemeinsamkeiten und Unterschiede beider Leitideen an einem konkreten Beispiel erläutert werden.

Gregor zeichnet 6 Sterne, die zum Sternbild „Großer Wagen“ gehören, vereinfacht in ein Koordinatensystem.



Teilaufgabe 1

Gregor notiert:

„Zu diesem Sternbild gehören die Sterne mit den Koordinaten

1. Stern *(4 | 2),* 2. Stern *(4 | –0,5),*

3. Stern *(1 |........),* 4. Stern *(........| 1),*

5. Stern *(–3 | 1),* 6. Stern *(........|...........).“*

Vervollständige die Koordinaten der Sterne.

Teilaufgabe 2

Gregor zeichnet noch einen Stern ein, der zum Sternbild „Großer Wagen“ gehört.
Dieser Stern hat die Koordinaten: 7. Stern *(–6 | –1).*

Zeichne diesen Stern in das Koordinatensystem ein und verbinde ihn mit dem 6. Stern.

Teilaufgabe 3

Verlängert man die gedachte Verbindungslinie zwischen dem 2. und dem 1. Stern des Großen Wagens vom 1. Stern aus um das Fünffache nach oben, findet man den Polarstern.

Schreibe die Koordinaten auf, die der Polarstern in Gregors Koordinatensystem hätte.

Hinweis: Man kann den Stern nicht mehr in das Koordinatensystem einzeichnen.

Polarstern *(..............|..............)*

***Abbildung 3**: Aufgabe „Großer Wagen“*

In Teilaufgabe 1 und 2 der Aufgabe „Großer Wagen“ werden Anforderungen gestellt, die ebenso im Unterricht zu funktionalen Zusammenhängen eine Rolle spielen. Die Schülerinnen und Schüler ermitteln zum einen Koordinaten von gegebenen Punkten und zeichnen zum anderen einen Punkt zu gegebenen Koordinaten ein. Demnach können diese Fähigkeiten im Verbund mit inhaltlichen Kompetenzen der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* erworben werden oder, wie hier, nur mit Bezug zur Leitidee *Raum und Form*. Teilaufgabe 3 zeigt an, wie der letztgenannte Weg im Unterricht weiter verfolgt werden kann. In dieser Teilaufgabe wird nach den Koordinaten eines Punktes gefragt, welcher nicht mehr im abgebildeten Ausschnitt aus dem Koordinatensystem dargestellt werden kann. Somit muss hier gedanklich mit Punkten und Längen operiert werden, eine Inhaltskompetenz der Leitidee *Raum und Form*.

3.3 Raumvorstellung und räumliches Denken

Ein zentraler Aspekt der Leitidee *Raum und Form* ist die Entwicklung von Raumvorstellungen. Dabei umfasst der Begriff Raumvorstellung nicht nur die Wahrnehmung figuraler Darstellungen, sondern auch mentale Repräsentationen und kognitive Transformationsprozesse (Grüßing, 2012, S.76). Hattermann, Kadunz, Rezat und Sträßer (2015, S.194) nennen als grundlegende Gemeinsamkeit verschiedener Definitionen zu Raumvorstellungen (1) Aspekte der visuellen Wahrnehmung, wie z. B. Hand-Auge-Koordination, Figur-Grund-Unterscheidung, Wahrnehmungskonstanz, räumliche Orientierung, visuelles Gedächtnis und visuelle Unterscheidung, (2) Aspekte des räumlichen Vorstellungsvermögens, wie z. B. räumliche Wahrnehmung, räumliche Beziehungen, Veranschaulichung und räumliche Orientierung als auch räumliches Denken.

Räumliches Denken ist häufig ein zentraler Prädiktor von Mathematikleistungen. Wer also über ein gutes Raumvorstellungsvermögen verfügt, erzielt in Mathematik oft auch bessere Leistungen (Grüßing, 2012, S. 113). Insbesondere die Kompetenz, in der Geometrie Probleme mathematisch zu lösen, profitiert von einem gut ausgeprägten räumlichen Denken (Bishop, 1980). In vielen Modellen wird räumliches Denken oder die Raumvorstellung als ein Bestandteil allgemeiner Intelligenz angesehen (z. B. Büchter, 2010). Dies bedeutet aber nicht automatisch, dass räumliches Denken nur abhängig von Begabung ist. Einige empirische Studien zeigen, dass räumliches Vorstellungsvermögen bei Probanden unterschiedlichen Alters durchaus trainierbar ist (Maier, 1999, S. 81). In einer Meta-Analyse von insgesamt 217 Untersuchungen zur Frage, ob und in welchem Umfang räumliches Denken trainierbar ist, kommen Uttal et al. (2013) zu dem Schluss, dass Lernerfolge im räumlichen Denken prinzipiell möglich sind, diese zeitlich überdauern und sich positiv auf die Leistungen in anderen Aufgabenbereiche auswirken, die nicht zuvor trainiert worden sind.

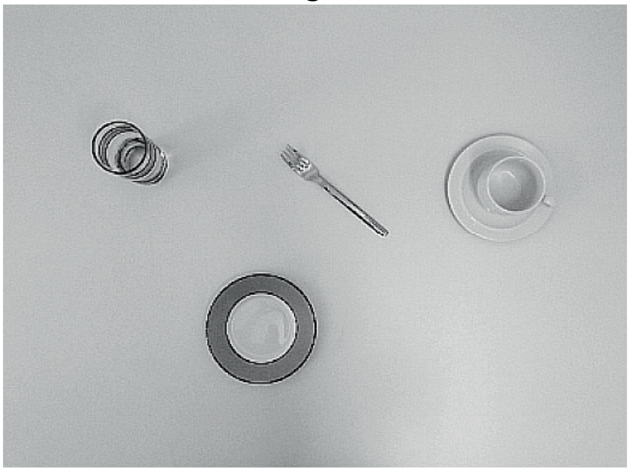
Wie aber fördert man Raumvorstellungen und räumliches Denken gezielt? Zum Trainieren des räumlichen Vorstellungsvermögens eignet sich z. B. die sogenannte Kopfgeometrie. Der Begriff ist angelehnt an das bekannte Kopfrechnen. Gemeint sind Aufgaben, bei denen Schülerinnen und Schüler geometrische Probleme lediglich im Kopf lösen. Grundsätzlich werden dabei drei Phasen unterschieden: (1) Die Phase der Aufgabenstellung, in der das

Problem nicht bloß mündlich sondern ebenso als geschriebener Text und auch unterstützt durch Gestik, einem Bild oder einem geometrischen Modell geschildert werden kann, (2) die Phase des Arbeiten im Kopf, d. h. zur Lösung werden tatsächlich keine Hilfsmittel verwendet und (3) die Phase der Ergebnispräsentation, in der wieder Hilfsmittel erlaubt sind (Senftleben, 1996). Es zeigt sich also, dass Kopfgeometrie nicht gänzlich im Kopf erfolgen muss, lediglich der Lösungsweg wird ohne Hilfsmittel beschritten. Will man Schülerinnen und Schüler dazu befähigen, in möglichst vielen Kontexten Raumvorstellungen und räumliches Denken zu nutzen, sollte mithilfe einer Vielzahl an Kontexten und Aufgabenstellungen geübt werden.[2] Wie eine dieser Aufgaben aus unterschiedlichen Kontexten aussehen kann, zeigt die Aufgabe „Ansichten eines Tisches“ in Abbildung 4.

Auf einem Tisch befinden sich die Gegenstände Teller, Gabel, Glas und Tasse mit Untertasse. Der Tisch wurde von verschiedenen seitlichen Kamerapositionen A bis D aus fotografiert. Abbildung 1 zeigt die Ansicht von oben.

C

D



B

Abbildung 1

A

Ordne den folgenden Abbildungen die Kameraposition zu, von der aus jeweils fotografiert wurde.

Gib unter jeder Abbildung den jeweils zutreffenden Buchstaben an.

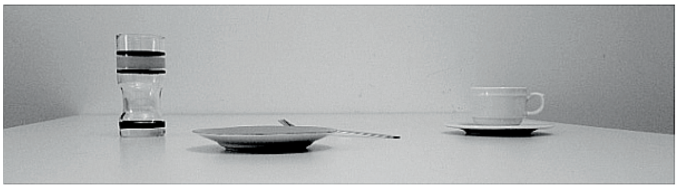


Abbildung 2

Abbildung 2 zeigt die Ansicht aus der Kameraposition................ .

Abbildung 4: *Aufgabe „Ansichten eins Tisches“*

[2] Für Beispiele mit virtuellen dreidimensionalen Modellen siehe z. B. Haug 2006. Zur Schulung der Kopfgeometrie siehe z. B. Royar & Streit 2006. Zur Schulung des räumlichen Denkens in der Primarstufe siehe z. B. Franke & Reinhold 2016.

In dieser Aufgabe wird den Schülerinnen und Schülern zunächst eine Draufsicht eines Tischs mit unterschiedlichen Gegenständen präsentiert. In den anschließenden Teilaufgaben, von denen eine hier zu sehen ist, werden den Schülerinnen und Schülern Seitenansichten desselben Tischs dargeboten. Sie sind aufgefordert zu bestimmen, aus welcher Kameraposition das jeweilige Bild aufgenommen wurde. Diese Aufgabe kann dadurch gelöst werden, dass die Schülerinnen und Schüler sich gedanklich in die Position der Kamera begeben und den jeweiligen Blickwinkel nachvollziehen. Dazu sind Fähigkeiten in der räumlichen Orientierung nötig. Alternativ können Schülerinnen und Schüler vor ihrem inneren Auge auch mental den Tisch rotieren lassen, bis die Ansicht der Seitenansicht entspricht.

4 Allgemeine mathematische Kompetenzen und die Leitidee *Raum und Form*

Wie oben bereits erwähnt, unterscheidet das Kompetenzmodell der Bildungsstandards im Fach Mathematik allgemeine mathematische Kompetenzen (Prozessdimension), inhaltsbezogene mathematischen Kompetenzen, strukturiert nach Leitideen (Inhaltsdimension) und Anforderungsbereiche. Dem liegt der Gedanke zugrunde, dass Prozess- und Inhaltskompetenzen stets im Verbund erworben werden. Um diesen Gedanken zu konkretisieren, wird im Folgenden erläutert, wie Prozesskompetenzen im Verbund mit Inhaltskompetenzen der Leitidee *Raum und Form* gefördert und diagnostiziert werden können. Diese Erläuterungen werden ergänzt durch Hinweise dazu, welche Möglichkeiten digitale Medien und Werkzeuge in diesen Bereichen bieten bzw. worauf bei der Nutzung solcher Werkzeuge zu achten ist.[3]

4.1 Mathematisch argumentieren

Die Kompetenz *mathematisch argumentieren* (K1) umfasst Tätigkeiten wie das Stellen von für die Mathematik charakteristischen Fragen und das Äußern von begründeten Vermutungen. Zu dieser Kompetenz gehört das Entwickeln mathematischer Argumentationen ebenso wie Erläuterungen, Begründungen und Beweisen. Außerdem zählt auch das Beschreiben und Begründen von Lösungswegen dazu (KMK, 2003).

Eine Vielzahl an Studien zeigt, dass bei vielen Schülerinnen und Schülern die Kompetenz mathematisch zu argumentieren nicht stark ausgeprägt ist. Insbesondere haben sie Schwierigkeiten, Beweise selbst zu finden (Beweisidee) und durchzuführen (Beweisdarstellung), Beweise auf ihre Richtigkeit zu überprüfen und in Beweisbeispielen enthaltene Fehler zu erkennen (Healy & Hoyles, 1998; Heinze & Reiss, 2004; Kuntze, 2004; Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009). Dies zeigt sich unter anderem daran, dass Schülerinnen und Schüler

[3] Für eine Einführung und Übersicht in Einsatzmöglichkeiten von Dynamischer Geometriesoftware siehe Greefrath, Hußmann und Fröhlich (2010).

- die Größen in der Beweisfigur nachmessen, anstatt zu beweisen;
- einen Beweis als eine Rechnung verstehen, in deren Rahmen aus den bekannten Größen einer Figur die unbekannten zu ermitteln sind;
- von einer (zu speziellen) Beweisfigur ausgehen, die zu beweisende Eigenschaften (wie rechtwinklig, gleichschenklig, symmetrisch) bereits vorwegnimmt;
- unpassende Hilfsmittel verwenden oder mit einer Hilfslinie zu viele Eigenschaften verbinden (wenn sie etwa die Winkelhalbierende eines Dreiecks zugleich als Mittelsenkrechte der gegenüberliegenden Seite betrachten);
- nicht zwischen Satz und Kehrsatz sowie zwischen notwendigen und hinreichenden Bedingungen unterscheiden;
- schon von der Behauptung ausgehen und so lange Folgerungen ziehen, bis eine offensichtlich wahre Aussage auf dem Papier steht (Weigand et al., 2014, S. 45).

Ufer et al. (2009) zeigen in einer empirischen Studie, dass reines Faktenwissen zu geltenden mathematischen Sätzen und Sachverhalten nicht ausreicht, um mathematisch argumentieren zu können. Es bedarf zusätzlich Metawissen über die Funktion und das Führen von Beweisen (Methodenwissen). Gerade dieses Metawissen fehlt jedoch vielen Schülerinnen und Schülern (Heinze, 2004).

Das Inhaltsfeld Geometrie bietet dabei an verschiedenen Stellen die Möglichkeit, Metawissen zum Beweisen in der Mathematik zu vermitteln. Beweise (oder vorsichtiger: mathematische Argumentationen) werden im Unterricht nur selten auf rein formaler Ebene geführt. Häufig erfolgen sie präformal unter Zuhilfenahme anschaulicher Hilfsmittel. Stellt man im Unterricht einem formalen Beweis eine Argumentation auf anschaulicher oder handlungsorientierter Ebene gegenüber, kann dieser Anlass zur Diskussion anregen, ab wann eine Argumentation als Beweis anerkannt werden soll. Gerade innerhalb der Geometrie ist es mitunter sehr anspruchsvoll, theoretische Argumente und visuelle Eindrücke voneinander zu trennen. Ebenso stellt die Formalisierung innerhalb der Geometrie eine nicht zu unterschätzende Hürde dar. Dabei variiert das Ergebnis einer solchen Diskussion auch in Abhängigkeit von der jeweiligen Klassenstufe, in der sich die Schülerinnen und Schüler befinden. So werden visuell-offensichtliche Argumente bei der Beschreibung geometrischer Objekte in den Klassenstufen 5 und 6 noch eher akzeptiert. In den Klassenstufen 7 und 8 sind diese womöglich bei einer relationalen Betrachtung der Geometrie und dem Beweisen von Sätzen nicht mehr zulässig (Hattermann et al., 2015).

Eine wichtige Voraussetzung für das Führen eines Beweises ist zu erkennen, dass es eines Beweises bedarf. Schülerinnen und Schüler sollen das mathematische Argumentieren lernen, indem sie für die Mathematik charakteristische Fragen wie „Gibt es...?“, „Wie verändert sich...?“ oder „Ist das immer so ...?“ stellen. Paradoxerweise stellt gerade die Anschaulichkeit geometrischer Sachverhalte dabei häufig eine Hürde dar. Schülerinnen und Schüler müssen erst dafür sensibilisiert werden, dass auch scheinbar offensichtliche geometrische Sachverhalte eines Nachweises bedürfen. Geeignet erscheinen dafür solche Aufgaben, bei denen das visuell-offensichtliche Argument nicht zum erwarteten Ergebnis führt und ein Sachverhalt zum Beispiel erst durch die Überführung in algebraische-arithmetische Zusammenhänge geklärt werden kann. In diesem Zusammenhang wird der Einfluss von digitalen Werkzeugen, wie etwa dynamischer Geometriesoftware diskutiert. Ein solches Werkzeug erlaubt es Schülerinnen und Schülern eigenständige Erkundungen durchzuführen. Anders als bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal oder bei Abstands- oder Winkelmessungen besteht mithilfe des Zugmodus die Möglichkeit, dass Schülerinnen und Schüler auf sehr schnellem Wege Beispiele für zahlreiche und verschiedene Situationen produzieren und vergleichen können. So können sie zum Beispiel Spezialfälle untersuchen, Bedingungen oder Voraussetzungen variieren und Extremfälle beleuchten. Nutzt man dynamische Geometriesoftware in dieser Hinsicht, muss jedoch darauf geachtet werden, dass Schülerinnen und Schüler nicht bloß bei einem mehr oder minder systematischen Ausprobieren stehenbleiben und sich letztlich nur aufgrund der Menge an Beispielen von der Gültigkeit einer Vermutung überzeugen lassen. Das Betrachten von Beispielen dient in diesem Fall lediglich dem Entdecken und Aufstellen von Vermutungen. Für ihren Nachweis sind tiefergehende Überlegungen nötig, die auf das Finden einer zu Grunde liegenden Gesetzmäßigkeit abzielen. Entscheidend für eine Argumentation ist dabei stets die Einsicht in das Warum, also in den Grund für die Gültigkeit einer Behauptung, selbst wenn diese noch nicht abschließend formal festgehalten werden kann. Zur Förderung der Kompetenz *mathematisch argumentieren* (K1) sollte der Unterricht demnach nicht allein die formal korrekte Beweisdarstellung in den Fokus nehmen, sondern auch Tätigkeiten wie das Stellen charakteristischer Fragen, das begründete Äußern von Vermutungen oder die Nutzung geeigneter Hilfsmittel beim explorativen Arbeiten (Ufer & Kramer, 2015; Ufer & Jahnke, 2015). Dabei ist das Ziel, Schülerinnen und Schüler dazu zu befähigen, mathematische Argumente zu identifizieren und zu verstehen, aus diesen eine logisch korrekte Kette von Schlüssen zu bilden, bzw. eine solche bereits gebildete Kette auf ihre Korrektheit hin zu überprüfen.

4.2 Probleme mathematisch lösen

Die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2) bezieht sich darauf, Aufgaben zu lösen, die keine Routinen, bereits strukturierte Lösungswege oder ähnliches abfragen, sondern die eine Art Hürde zwischen Ausgangspunkt und dem Zielzustand besitzen. Laut Dörner (1983), ist „von Problemen [...] die Rede, wenn die Mittel zum Erreichen eines Zieles unbekannt sind oder die bekannten Mittel auf neue Weise zu kombinieren sind, aber auch dann, wenn über das angestrebte Ziel keine klaren Vorstellungen existieren“ (S. 302 f.). Um Probleme mathematisch zu lösen, bedarf es häufig verschiedener heuristische Hilfsmittel, Strategien und

Prinzipien, die dabei helfen sich einem Problem zu nähern, es zu strukturieren oder einen Lösungsplan zu erstellen.

Innerhalb der Leitidee *Raum und Form* kann eine Vielzahl an Problemen von Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden. Dabei können unterschiedliche Typen von Problemen ausgemacht werden. Weigand et al. (2014) unterscheiden beispielsweise Berechnungs-, Beweis-, Konstruktions-, Modellierungs-, Anzahl- und Optimierungsprobleme. Anhand solcher Probleme können gezielt Problemlösestrategien geübt werden, die zwar keine Lösungsgarantie geben, jedoch Impulse zum Weiterdenken bieten (Bruder, 2002) und mathematische Kreativität fördern. Ein Beispiel für ein Problem, anhand dessen man innerhalb der Leitidee *Raum und Form* heuristische Strategien und Prinzipien üben kann, ist durch die Aufgabe „Nachbarquadrate" (siehe Abbildung 5) gegeben.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Winkeln bei *A*, *B* und *C*?

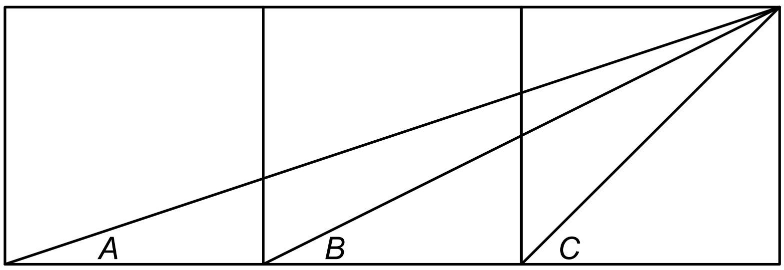


Abbildung 5: *Aufgabe „Nachbarquadrate" (Bruder & Collet, 2011)*

In dieser Aufgabe hilft besonders die Suche nach Symmetrien, Regeln und Mustern, die Teil der Leitidee *Raum und Form* sind. Ergänzt man die gegebene Figur wie in Abbildung 6 zu sehen, so lassen sich die Dreiecke und damit die Winkel der Ursprungsfigur an mehreren Stellen wiederfinden. Die linke untere Ecke zeigt, dass $2A+2B$ einen rechten Winkel ergeben. Damit gilt also $A+B=C$. Dieser Lösungsweg ist einer von vielen; er zeigt exemplarisch, wie ein kreativer Umgang mit einer gegebenen Darstellung zur Lösung führen kann. Im Übrigen illustriert das Beispiel sehr schön, wie Problemlösekompetenz aufgebaut werden kann. Ist den Lernenden diese Art der Aufgaben unbekannt, so werden sie vermutlich nicht ad hoc auf die Idee der geschickten Ergänzung kommen. Haben sie aber einmal dieses Vorgehen in der vorliegenden Aufgabe erfolgreich angewendet, so ist es wahrscheinlicher, dass sie auch bei zukünftigen ähnlich gelagerten Problemen auf dieses Vorgehen zurückgreifen. Im Unterricht kann die Erarbeitung von Problemlösefähigkeiten gemäß der folgenden Phasierung erfolgen (Bruder, 2003):

1. Gewöhnen an heuristische Methoden und Techniken durch Reflektion im Anschluss an eine Aufgabenlösung: Was hat uns geholfen, die Aufgabe zu lösen?
2. Bewusstmachen einer heuristischen Strategie anhand eines markanten Beispiels

3. Wenige ähnliche Beispiele aber unterschiedlicher Schwierigkeit bereitstellen (Wahlmöglichkeit für die Schüler) zur selbständigen Bearbeitung
4. Beispiele aus anderen mathematischen Gebieten und der Lebenswelt suchen, bei denen die neue Strategie auch Anwendung finden kann (Kontexterweiterung der Strategieanwendung)
5. Das eigene Problemlösemodell aufschreiben: Wie gehe ich vor, wenn ich eine schwierige Mathematikaufgabe lösen will?

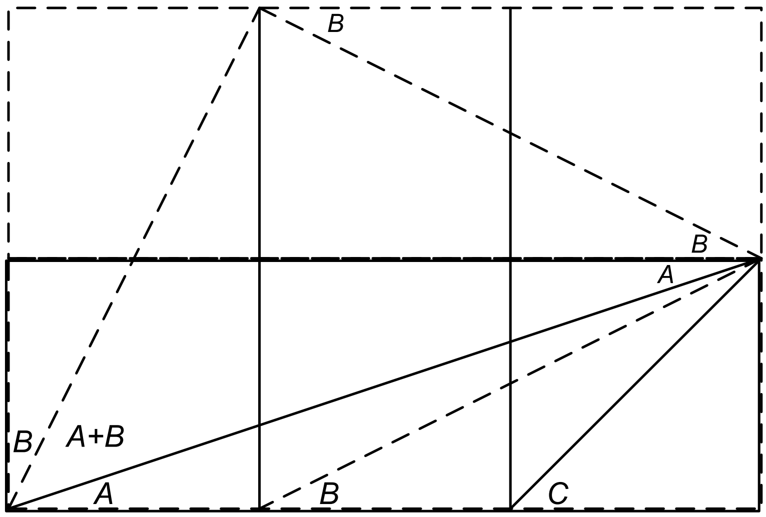


Abbildung 6: *Lösung zu „Nachbarquadrate" mittels Symmetrieprinzip (in Anlehnung an Bruder & Collet, 2011)*

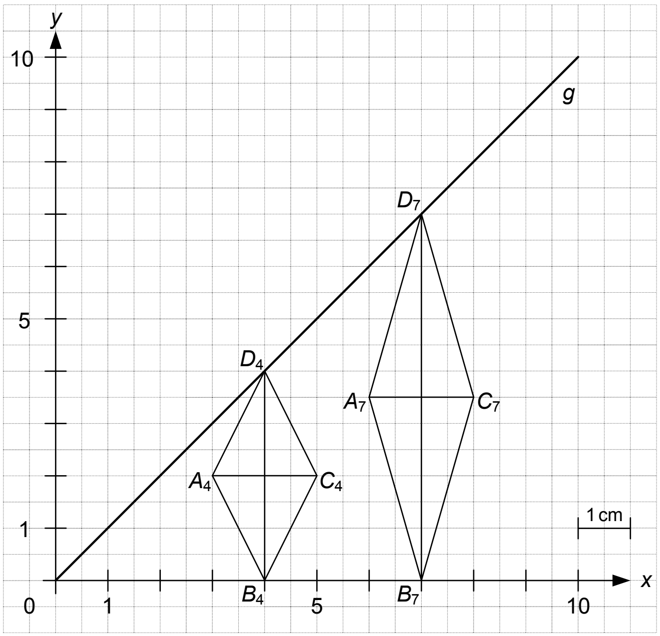
Auch bezogen auf die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2) kann die Verwendung einer dynamischen Geometriesoftware sinnvoll sein. Haug (2012) zeigt, dass Problemlösen lernen mit digitalen Medien besonders dann fruchtbar ist, wenn zusätzlich Reflexionsfragen genutzt werden, bei denen Schülerinnen und Schüler ihr Handeln überdenken. Dies beugt der Gefahr vor, dass Schülerinnen und Schüler im Umgang mit einer dynamischen Geometriesoftware bei einer Versuch-und-Irrtum-Methode stehen bleiben und ihr Vorgehen beim Problemlösen nicht ausreichend reflektieren. Gerade das Reflektieren von Problemlöseprozessen ist für den Aufbau von nutzbaren Heurismen wertvoll (Bruder & Collet, 2011).

Abbildung 7 zeigt die Aufgabe „Rauten" aus VERA-8-2015. Sie gehört zur Leitidee *Raum und Form* und erfordert unter anderem die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2). Dabei geht es um Rauten, bei denen sich einer ihrer Eckpunkte auf einer Geraden befindet und ein weiterer auf der *x*-Achse. Die hier abgedruckte Teilaufgabe fragt nach dem Spezialfall, bei dem die Raute einem Quadrat entspricht. Hierzu geben die Schülerinnen und Schüler die *x*-Koordinate des gesuchten Eckpunkts an.

Die Eckpunkte D_x der Rauten $A_xB_xC_xD_x$ wandern auf der Geraden g mit der Gleichung $y = x$. Dabei gilt immer:

- Die Diagonalen A_xC_x dieser Rauten sind 2 cm lang.
- Die Punkte B_x liegen auf der x-Achse und haben jeweils die gleiche x-Koordinate wie die Punkte D_x.

Im Koordinatensystem sind zwei solche Rauten dargestellt, zu $x = 4$ und zu $x = 7$.



Teilaufgabe 3

Für welchen Wert von x ist die Raute $A_xB_xC_xD_x$ gleichzeitig ein Quadrat?

Gib den x-Wert an.

$x =$ ....

***Abbildung 7:** Aufgabe „Rauten“*

Zur Lösung des Problems, für das es zunächst kein Routineverfahren für Schülerinnen und Schüler gibt, kann es hilfreich sein, weitere Rauten in die Zeichnung einzufügen und durch systematisches Probieren sich der entsprechenden Position des Eckpunkts zu nähern. Oder aber Schülerinnen und Schüler zerlegen die Rauten in Dreiecke, indem sie die Diagonalen einzeichnen. Dabei können sie feststellen, dass die Raute genau dann ein Quadrat ist, wenn die Diagonalen gleich lang sind. Beides kann mithilfe einer Dynamischen Geometriesoftware erprobt werden. Abbildung 8 zeigt, wie das Problem aus der Aufgabe „Raute“ mit GeoGebra bearbeitet werden kann. Mithilfe des integrierten Zugmodus wird die Veränderung der Koordinaten und der Diagonallänge zwischen den Punkten B und D in Abhängigkeit von den x-Werten in Echtzeit visualisiert. Es obliegt hierbei der Lehrkraft zu entscheiden, in welchem Maße die Situation mithilfe der dynamischen Geometriesoftware bereits vorstrukturiert wird. Sind Schülerinnen und Schüler gezwungen, die gesamte Situation selbst zu konstruieren, handelt es sich um ein anspruchsvolles Problem; wird hingegen die Situation gänzlich vorstrukturiert, geht der Problemcharakter der Aufgabe womöglich gänzlich verloren.

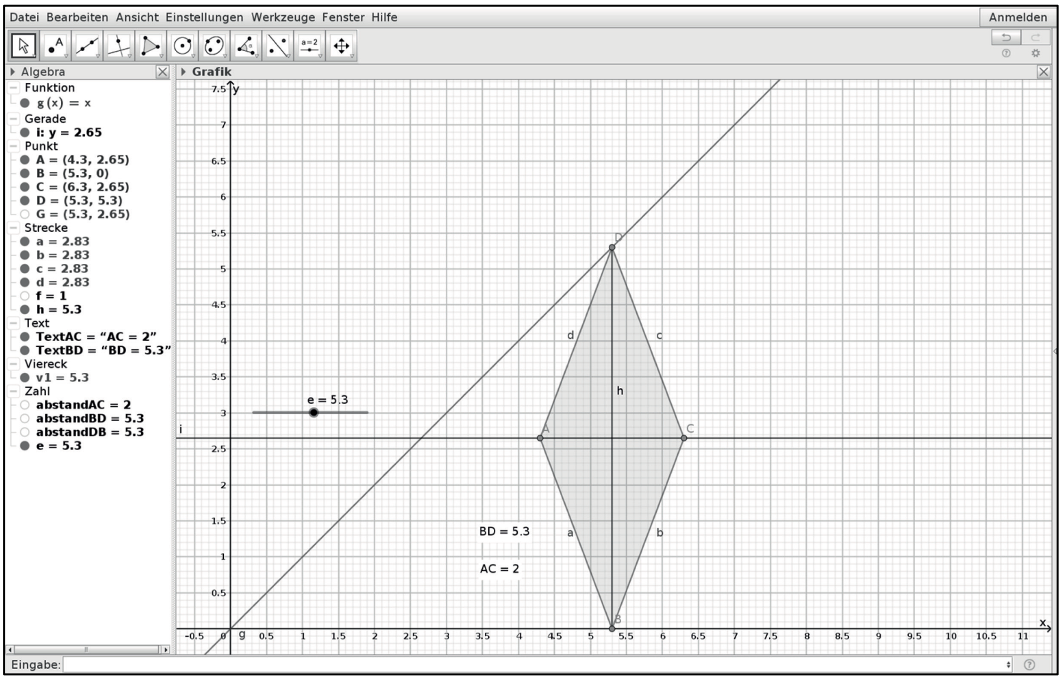


Abbildung 8: *Problemlösen mit GeoGebra*

4.3 Mathematisch modellieren

Die Leitidee *Raum und Form* bietet die Möglichkeit reale Phänomene unter geometrischen Gesichtspunkten zu modellieren. Zur Kompetenz *mathematisch modellieren* (K3) gehört es, dass Schülerinnen und Schüler den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen (Kaiser, Blum, Borromeo Ferri & Greefrath, 2015). Weiterhin gehört zu dieser Kompetenz, dass Schülerinnen und Schüler im jeweiligen mathematischen Modell arbeiten und Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen. Der in Abbildung 9 dargestellte vierschrittige Modellierungskreislauf nach Maaß (2004) gibt einzelne Schritte eines Modellierungsprozesses idealtypisch und vereinfacht wieder.

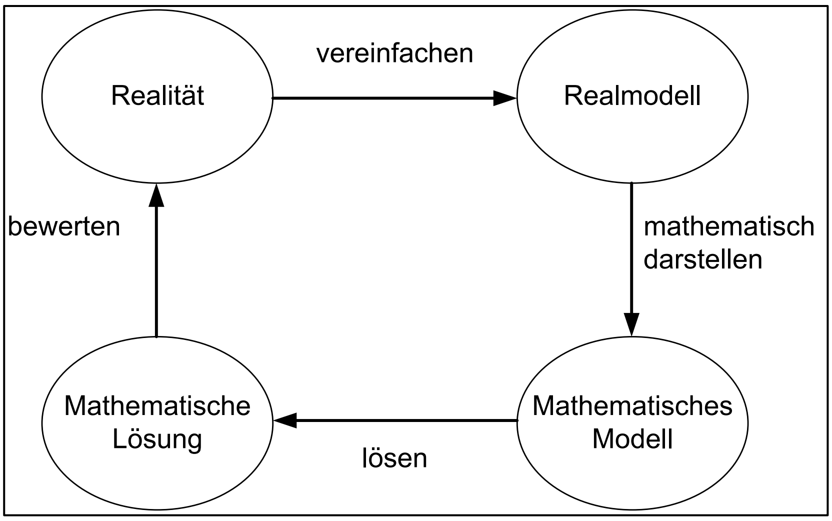


Abbildung 9: *Modellierungskreislauf nach Maaß (2004)*

Geht man von einem realitätsnahen Problem aus, welches Modelle aus der Geometrie zur Bearbeitung erfordert, so zeigt sich, dass insbesondere die Schritte „vereinfachen“ sowie „mathematisch darstellen“ Kompetenzen adressieren, wie sie unter der Leitidee *Raum und Form* gefasst werden. Diese Inhaltskompetenzen sind das Erkennen und Beschreiben geometrischer Objekte, Beziehungen und Strukturen in der Umwelt. Dieser Gedanke soll anhand eines Beispiels verdeutlicht werden. In Abbildung 10 ist eine Modellierungsaufgabe dargestellt, bei der Schülerinnen und Schüler bestimmen sollen, wie viel Sand in einen Container passt. Dazu steht ihnen ein Foto zur Verfügung, bei dem Maßangaben zum Container bereits eingefügt sind.

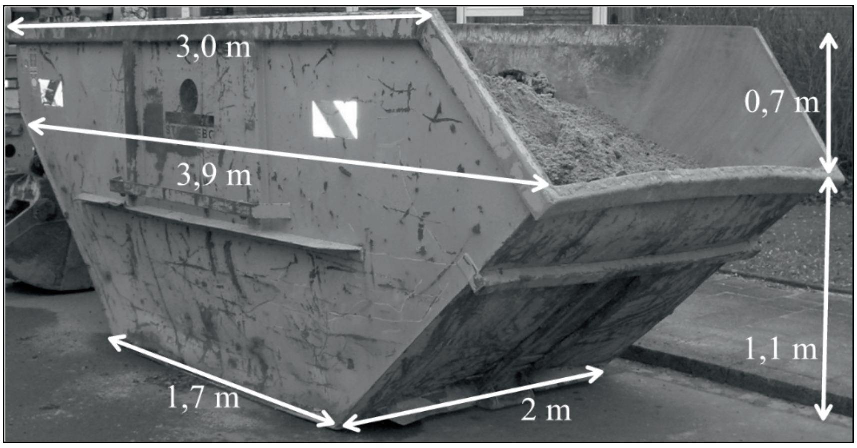


Abbildung 10: *Container (Greefrath, 2006, S. 8)*

Diese Aufgabe kann insgesamt der Leitidee *Messen* zugeordnet werden, da ein Volumen bestimmt werden soll. Allerdings werden ebenso Kompetenzen der Leitidee *Raum und Form* benötigt, um den Modellierungsprozess durchzuführen. So müssen Schülerinnen und Schüler zunächst ein mathematisches Modell aufstellen, was in diesem Fall bedeutet, dass sie den Container als geometrischen Körper beschreiben. Hierzu bieten sich verschiedene Möglichkeiten an. So kann der Container als zusammengesetzter Körper aus unterschiedlichen Prismen modelliert werden, indem beispielsweise zwei Prismen mit trapezförmiger Grundfläche angenommen werden. Ebenso ist es möglich, den Container so zu modellieren, dass er aus zwei Prismen mit trapezförmiger Grundfläche und einem Quader besteht. Allerdings muss der Kontext berücksichtigt werden. Da der Container nach oben und zumindest zu einer Seite geöffnet ist, kann nicht das gesamte Volumen des Containers ausgeschöpft werden. Daher bedarf es eines geometrischen Modells, in welchem dieser Umstand Berücksichtigung findet. Abbildung 11 zeigt ein solches Modell, bei dem der Container als Prisma mit einer einzigen trapezförmigen Grundfläche beschrieben wird.

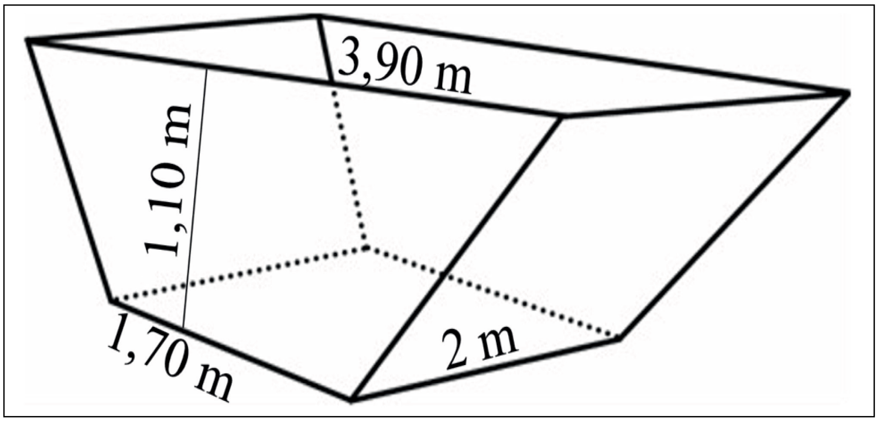


Abbildung 11: *Modell Container (Greefrath, 2006, S. 9)*

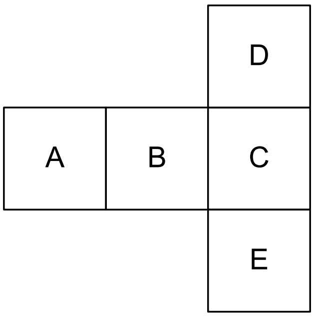
Unabhängig davon, welche Modellierung im Einzelnen bevorzugt wird, gilt es bei allen der genannten Modelle, ein geometrisches Objekt in der Umwelt zu beschreiben. In diesem speziellen Fall wird zusätzlich gedanklich mit dem Körper operiert. So muss für jedes der genannten Modelle eine Seitenfläche des Containers als Grundfläche(n) möglicher Prismen erkannt werden. Auch diese Kompetenz, mit Körpern sowie mit Strecken und Flächen gedanklich zu operieren, gehört zur Leitidee *Raum und Form*. Will man das geometrische Modell nicht bloß durch Maßangaben und Formeln zur Berechnung von Flächeninhalten bzw. Volumina darstellen, sondern wie in Abbildung 11 mithilfe einer Zeichnung, so wird zudem die inhaltliche Kompetenz Körper mittels Schrägbildern darzustellen adressiert. Die Kompetenz Netze, Schrägbilder und Modelle von Körpern anzufertigen und Körper aus ihren entsprechenden Darstellungen zu erkennen gehört ebenfalls zur Leitidee *Raum und Form*.

4.4 Mathematische Darstellungen verwenden

Die Kompetenz *mathematische Darstellungen verwenden* (K4) erfordert es, verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen anzuwenden, zu interpretieren und zu unterscheiden, Beziehungen zwischen Darstellungsformen zu erkennen und unterschiedliche Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auszuwählen und zwischen ihnen zu wechseln. Bezogen auf die Leitidee *Raum und Form* ergeben sich verschiedene Situationen, in denen mit mathematischen Darstellungen gearbeitet wird. Hierzu zählen z. B. Darstellungen mathematischer Objekte im Koordinatensystem, aber auch das Zeichnen und Konstruieren geometrischer Figuren unter Verwendung von Hilfsmitteln wie Zirkel, Lineal oder Geodreieck. Insbesondere geht es innerhalb der Leitidee *Raum und Form* um Körperdarstellungen. Schülerinnen und Schüler sollen in die Lage versetzt werden, Körper (z. B. als Netz, Schrägbild oder Modell) darzustellen und Körper aus ihren entsprechenden Darstellungen zu erkennen. In der Leitidee *Raum und Form* geht es also ebenfalls um mathematische Darstellungen. Allerdings liegt der Unterschied zur Kompetenz *mathematische Darstellungen verwenden* (K4) darin begründet, dass es nicht um die Erfassung der konkreten Figur (Darstellung) geht, sondern um z. B. eine beschriebene Figurklasse (Konzept).

Eine Schwierigkeit beim Umgang mit verschiedenen Darstellungen ist dabei die stabile Verknüpfung der Darstellungsformen. Die Aufgabe „Netz einer Schachtel“ aus dem aktuellen VERA-8-Test (siehe Abbildung 12) konfrontiert Schülerinnen und Schüler mit einer Netzdarstellung. Hierbei muss in Teilaufgabe 1 gedanklich mit dem Netz bzw. einem Würfel operiert werden und in Teilaufgabe 2 wird die Darstellung ergänzt, d. h. es wird zumindest in Ansätzen eine Netzdarstellung selbst angefertigt. In beiden Fällen müssen vor allem gedankliche Wechsel zwischen einer zweidimensionalen Darstellung der Oberfläche eines Körpers auf der einen Seite und seiner räumlichen Gestalt auf der anderen Seite gelingen.

Die Abbildung stellt das Netz einer Schachtel dar. Wenn man die Schachtel zusammengeklappt, ist sie an einer Seite geöffnet.



Teilaufgabe 1

Welche Seite liegt gegenüber der Öffnung?

Gib den Buchstaben dieser Seite an.

....

Teilaufgabe 2

Ergänze das Netz in der Abbildung so, dass man die Schachtel schließen könnte.

Abbildung 12: *Aufgabe "Netz einer Schachtel"*

Sind Schülerinnen und Schüler in der Lage, Netze von Würfeln sicher zu erkennen, so können derartige Aufgaben auf andere Körper ausgeweitet und die Schülerinnen und Schüler mit diesen konfrontiert werden. So muss bei Netzen von Quadern neben der Anzahl und der Lage auch die Form der einzelnen Seitenflächen berücksichtigt werden. Bei schiefen Prismen werden zusätzlich Winkel in die Überlegungen einbezogen. Solche Aufgaben eignen sich auch für eine binnendifferenzierte Aufgabenverteilung im Unterricht. Dabei können alle Schritte enaktiv unterstützt werden, indem Netze aufgezeichnet, ausgeschnitten und gefaltet werden. Das Wechseln zwischen mathematischen Darstellungsformen wie z. B. zwischen Schrägbildern und Netzdarstellungen ist fest verbunden mit der Kompetenz *mathematische*

Darstellungen verwenden (K4). Der Wechsel selbst setzt in der Regel räumliches Vorstellungsvermögen voraus. Das bedeutet, dass der Wechsel in der Regel nicht auf dem Papier geschieht, sondern in Gedanken vollzogen wird (siehe Abschnitt 3.3, S.11). Der Übergang vom konkreten zum gedanklichen Handeln kann dabei durch die folgende Phasierung unterstützt werden (Wartha & Schulz, 2010):

1. Die Handlungen werden an geeignetem Material durchgeführt.
2. Die Materialhandlungen werden beschrieben.
3. Die Materialhandlungen werden in der Vorstellung beschrieben (der oder die Lernende soll sich das Material also nur noch vorstellen).
4. Die Handlungen werden auf symbolischer Ebene ausgeführt.

4.5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Zur Kompetenz *mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) gehört es mit Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Diagrammen und Tabellen zu arbeiten, symbolische und formale Sprache und natürliche Sprache wechselseitig zu übersetzen, Lösungs- und Kontrollverfahren auszuführen und mathematische Werkzeuge wie Formelsammlungen und Taschenrechner sinnvoll und verständig einzusetzen. Die in der Beschreibung der Kompetenz genannten symbolischen, formalen und technischen Elemente der Mathematik können mithilfe folgender Fragen charakterisiert werden:

- Symbolisch: Wie können geometrische Zusammenhänge prägnant formuliert werden (Symbolschreibweisen für geometrische Objekte)?
- Formal: Welcher Formalisierungsanspruch wird an bestimmte Tätigkeiten (Konstruktion von Schrägbildern, aber auch Formulieren von Definitionen, Sätzen und Beweisen) angelegt?
- Technisch: Inwiefern ist es relevant, mit bestimmten Geräten (Zirkel, Lineal, Geodreieck, dynamischer Geometriesoftware) umgehen zu können?

Der Werkzeugeinsatz im Geometrieunterricht meint häufig Zirkel und Geodreieck, mit denen Konstruktionen und Zeichnungen angefertigt werden. Darüber hinaus zählt auch die Verwendung digitaler Werkzeuge zu dieser allgemeinen Kompetenz. Insbesondere wird dynamische Geometriesoftware in den Lehrplänen einzelner Bundesländer explizit erwähnt (z. B. KLP NRW[4]). Eine Vielzahl an Gründen spricht für das Konstruieren mit Zirkel und Lineal im Mathematikunterricht. Weigand et al. (2014) nennen beispielsweise das Entwickeln von Problemlöse- und Argumentationsfähigkeiten, die erleichterte Einführung neuer Begriffe, die Entwicklung kreativer und praktischer Fähigkeiten. Bezogen auf die Leitidee *Raum und Form*

[4] https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-i/index.html

ergeben sich verschiedene Möglichkeiten, diese Kompetenz zu stärken. Das Zeichnen von Schrägbildern oder Würfelnetzen sind Beispiele für Aufgaben, in denen Werkzeuge wie Zirkel und Lineal verwendet werden. Die Schwierigkeit, dreidimensionale Objekte auf den zwei Dimensionen eines Papiers einzufangen, war schon früh ein zentrales Thema der Kunst. Leuders (2004) gibt viele Beispiele dafür, wie dieser kulturhistorische Aspekt auch Ausgangspunkt für interessante mathematische unterrichtliche Erkundungen sein kann.

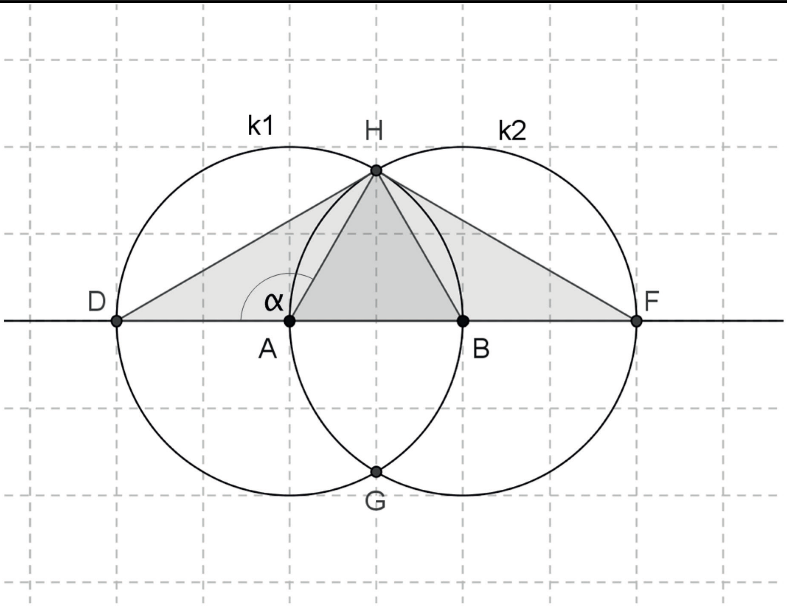
4.6 Kommunizieren

Im Fach Mathematik umfasst die Kompetenz *mathematisch kommunizieren* (K6) Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse zu dokumentieren, verständlich darzustellen und zu präsentieren, Fachsprache adressatengerecht zu verwenden und Äußerungen von anderen und Texte zu mathematischen Inhalten zu verstehen und zu überprüfen.

Mit der Kompetenz *mathematisch kommunizieren* (K6) werden also sowohl rezeptive als auch produktive Anforderungen an Schülerinnen und Schüler beschrieben. Dabei ist es wichtig zu betonen, dass die rezeptiven Anforderungen über das bloße Lesen und Verstehen von Mathematikaufgaben hinausgehen. Dies soll mittels der Aufgabe „Zwei Kreise“ aus dem VERA-8-Testheft des Jahres 2016 erläutert werden (siehe Abbildung 13).

In dieser Aufgabe ist den Schülerinnen und Schülern eine Abbildung gegeben, in der zwei sich schneidende, gleich große Kreise zu sehen sind. Darunter befinden sich verschiedene Aussagen über die eingezeichneten Objekte. Für das Lösen dieser Aufgabe ist es zunächst wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler sowohl den Eingangstext als auch die zu bewertenden Aussagen in der Tabelle inhaltlich richtig verstehen. Dennoch ist dies nicht ausreichend. Zentral ist in dieser Aufgabe die Anforderung, Äußerungen zu mathematischen Inhalten zu bewerten. Dabei enthalten die zu bewertenden Aussagen keine Argumentationsanteile, weshalb hier ausschließlich die Kompetenz *mathematisch kommunizieren* (K6) adressiert wird, und nicht etwa die Kompetenz mathematisch argumentieren (K1).

Ein Beispiel zur Kommunikationskompetenz in Verbindung mit der Leitidee *Raum und Form* ist die Beschreibung geometrischer Konstruktionen. Mithilfe von diesbezüglichen Aufgaben können Schülerinnen und Schüler konkrete Sprachhandlungen und übergeordnete Sprachhandlungsmuster erwerben. Dabei liegt ein besonderes Augenmerk auf der Verwendung von Fachsprache. Für Lernende bieten solche Beschreibungen im Geometrieunterricht eine wertvolle Gelegenheit ihr Bild von dem zu erweitern, was gemeinhin unter Mathematik verstanden wird; eine weitgehend aufs Rechnen und den Umgang mit Formeln beschränkte Tätigkeit. So rechnen Schülerinnen und Schüler hier nicht, sondern beschreiben und erläutern Prozesse.



In der oben stehenden Skizze ist A der Mittelpunkt des Kreises k1 und B der Mittelpunkt des Kreises k2. Beide Kreise haben den gleichen Radius r = $|AB|$.

Teilaufgabe 1: Zwei Kreise

Prüfe jeweils, ob die folgenden Aussagen auf diese Figur zutreffen oder nicht.

Kreuze an.

	wahr	falsch
Alle Winkel im Dreieck ABH sind gleich groß.	☐	☐
Das Dreieck BFH ist gleichseitig.	☐	☐
Das Dreieck DFH ist gleichschenklig.	☐	☐
Im Dreieck AHD sind alle drei Winkel unterschiedlich groß.	☐	☐
Der Winkel α beträgt 60°.	☐	☐

Abbildung 13: *Aufgabe „Zwei Kreise“*

Typische Fehlerquellen sind dabei das Verfassen einer Art von Erlebnisberichten aus der Ich-Perspektive, dass wichtige Konstruktionsparameter nicht genannt werden und die Auslassung von Modulen. Dies ist z. B. der Fall, wenn die Konstruktion einer Mittelsenkrechten beschrieben wird, statt deren Verwendung als eine Einheit, das heißt als modularer Konstruktionsschritt. Diese Probleme werden bei der Verwendung eines digitalen Werkzeugs häufig noch ergänzt durch die Notation einer Programmsyntax (Schacht, 2016). Schülerinnen und Schüler neigen bei Werkzeugnutzung häufig dazu, die Sprache des Programms wiederzugeben statt einer mathematischen Beschreibung. Das kann den Vorteil haben, dass in der Konstruktionsbeschreibung leicht nachvollziehbar ist, welche Tätigkeiten sie in der Software ausgeführt haben, allerdings verliert die Beschreibung dadurch ihre Unabhängigkeit vom Werkzeug und damit eventuell sogar ihre Allgemeingültigkeit.

Diesen Schwierigkeiten kann entgegengewirkt werden, wenn beispielsweise die übliche Reihenfolge umgekehrt und erst die Beschreibung und dann die Konstruktion erstellt wird. So dient die Beschreibung als Grundlage der Konstruktion und etwaige Lücken fallen bei dem Versuch der Konstruktion direkt auf. Leisen (2016, S. 81) stellt in seinen Praxismaterialien das Spiel „Stille Post“ vor, bei dem zwischen verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen gewechselt wird. Dazu erhält eine Schülergruppe (oder eine einzelne Schülerin bzw. einen Schüler) zum Beispiel einen Graphen im Koordinatensystem, beschreibt diesen Graphen schriftlich in ganzen Sätzen und gibt anschließend diese Beschreibung an die nächste Schülergruppe (oder eine einzelne Schülerin bzw. einen Schüler). Nun wird anhand dieser Beschreibung wieder ein Funktionsgraph gezeichnet, dieser weitergegeben usw. Dieses Spiel lässt sich analog auf Konstruktionsbeschreibungen und Konstruktionen in der Geometrie übertragen. Ein solches Vorgehen kann auch dadurch unterstützt werden, dass zunächst die Beschreibung auf Papier verfasst wird und dann an den PC gewechselt wird. Einige dynamische Geometrieprogramme erstellen außerdem zu jeder Datei ein Konstruktionsprotokoll, welche im Anschluss mit der eigenen Beschreibung verglichen werden kann.

5 Literaturverzeichnis

Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education – A review. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(2), 257–269.

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bruder, R. (2002). Lernen, geeignete Fragen zu stellen. Heuristik im Mathematikunterricht. *Mathematik lehren*, *115*, 4–8.

Bruder, R. (2003). *Methoden und Techniken des Problemlösenlernens. Material im Rahmen des BLK-Programms "Sinus" zur "Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts"*. Kiel: IPN.

Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Büchter, A. (2010). *Zur Erforschung von Mathematikleistung. Theoretische Studie und empirische Untersuchung des Einflussfaktors Raumvorstellung*. Dortmund: Technische Universität Dortmund.

Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17* (1), 31–48.

Dörner, D. (1983). *Lohhausen: Vom Umgang mit Unbestimmtheit und Komplexität*. Bern: Huber.

Franke, M. & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie. In der Grundschule*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Franke, M. (2007). *Didaktik der Geometrie*. Spektrum: Heidelberg, Berlin.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Greefrath G., Hußmann S. & Fröhlich I. (2010). *Geometrie bewegen*. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *52*(34), 1–8.

Greefrath, G. (2006). *Modellieren lernen – mit offenen realitätsnahen Aufgaben.* Hallbergmoos: Aulis.

Grüßing, M. (2012). *Räumliche Fähigkeiten und Mathematikleistung: Eine empirische Studie mit Kindern im 4. Schuljahr*. Münster: Waxmann.

Hattermann, M., Kadunz, G., Rezat, S. & Sträßer, R. (2015). Geometrie: Leitidee Raum und Form. In Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G.. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 185–219). Berlin: Springer.

Haug, R. (2006). Produktives Üben des räumlichen Vorstellungsvermögens – virtuelle Räume neu entdecken (9. – 10. Klasse). *Praxis der Mathematik, 48*, 32–36.

Haug, R. (2012). *Problemlösen lernen mit digitalen Medien. Förderung grundlegender Problemlösetechniken durch den Einsatz dynamischer Werkzeuge*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Research.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics*. Technical Report on the Nationwide Survey. London: Institute of Education, University of London.

Heinze, A. & Reiss, K. (2004). The teaching of proof at the lower secondary level – a video study. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *36*(3), 98–104.

Hiele van, P. M. (1967). Piagets Beitrag zu unserer Einsicht in die kindliche Zahlbegriffsbildung. *Rechenunterricht und Zahlbegriff* (S. 107–111). Westermann: Braunschweig.

Jahnke, H.-N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebecker, B. Schmidt-Thieme, H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch Mathematikdidaktik* (S. 331–356). Rotterdam: Springer.

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R. & Greefrath, G. (2015). Anwendungen und Modellieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 357–383). Berlin Heidelberg: Springer.

KMK (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf (abgerufen am: 12.09.2016).

KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss.* URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Haupt.pdf (abgerufen am: 12.09.2016).

Kuntze, S. (2004). Wissenschaftliches Denken von Schülerinnen und Schülern bei der Beurteilung gegebener Beweisbeispiele aus der Geometrie – Ergebnisse einer Untersuchung textlicher Eigenproduktionen von Schülerinnen und Schülern der 8. Jahrgangsstufe des Gymnasiums. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 25 (3/4), 245–268.

Leisen, J. (2016). *Handbuch Sprachförderung im Fach. Sprachsensibler Fachunterricht in der Praxis*, Teil C (Praxismaterialien). Stuttgart: Klett.

Leuders, T. (2004). Raumgeometrie: Ein Unterricht mit Kernideen. *Der Mathematikunterricht*, *50* (1–2), 5–28.

Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht – Ergebnisse einer empirischen Studie*. Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Maier, P. H. (1999). *Räumliches Vorstellungsvermögen. Ein theoretischer Abriß des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen; mit didaktischen Hinweisen für den Unterricht*. Donauwörth: Auer.

Mason, M., (2002). The van Hiele Levels of Geometric Understanding. *Professional Handbook for Teachers*, Geometry: Explorations and Applications, MacDougal Litteil Inc.

Royar, T. & Streit, C. (2006). Kopfgeometrie im Lernzirkel. *Praxis der Mathematik, 48* (12), 26–31.

Schacht, F. (2016). Sprache im Mathematikunterricht mit digitalen Werkzeugen am Beispiel von Konstruktionsbeschreibungen. In GDM, *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 401–405). Münster: WTM.

Schwill, A. (1993). Fundamentale Ideen der Informatik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *25* (1), 20–31.

Senftleben (1996). Erkundungen zur Kopfgeometrie, *Journal für Mathematikdidaktik*, *17*(1), 49–72.

Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S., & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht: Die Rolle von Methodenwissen als Komponente der Beweiskompetenz. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *30*(1), 30 – 54.

Ufer, S. & Kramer, J. (2015). Die Kompetenz mathematisch Argumentieren. In W. Blum, S. Vogel, C. Drüke-Noe, & A. Roppelt (Hrsg.), *Bildungsstandards aktuell: Mathematik für die Sekundarstufe II* (S. 83–94). Braunschweig: Diesterweg.

Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C. & Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin, 139*(2), 352 – 402.

Wartha, S. & Schulz, A. (2010). *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen*. Kiel: IPN-Materialien. (Download unter: www.sinus-an-grundschulen.de)

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R. , Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J. Schmidt-Thieme, B. & Wittmann, G. (2014). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. Berlin: Springer Spektrum.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, *61*(1), 37–46.