Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten 2017
8. Jahrgangsstufe (VERA-8)
Mathematik – Didaktische Handreichung
Modul B

Didaktische Erläuterung
Leitidee Messen

Inhaltsverzeichnis

Autorinnen und Autor der fachdidaktischen Erläuterungen in den Modulen B und C sind Catharina Adamek und Corinna Hertleif (B) sowie Uwe Schürmann (C). Die gezeigten Testaufgaben entstanden in Kooperation von Lehrkräften aus acht Bundesländern und Fachdidaktikerinnen / Fachdidaktikern unter Federführung
der Arbeitsgruppe Prof. Greefrath, Universität Münster (fachdidaktische Leitung) und
des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen.

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien auch online finden können?

www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

1. Allgemeine Erläuterungen

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz mit ihren Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen bilden die Grundlage für die VERgleichsArbeiten in der 8. Jahrgangsstufe (VERA-8) im Fach Mathematik. Daher soll in dieser didaktischen Handreichung wie in den Handreichungen der letzten Jahre auch zunächst der Aufbau dieser Standards erläutert werden. Anschließend wird eine der fünf Leitideen, nämlich die Leitidee *Messen*, in den Fokus genommen, um aufzuzeigen, wie sich diese Idee durch die gesamte Schullaufbahn zieht. Dabei wird besonderes Augenmerk auf die Hürden und Herausforderungen gelegt, die im Rahmen der Leitidee *Messen* bezogen auf die Kompetenzentwicklung von Schülerinnen und Schülern auftreten können. Neben einigen Vorschlägen zur Bewältigung dieser Herausforderungen im Unterricht wird des Weiteren aufgezeigt, wie die Testaufgaben von VERA-8 inhaltliche und prozessbezogene Anforderungen zur Leitidee *Messen* beschreiben und wie diese Aufgaben als Ausgangspunkt für die weitere unterrichtliche Beschäftigung nutzbar gemacht werden können.

2. Leitideen in den Bildungsstandards

2.1. Die Bildungsstandards im Fach Mathematik

Vorbereitet durch die Ergebnisse mehrerer Vergleichsstudien wie etwa der PISA-Studie beschloss die Kultusministerkonferenz im Jahr 2003, für zentrale Fächer Bildungsstandards einzuführen. Mit dieser Einführung wurde die Erwartung verbunden, eine Zielklarheit in Bezug auf die Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in diesen Fächern zu erhalten, sowie eine Überprüfung des Erreichten zu ermöglichen (Blum et al. 2006, S. 14-16). So sollte der Übergang von einer fast ausschließlichen Inputsteuerung des Bildungssystems zu einer Kombination aus Input- und Output-Steuerung erreicht werden. Die zentrale Idee dabei war die Festlegung von Kriterien, anhand derer die Leistung von Lernenden bzw. Gruppen von Lernenden verglichen werden kann. Dafür greifen die Bildungsstandards „allgemeine Bildungsziele auf und benennen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe an zentralen Inhalten erworben haben sollen“ (vgl. KMK, 2003/2004). Damit soll erreicht werden, dass sich Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher Bundesländer zu bestimmten Zeitpunkten auf einem vergleichbaren Leistungsstand befinden und gleichzeitig Schulwechsel zwischen verschiedenen Bundesländern einfacher ermöglicht werden.

Im Kompetenzmodell, das den Bildungsstandards Mathematik zu Grunde liegt, werden drei Dimensionen unterschieden (vgl. Abb. 1):

1. *„Allgemeine mathematische Kompetenzen“*
2. *„Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen“, strukturiert nach Leitideen, und*
3. *„Anforderungsbereiche“.*

Situationen, in denen mathematische Kompetenzen benötigt werden, können durch einen oder mehrere Werte auf jeder der drei Dimensionen beschrieben werden. Durch Vorgabe dieses Modells sollen schulische Anforderungen transparent gemacht, die Entwicklung eines kompetenzorientierten Unterrichts gefördert sowie eine Grundlage für die Überprüfung der erreichten Ergebnisse geschaffen werden.

Im Folgenden werden die Dimensionen dieses Kompetenzmodells kurz beschrieben[1].

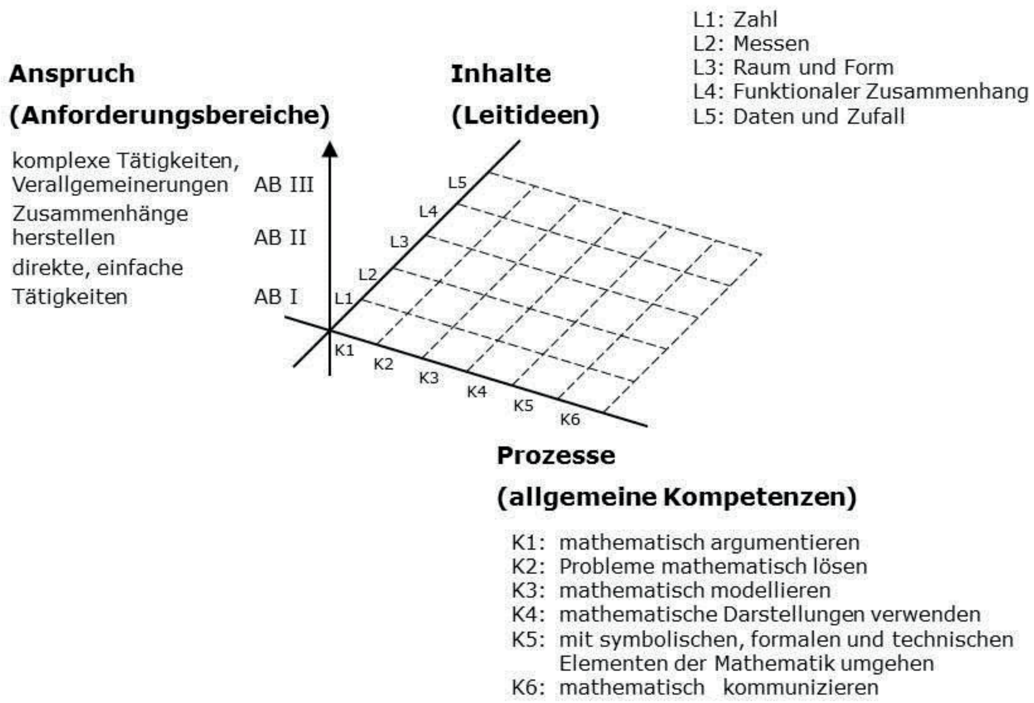


Abbildung 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards (https://www.iqb.hu-berlin.de/institut/ab/sek1_ma)

Es werden sechs *allgemeine mathematische Kompetenzen* unterschieden. Diese bilden die Prozessdimension des Modells und beschreiben, auf welche Art und mit welchem Ziel mathematische Inhalte genutzt werden, um Anforderungen des Unterrichts und des täglichen Lebens zu bewerkstelligen. Sie lassen sich nicht streng voneinander abgrenzen, sondern werden im Verbund erworben und angewendet. Beispielsweise kann das *mathematische Lösen von Problemen* (K2) auch mit Hilfe *mathematischen Argumentierens* (K1) und unter *Verwendung mathematischer Darstellungen* (K4) erfolgen. Sie werden jedoch differenziert betrachtet, um spezifische Eigenschaften und Anforderungen transparent zu machen, die mit jeder Kompetenz einhergehen.

---

[1] Ausführlichere Erläuterungen sowie Beispielaufgaben sind in „Bildungsstandards Mathematik: konkret“ (Hrsg. von W. Blum u.a., Cornelsen-Scriptor 2006) nachzulesen. Weitere Beispielaufgaben sind auf der Homepage des IQB und in Katzenbach (2009) zu finden.

Die zweite Dimension des Modells wird durch die fünf *Leitideen* gebildet. Diese Inhaltsdimension beschreibt, welche mathematischen Konzepte zur Bewältigung einer Situation angewendet werden können oder müssen.

Die dritte und letzte Dimension des Kompetenzmodells der Bildungsstandards bilden die *Anforderungsbereiche*. Diese sollen den kognitiven Anspruch kompetenzbezogener mathematischer Tätigkeiten auf theoretischer Ebene beschreiben.

Bildungstheoretisch liegt den Bildungsstandards für das Fach Mathematik der Auftrag zu Grunde, dass der Mathematikunterricht allgemeinbildend sein sollte. Dabei sollten jedem Schüler und jeder Schülerin drei Grunderfahrungen vermittelt werden:

(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

(2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben (Winter, 1995, S.1).

Alle Bestandteile des Kompetenzmodells sind zentrale Punkte der Bildungsstandards und stehen gleichwertig nebeneinander. Da im Rahmen dieser Handreichung allerdings kaum alle Punkte umfassend erläutert werden können, wird im Folgenden ein spezieller Aspekt, nämlich die Leitidee *Messen*, herausgegriffen und erläutert. Dies bedeutet keinesfalls, dass die anderen Bestandteile der Bildungsstandards diesem Punkt in irgendeiner Weise nachstehen würden. Insbesondere die verstärkte Orientierung an den Kompetenzen und die Formulierung zentraler Kompetenzerwartungen sind eine Errungenschaft der Bildungsstandards, die auch bei der Beschäftigung mit einem Inhaltsbereich nicht in Vergessenheit geraten dürfen.

2.2. Was ist eine Leitidee?

Mit Leitideen werden zusammenhängende Felder mathematischer Konzepte beschrieben, die genutzt werden, um reale Phänomene zu beschreiben. Mit ihnen werden zugrunde liegende Strukturen von Erscheinungen und Vorgängen der realen Welt erfasst, die sichtbar werden, wenn man die Welt mit mathematischen Augen betrachtet (Freudenthal, 1983). Dies können beispielsweise Quantifizierungen aller Art (Leitidee *Zahl*), oder ebene und räumliche Figuren, Formen, Gebilde und Muster (Leitidee *Raum und Form*) sein. Der Grundgedanke dabei ist, dass mathematische Problemsituationen das permanente Zusammenspiel von prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen erfordern. Somit sind die Inhalte immer im Kontext allgemeiner mathematischer Kompetenzen und deren Anforderungsbereichen zu sehen. Leitideen sind als fundamentale Ideen aufzufassen (vgl. Schwill, 1993), die im Mathematikunterricht auf jedem intellektuellen Niveau vermittelt werden können und in verschiedenen Gebieten eines Bereichs vielfältig anwendbar sind. In den Bildungsstandards wird dazu erläutert: „Eine Leitidee vereinigt Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete und durchzieht ein mathematisches Curriculum spiralförmig. Die Zuordnung einer inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz zu einer mathematischen Leitidee ist nicht in jedem Fall eindeutig, sondern davon abhängig, welcher Aspekt mathematischen Arbeitens im inhaltlichen Zusammenhang betont werden soll.“ (KMK, 2003, S. 18).

3. Die Leitidee *Messen*

3.1. Was meint „*Messen*“?

Nach einem allgemeinen Blick auf das Kompetenzmodell der Bildungsstandards und den Begriff der Leitidee soll an dieser Stelle der Frage nachgegangen werden, was die Leitidee *Messen* ausmacht und welches Prinzip hinter dem Prozess des *Messens* steht. Auf den ersten Blick mag diese Frage einfach zu beantworten sein, denn *Messen* ist ein wohlbekannter Begriff in unserer Alltagssprache und meint das Bestimmen von Größen, etwa von Längen oder Winkeln mit Hilfe bestimmter Werkzeuge wie Lineal oder Geodreieck. Doch hinter dem Begriff *Messen* steckt viel mehr. Im Allgemeinen geht es beim *Messen* darum, über bestimmte Eigenschaften eines realen Objekts quantitative Aussagen zu treffen. Demnach wird die Welt der uns umgebenen Phänomene, der Gegenstände, Vorgänge und Zustände durch das Messen in die strukturierte Welt der Zahlen übertragbar (Vohns, 2012). Um eine Eigenschaft genauer zu erfassen und verschiedene reale Objekte hinsichtlich dieser Eigenschaft zu vergleichen, macht man sich das mathematische Konzept der Größe zunutze. *Messen* erlernen meint also stets auch das Kennen- und Anwenden- Lernen unterschiedlicher Größen. Dabei sind Größen nicht als natürliche Eigenschaft eines Objektes zu verstehen, sondern vielmehr als die Möglichkeit, den Objekten der Wirklichkeit in verschiedener Weise, z.B. hinsichtlich ihres Volumens oder ihrer Masse, einen abstrakten Wert der Mathematik zuzuordnen, der sich ähnlich wie eine Zahl verhält (Leuders & Barzel, 2014). Messgrößen sind dabei im Allgemeinen aus einer Maßzahl und einer standardisierten Maßeinheit zusammengesetzt.

Eine grundsätzliche Vorgehensweise für die zahlenmäßige Erfassung einer Eigenschaft eines Objekts ist es, sich ein passendes Vergleichsobjekt mit bekannter Maßeinheit zu wählen und mit dem Objekt zu vergleichen. Wenn beispielsweise die Maße einer Schreibtischplatte ermittelt werden sollen, kann man sich fragen, wie oft ein Vergleichsobjekt bekannter Größe, wie etwa ein DINA4-Blatt, in die Länge bzw. Breite des Schreibtisches passen. Dies wird auch als das *Prinzip des Messens* bezeichnet und didaktisch als Grundvorstellung des „Passen in“ beschrieben (Leuders & Barzel, 2014). *Messen* kann demnach als Auslegen einer Maßeinheit verstanden werden. Dieses Vorgehen lässt sich beispielhaft auch bei der Bestimmung von Flächeninhalten wiederfinden. Um eine Fläche zu messen, entscheidet man sich zunächst für eine passende Einheit und zählt dann, wie oft die Einheitsfläche in die ursprüngliche Fläche passt. Das Prinzip des Vergleichs mit einer Einheit greifen Franke und Ruwisch (2010, S. 184 ff.) auch in ihrem didaktischen Stufenmodell zur Erarbeitung von Messgrößen auf. Hier wird zwischen direktem und indirektem Vergleichen unterschieden. Ein Schritt des Modells ist das direkte Vergleichen von Repräsentanten. Dies bedeutet, dass zwei Objekte hinsichtlich einer Relation (z.B. „… ist so lang wie …") geordnet und verglichen werden. Ein solcher direkter Vergleich gelingt jedoch nur dann, wenn sich zwei Objekte zur selben Zeit am selben Ort befinden. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, muss indirekt mit Repräsentanten verglichen werden. Dann kann das indirekte Vergleichen entweder mithilfe selbst gewählter Maßeinheiten oder mithilfe standardisierter Maßeinheiten durch *Messen* mit verschiedenen Messgeräten erfolgen. Diese Schritte des Stufenmodells sind eine erste didaktische Orientierung für die Erarbeitung der *ersten* Einheit eines Größenbereiches. Die anderen Maßeinheiten können dann durch Verfeinern und Vergröbern abgeleitet werden, bevor schließlich mit Größen gerechnet wird (ebd.). Beispielsweise wird zunächst die Einheit Liter für den Größenbereich Volumen erarbeitet und die Einheit Milliliter anschließend durch Verfeinerung abgeleitet. Franke und Ruwisch (2010) betonen, dass Schülerinnen und Schüler konkrete Messerfahrungen in allen Einheiten und nicht nur in Erarbeitungsphasen benötigen. Die Entwicklung von Größen- und Messvorstellungen beginnt aber weder mit der unterrichtlichen Behandlung standardisierter Maßeinheiten noch ist sie nach deren Einführung abgeschlossen. Bereits in der Primarstufe sollen Lernende durch vielfältige Aktivitäten mit Maßeinheiten „objektgebundene" Vorstellungen von Größen erwerben (ebd.), um diese dann in der Sekundarstufe aufgreifen zu können und einen leichteren Umgang mit Größen bzw. dem Rechnen mit Größen zu ermöglichen. Berechnungen von Größen spielen eine spezielle Rolle in der Sekundarstufe I, da es sich bei dem Berechnen von Flächeninhalt und Umfang von ebenen Figuren oder Volumina und Oberflächen von räumlichen Figuren sowie beim Winkelmessen (u.a. auch durch Ähnlichkeitsbeziehungen oder trigonometrische Überlegungen) um zentrale inhaltliche Tätigkeiten der Sekundarstufe I handelt.

Im Zusammenhang mit dem *Messen* von Größen spielt auch das Schätzen von Größenangaben eine wichtige Rolle. Um im Laufe der Schulzeit geeignete Vorstellungen zu Messgrößen zu entwickeln, ist der Aufbau von Stützpunktvorstellungen dabei von großer Bedeutung. Mögliche Repräsentanten bezüglich des Stützpunktwissens zur Größe Volumen sind beispielsweise das Fassungsvermögen einer Badewanne (ca. 140 l), eines üblichen Putzeimers (ca. 10 l) etc. Für eine Vorstellung von Flächeninhalten kann hingegen das Wissen über die Größe eines Klassenraums oder eines Fußballfeldes dienen. Insbesondere bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben sind das Schätzen sowie der Rückgriff auf verfügbares Stützpunktwissen in verschiedenen Teilprozessen unerlässlich. Etwa müssen zur Vereinfachung einer komplexen realitätsnahen Aufgabe zunächst Annahmen getroffen werden, was häufig auch das Schätzen von nicht gegebenen Größenangaben beinhaltet. Bei der Teilkompetenz des Validierens wird hingegen oft auf Stützpunktwissen zu bestimmten Größen zurückgegriffen, wenn Lernende ihr Ergebnis auf Plausibilität überprüfen. Grundsätzlich ist das Schätzen nicht nur eine Tätigkeit, die durch *Messen* verifiziert werden muss, wie es im Schulalltag häufig passiert. Vielmehr ist Schätzen gerade dann wichtig und sinnvoll, wenn bestimmte Maße erforderlich sind, aber nicht gemessen werden kann. Es kann dann als eine Art „mentales" *Messen* mit einem gedanklichen Vergleichsobjekt verstanden werden.

3.2. Die Leitidee *Messen* in den Bildungsstandards

Dass es bei der Leitidee *Messen* vorrangig um das *Messen* und die Wahl von Größen sowie mit Messgrößen einhergehende Berechnungen geht, findet sich so auch in den Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss wieder (vgl. Abbildung 2).

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen das Grundprinzip des Messens, insbesondere bei der Längen-, Flächen und Volumenmessung, auch in Naturwissenschaften und in anderen Bereichen,
- wählen Einheiten von Größen situationsgerecht aus (insbesondere für Zeit, Masse, Geld, Länge, Fläche, Volumen und Winkel),
- schätzen Größen mit Hilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten,
- berechnen Flächeninhalt und Umfang von Rechteck, Dreieck und Kreis sowie daraus zusammengesetzten Figuren,
- berechnen Volumen und Oberflächeninhalt von Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel sowie daraus zusammengesetzten Körpern,
- berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen, auch unter Nutzung von trigonometrischen Beziehungen und Ähnlichkeitsbeziehungen,
- nehmen in ihrer Umwelt gezielt Messungen vor, entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse sowie den gewählten Weg in Bezug auf die Sachsituation.

Abbildung 2: Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen zur Leitidee Messen (KMK, 2003)

Im vorherigen Kapitel ist das *Prinzip des Messens* anhand des Beispiels der Längenmessung beschrieben. Dies wird auch in den inhaltsbezogenen Kompetenzerwartungen zur Leitidee *Messen aufgegriffen*, wenn es heißt, dass Lernende das *Grundprinzip des Messens* in verschiedenen Bereichen anwenden. Außerdem werden Kompetenzen im Bereich des Umgangs und Rechnens mit Größen erwartet. Der im Absatz zuvor erläuterte notwendige Aufbau von Stützpunktwissen zeigt sich in der Kompetenzerwartung „Schülerinnen und Schüler schätzen Größen mit Hilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten". Auch Berechnungen von Größen wie beispielsweise Flächeninhalt, Volumen oder Winkelgrößen werden in den Kompetenzerwartungen thematisiert und spielen für den Unterricht der Sekundarstufe I eine zentrale Rolle. Dabei geht es um das *Messen* von Größen anhand bestimmter Messgeräte wie beispielsweise dem Geodreieck für die Längen- und Winkelmessung. Zudem wird die Anwendung von Formeln sowie die Entwicklung ebendieser thematisiert. Der Aspekt der situationsgerechten Auswahl der Einheit sowie der im letzten Punkt aufgegriffene Umgang mit Größen und Messungen in Sachsituationen spiegeln das wieder, was Franke und Ruwisch (2010) beschreiben (vgl. Kapitel 3.1), da bereits in der Primarstufe „objektgebundene" Größenvorstellungen entwickelt werden sollten.

Das folgende Kapitel beschreibt, wie im Laufe der Schulzeit ein Verständnis für das *Messen* entwickelt werden soll und damit die inhaltsbezogenen Kompetenzen zur Leitidee *Messen* gefördert werden können.

3.3. Die Leitidee *Messen* im Laufe der Schulzeit

Im Mathematikunterricht sollten Inhalte grundsätzlich in verschiedenen Schuljahren in zunehmender Tiefe wieder aufgegriffen werden. Lernen sollte also spiralförmig organisiert sein, wobei die wesentlichen Begriffe schon früh behandelt, dann immer wieder aufgegriffen und mit zunehmender Mathematisierung, Systematisierung und mit wachsendem Abstraktionsgrad vertieft werden (Büchter & Henn, 2015). Die Leitidee *Messen* ist ein gutes Beispiel dafür, wie ein Thema den Mathematikunterricht von der Grundschule bis zum Abitur prägt. Bereits im Curriculum der Grundschule spielt das *Messen* eine zentrale Rolle. Im Rahmen des Aufbaus von Messvorstellungen für das Sachrechnen steht insbesondere der Umgang mit Größen bzw. in Größenbereichen im Fokus (Vohns, 2000). In den weiterführenden Schulen wird das Rechnen mit Größen weiter fortgesetzt und auch in arithmetischen Themengebieten wie beispielsweise der Bruchrechnung oder in der Statistik spielt das *Messen* eine Rolle. Es gibt wohl jedoch kaum ein näherliegendes Stoffgebiet, das zu solch vielfältigen enaktiven, heuristischen und individuellen Messerlebnissen einlädt, wie das der Geometrie (ebd., S. 76). Ein wichtiger Aspekt des *Messens* im Geometrieunterricht ist die Vernetzung der Bestimmung von Längen, Winkelmaßen, Flächen- und Rauminhalten sowie im Rahmen der metrischen Geometrie die Ableitung bestimmter Messprinzipien aus Beziehungen geometrischer Formen (Vohns, 2012). Beispielsweise findet in der Trigonometrie die Vernetzung von Winkel- und Streckenmessung statt.

Anhand des Beispiels Flächeninhalt kann man gut erkennen, warum die Leitidee *Messen* dem Spiralprinzip genügt, indem bereits im Grundschulalter das Verständnis der Größe Fläche entwickelt und im weiteren Verlauf der Sekundarstufe I und II weiter aufgegriffen wird. In der Grundschule können Flächen direkt oder indirekt mit entsprechenden Vergleichsobjekten verglichen werden. Der Vergleich kann direkt stattfinden, indem Probleme der Art „Reicht der verbleibende Rest Tonkarton für diese Schablone?" bearbeitet werden (Franke & Reinhold, 2016). Indirekt können Flächen z.B. durch Kästchenauszählen oder auf enaktiver Ebene durch konkretes Auslegen von Rechteckflächen mit Plättchen (vgl. ebd., S. 311 ff.; Vohns, 2000, S. 76; Büchter & Henn, 2015, S. 43) verglichen werden. Die beiden Aspekte des ersten Erlernens von Längenmaßen und die Bestimmung von Flächeninhalten werden in der Sekundarstufe I dadurch miteinander verknüpft, dass beim Auszählen der Kästchen die Längenmaße ebendieser berücksichtigt werden. Dies führt dann letztlich zu der Beschreibung der Beziehung zwischen der Länge der Seiten beispielsweise eines Rechtecks und seinem Flächeninhalt in einer allgemeinen Formel. Dabei werden die zu untersuchenden Formen im Laufe der Schulzeit immer komplexer. Das Ziel, möglichst genau, möglichst einfach und möglichst so zu messen, dass Neues auf bereits Bekanntes zurückgeführt werden kann, bleibt aber immer gültig (Vohns, 2000). So können etwa die Flächeninhalte von Dreiecken oder Parallelogrammen, aber auch später die Flächeninhalte krummlinig begrenzter Flächen mit Hilfe des Integrals über die bereits bekannte Rechteckfläche hergeleitet werden. Daran schließen mit der Ähnlichkeitslehre und der Trigonometrie weitere Themenfelder aus der Sekundarstufe I an, bei denen einerseits die Vermessung kleiner Längen durch große Längen (bzw. umgekehrt) ermöglicht wird und andererseits Winkel- und Längenmessungen wechselseitig austauschbar gemacht werden. Weitere Aspekte der Leitidee *Messen* in der Sekundarstufe I sind die Ergänzungs- und Zerlegungsgleichheit für Flächeninhalte (vgl. Kapitel 3.4) und Volumina, räumliche Umformungen (z. B. Netze) zur Messung von Oberflächen von Körpern sowie Grenzwertprozesse für die Betrachtung nicht geradlinig begrenzter Flächen wie z.B. Kreise. In einigen Aspekten der Leitidee *Messen* lassen sich auch Vernetzungen mit anderen Leitideen wiedererkennen. Beispielsweise hat die Thematik der räumlichen Umformung durch Netze von Körpern einen Bezug zur Leitidee *Raum und Form*. Bei abgeleiteten Größen wie beispielsweise der Dichte als Proportionalitätsfaktor ist wiederum ein Bezug zur Leitidee *funktionaler Zusammenhang* zu erkennen.

Doch nicht nur in der Geometrie spielt das *Messen* eine Rolle. Auch die Bruchrechnung lässt sich mit dem *Messen* in Verbindung bringen, da bestimmte Messvorstellungen benötigt werden, um Grundvorstellungen zu Brüchen zu entwickeln und zu vertiefen. Zunächst entwickelt sich der Bruchzahlbegriff aus dem Verständnis für das *Messen* geometrischer Objekte, z.B. Rechteckflächen, Kreise oder dem Zahlenstrahl, heraus. Die Ganzheit kann in gleich große Stücke zerlegt werden und aus einem solchen Teil lässt sich die Ganzheit rekonstruieren. Dies bildet die Basis dafür, adäquate Grundvorstellungen von Brüchen, wie z.B. ein Bruch als Teil eines Ganzen und Teil mehrerer Ganzer, bei Schülerinnen und Schülern zu entwickeln. Auch der Maßzahlaspekt stellt eine Erweiterung des Bruchzahlverständnisses dar. Es werden konkrete Brüche wie $\frac{1}{8}kg$, $\frac{3}{4}Stunde$ oder $\frac{1}{2}km$ thematisiert, sodass „Teile“ und „Ganzes“ nun in einen Größenbereich eingebettet werden (ebd.). Weiter treten Aspekte des *Messens* beim Rechnen mit Brüchen auf. Zum Beispiel muss bei der Addition von zwei Brüchen mit unterschiedlichem Nenner ein gemeinsamer Nenner als Einheit gefunden werden, um die Brüche anschließend zu addieren.

Auch in der Sekundarstufe II wird das *Messen* weiter aufgegriffen. Beispielsweise werden in der analytischen Geometrie Abstände von Punkten, Geraden und Ebenen verglichen. Auch in der Oberstufe lässt sich im Zusammenhang mit dem *Messen* an die Thematik der Flächeninhaltsbestimmung anknüpfen. Zum einen werden Flächeninhalte von Parallelogrammen und entsprechend auch Dreiecken, die von zwei Vektoren aufgespannt werden, berechnet (Greefrath & Laakmann, 2014). Doch auch mit Mitteln der Integralrechnung lassen sich Flächen bestimmen, insbesondere die Berechnung von krummlinig berandeten Flächen wird so ermöglicht. Das Integral dient dabei als Maß für die Größe „Fläche“ und genügt aus fachmathematischer Perspektive den Eigenschaften eines Maßes. Jedoch muss berücksichtigt werden, dass Flächen immer positiv gemessen werden und bei der Verwendung des Integrals zur Flächenmessung ein orientierter Flächeninhalt ermittelt wird, der Flächen unterhalb der X-Achse negativ wertet (ebd.). Auch die Volumenberechnung bei Rotationskörpern oder die Berechnung von Bogenlängen kann mit Hilfe der Integralrechnung erfolgen, sodass das Integral auch als Maß für die Größen Volumen und Länge verwendet werden kann.

3.4. Herausforderungen und Anregungen für den Unterricht

Nachdem im vorherigen Kapitel erläutert wurde, wie sich die Leitidee spiralförmig durch die Schullaufbahn zieht, sollen nun Probleme und Herausforderungen mit der Leitidee *Messen* im Unterricht aufgezeigt werden und Anregungen gegeben werden, wie diese vermieden bzw. behoben werden können. Dies geschieht anhand von zwei Beispielen aus Themengebieten, die eine wichtige Rolle in der Sekundarstufe I spielen: Flächeninhaltsmessung und Bruchrechnung.

Die Schülerlösung aus Abbildung 3 zeigt ein typisches Problem von Lernenden auf, wenn es um das *Messen* von Flächeninhalten geht. In der Aufgabe soll eine Methode skizziert werden, um die Fläche der Insel Mallorca zu approximieren. Es wird also verstärkt die Kompetenz des *Modellierens* (K3) erfordert. Im vorliegenden Beispiel wird jedoch fälschlicherweise vorgeschlagen, den Umfang der Insel zu vermessen.

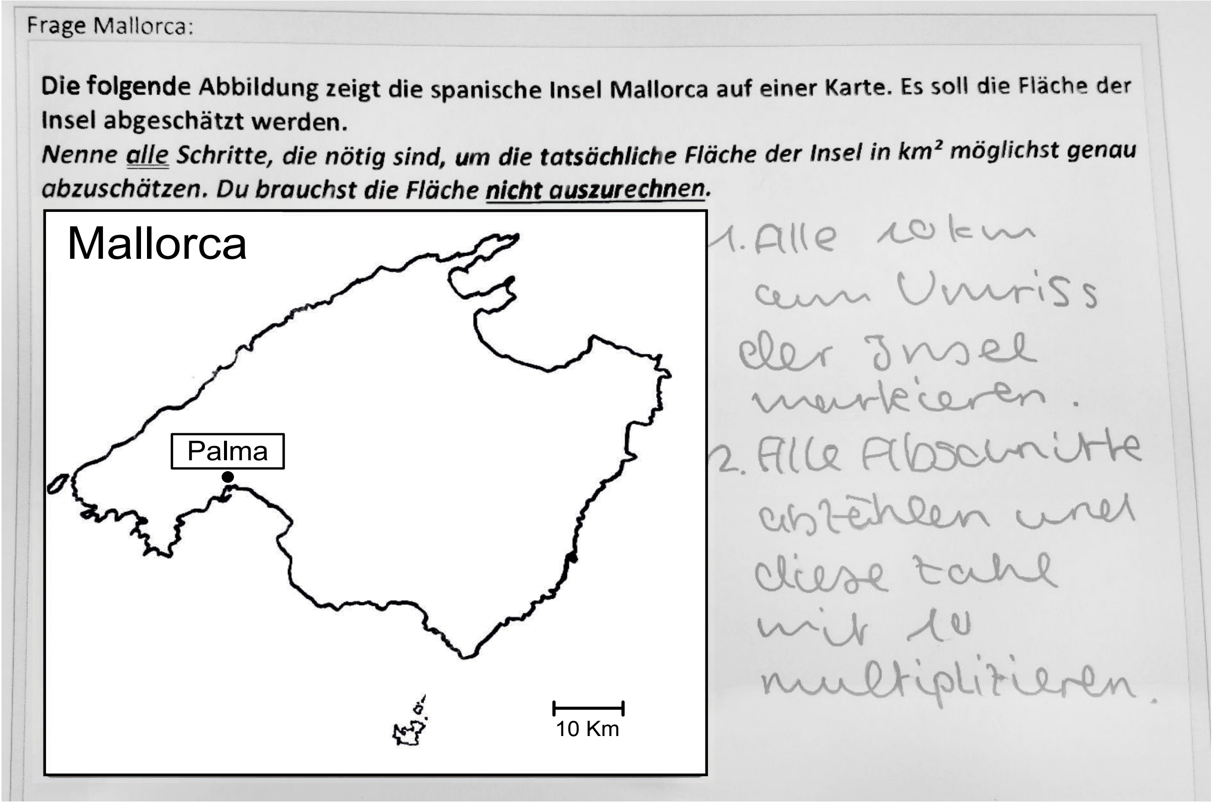


Abbildung 3: Schülerlösung der Aufgabe „Mallorca“

Diese Verwechslung von Flächeninhalt und Umfang ist ein häufig auftretender Fehler, wenn zu wenig auf inhaltliches Verständnis geachtet wird. Wenn Lernende zur Umfangs- und Flächenberechnung nur lernen, fertige Formeln anzuwenden statt diese mit inhaltlicher Bedeutung zu versehen, besteht die Gefahr, dass das so erworbene Wissen zu wenig flexibel sowie fehleranfällig ist und die Problematik der fehlenden Abgrenzung von Begriffen und Vorgehensweisen besteht (Prediger & Wittmann, 2014). Wenn von der Idee des *Messens* die Rede ist, sollte daher nicht zu früh auf Berechnungskalküle ausgewichen werden (Vohns, 2000). Das Ziel sollte vielmehr sein, Schülerinnen und Schülern eine Einsicht in das Zustandekommen von Formeln zu ermöglichen, welche sie wiederum dazu befähigt, ebendiese bei der Bearbeitung von Aufgaben problemadäquat auszuwählen. Hilfreich für die Vermeidung des Problems könnte sein, funktionale Betrachtungen zu thematisieren, z.B. „wie ändert sich der Flächeninhalt bzw. Umfang, wenn man Flächeninhalt bzw. Umfang verdoppelt?“. Aber auch der Rückgriff auf Eigenschaften eines Flächenmaßes, der im Folgenden erläuterten Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit, kann hilfreich sein, um die Problematik des Verwechselns von Flächeninhalt und Umfang anzugehen. Abbildung 4 zeigt, wie ein Parallelogramm durch Zerlegung in ein Rechteck mit gleichem Flächeninhalt verwandelt werden kann.

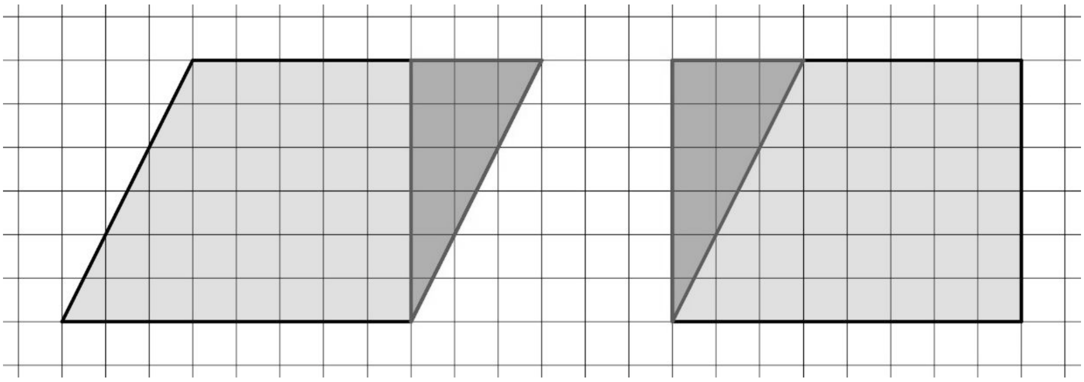


Abbildung 4: Beispiel für Zerlegungsgleichheit in Anlehnung an Vohns (2000, S. 82)

In diesem Fall kann die Herleitung der Formel eines Parallelogramms thematisiert werden, indem aufgezeigt wird, dass der Flächeninhalt des Parallelogramms dem eines Rechtecks gleicht. Es muss also gar keine neue Formel entwickelt werden, sondern nur statt einer Rechteckseite die Höhe des Parallelogramms betrachtet werden. Anhand dieses Beispiels kann die Eigenschaft der Zerlegungsgleichheit auch bereits von jüngeren Lernenden erfahren werden, weil sich auf enaktiver Ebene die Möglichkeit bietet, das Parallelogramm auseinanderzuschneiden und zu einem Rechteck zusammenzulegen. Eine andere Möglichkeit, welche die Flächengleichheit von Parallelogramm und Rechteck zeigt, ist das Materialbeispiel in Abbildung 5.

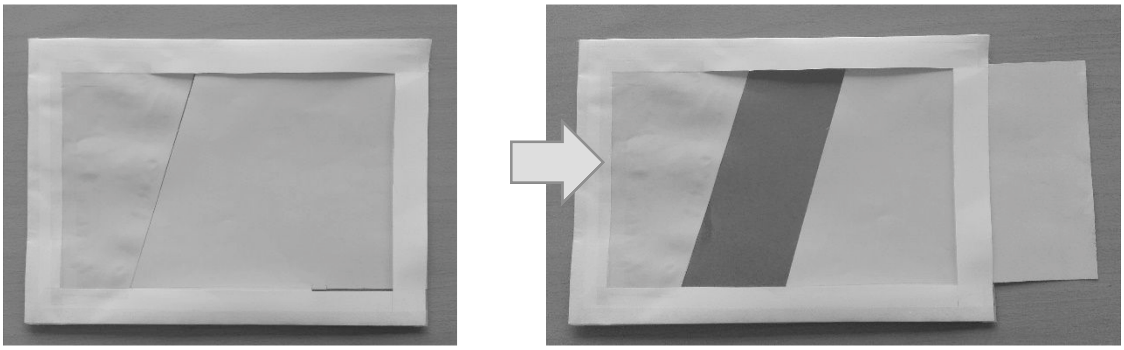


Abbildung 5: Materialbeispiel in Anlehnung an Vohns (2000, S. 83)

Der Rahmen zeigt zwei trapezförmige Stücke, die zu einem Rechteck zusammengesetzt sind. Zieht man nun den rechten Teil ein Stück nach rechts aus dem Rahmen heraus, entsteht ein Parallelogramm, das den gleichen Flächeninhalt hat wie das Rechteck, welches außen übersteht, da beide Flächen die noch im Rahmen bestehende Trapezfläche zu einem Rechteck ergänzen.

Die beiden Beispiele zeigen, wie Lernende sich die Flächeninhaltsbestimmung eines Parallelogramms selbstständig erarbeiten können und so die erarbeiteten Formeln mit inhaltlicher Bedeutung füllen. Dies kann und sollte auch im Anwendungsbezug vertieft werden. Beispielsweise können Aufgaben, in denen der Parkettboden einer Wohnung als Flächeninhalt und die Fußleisten als Umfang vermittelt werden, für das Verständnis der Begriffe ein vertieftes Verständnis ermöglichen. Auch im oben gezeigten Beispiel „Mallorca“ kann die Diskussion darüber, was Flächeninhalt und Umriss in Bezug auf die reale Insel bedeuten, den angewendeten Formeln einen realweltlichen Sinn geben.

Eine andere Herausforderung in der Sekundarstufe I, die vielen Lernenden Probleme bereitet, ist die Bruchrechnung. Beispielsweise können bei Bruchmultiplikationen Fehler auftreten, wenn fälschlicherweise nur die Zähler miteinander multipliziert werden, die Nenner aber nicht. Auch hier kann die Ursache in einer zu starken Kalkülorientierung liegen, wenn keine ausreichende Vorstellung zur Multiplikation von zwei Brüchen aufgebaut wurde. Diese Problematik passt zwar thematisch primär zur Leitidee *Zahl*, kann jedoch mit Prinzipien der Leitidee *Messen* angegangen werden und macht die Vernetzung der beiden Leitideen deutlich.

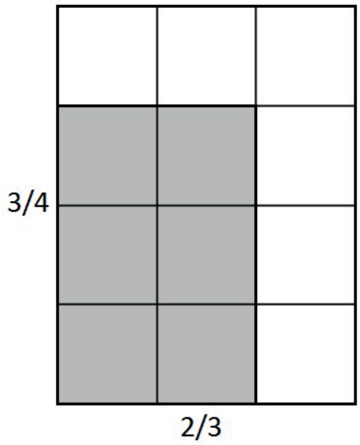


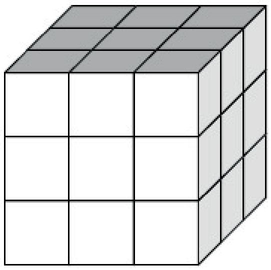
Abbildung 6: Ikonische Darstellung der Bruchmultiplikation

Eine Möglichkeit, diesem Problem zu begegnen, ist die Veranschaulichung der Rechenoperation durch Rechteckflächen, indem die Multiplikation auf ikonischer Ebene als Flächeninhaltsbestimmung von Rechtecken dargestellt wird (siehe Abbildung 6). Hier kann der Zugang über die Idee des *Messens* gefunden werden. Schülerinnen und Schüler können zum Verständnis dieser Veranschaulichung auf die Vorerfahrungen zurückgreifen, dass sich der Flächeninhalt eines Rechtecks durch die Multiplikation von Länge und Breite ergibt und dass Flächenmessung durch Auszählen von Kästchen erfolgen kann (Vohns, 2000). In Abbildung 6 ist eine Fläche dargestellt, die in zwölf gleich große Teile zerlegt ist, von denen sechs grau markiert sind. Es wird dadurch der Bruch $\frac{6}{12}$ dargestellt, der sich wiederum auch aus der Multiplikationen der Seitenlängen $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ ergibt. Diese Veranschaulichung der Bruchmultiplikation greift darauf zurück, dass durch den Übergang zu kleineren Maßeinheiten Einsicht in die Richtigkeit der Rechenregel gewonnen werden kann (ebd.). Auch die Bruchaddition lässt sich mit geeigneten Vorstellungen zum Messen von Größen besser verstehen. Will man $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ addieren, muss eine kleinere gemeinsame Einheit (in diesem Fall Zwölftel) gebildet werden. Mit dieser Einheit kann man dann anschaulich die als Längen verstandenen Brüche addieren. Damit wird das abstraktere Vorgehen des Addierens nach geeignetem Erweitern anschaulich vorbereitet. Das in Kapitel 3.1 beschriebene *Prinzip des Messens* trägt hier dazu bei, geeignete Bruchvorstellungen zu entwickeln, da im Beispiel der Bruchaddition ermittelt wird, wie oft die gemeinsame Maßeinheit $\frac{1}{11}$ in die Summe der beiden zu addierenden Brüche passt.

3.5. Kompetenzmessung mit Bezug zur Leitidee *Messen* in VERA-8

Im Folgenden werden am Beispiel von drei Aufgaben zur Leitidee *Messen* aus den vergangenen VERA-8 Testdurchläufen inhaltliche und prozessbezogene Anforderungen beschrieben. Dies soll zeigen, inwiefern Testaufgaben inhaltliche Anforderungen der Leitidee *Messen* in Bezug zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen messen und welche Folgerungen für den Unterricht getroffen werden können.

Zunächst wird in Abbildung 7 eine Aufgabe aus Anforderungsbereich I betrachtet, welche die Größenbereiche Volumen und Flächeninhalt thematisiert.



Ein Würfel ist aus lauter kleinen Würfeln zusammengesetzt (siehe Bild). Jeder der kleinen Würfel hat ein Volumen von 1 cm^3.

(Abbildung nicht maßstabsgerecht)

Teilaufgabe 1

Gib an, wie groß das **Volumen** des großen Würfels ist.

Das Volumen des großen Würfels beträgt __________ cm^3.

Teilaufgabe 2

Gib an, wie groß die **Oberfläche** des großen Würfels ist.

Die Oberfläche des großen Würfels beträgt __________ cm^2.

Abbildung 7: Aufgabe Würfelkörper

Bei dieser Aufgabe muss zunächst anhand des Aufgabentextes und der Abbildung erkannt werden, dass und wie sich der große Würfel aus kleinen einheitlichen Würfeln der Größe 1 cm^3 zusammensetzt. Daher ist insbesondere die Kompetenz *„Mathematische Darstellungen verwenden“* (K4) gefragt. Durch Abzählen bzw. Rechnen muss anschließend die *jeweils gesuchte Größe ermittelt werden* (K5). In der Aufgabe müssen Volumen und Oberflächeninhalt eines Körpers bestimmt werden. Da es sich also um das *Messen* von Größen bzw. Berechnen von Messgrößen handelt, gehört die Aufgabe zur Leitidee *Messen*. Das *Prinzip des Messens*, mit einem einheitlichen Vergleichsobjekt zu vergleichen und zu bestimmen, wie oft dieses in die zu messende Größe passt, wird in dieser Aufgabe besonders deutlich. Es ist ein kleiner Würfel mit einheitlicher Größe 1 cm^3 gegeben und zur Herleitung der gesuchten Größe des Körpervolumens muss abgezählt werden, wie oft der Einheitswürfel in den großen Würfel passt. Die Herausforderung in Teilaufgabe 2 besteht dann darin, den Zusammenhang zwischen den Größen Volumen und Fläche herzustellen und auch hier spielt das Prinzip des Messens eine Rolle. Es muss erkannt werden, dass die Kantenlänge einer Seitenfläche $3 \cdot 1cm$ beträgt, um daraufhin den Flächeninhalt einer Seite mit $3\,cm \cdot 3\,cm = 9\,cm^2$ zu berechnen.

Eine mögliche Schwierigkeit beim Bearbeiten der Aufgabe könnte sein, dass nur die sichtbaren Würfel gezählt werden und deren Anzahl mit dem Volumen bzw. Oberflächeninhalt gleichgesetzt wird. Während dies bei Teilaufgabe 1 zum richtigen Ergebnis führt, ist dies bei Teilaufgabe 2 nicht der Fall (Fehllösung $27\,cm^3$ bzw. $27\,cm^2$). Zur Begegnung dieser Schwierigkeit im Unterrichtet bietet es sich an, die Würfel nachbauen zu lassen. So können Lernende die Zusammensetzung besser erkennen und die richtige Anzahl an kleinen Würfeln ermitteln, um das Volumen und den Oberflächeninhalt des Würfels zu bestimmen.

Die zweite Aufgabe in Abbildung 8, die in Anforderungsbereich II einzuordnen ist, hat einen außermathematischen Kontext und beinhaltet eine Fragestellung zu Flächenproblemen in der Realität:

Herr Klie hat eine Gartenbaufirma und gestaltet einen Teil seines Firmengeländes in eine Rasenfläche um. Diese neue Rasenfläche ist 11 m lang und 10,5 m breit.

Aus Zeitgründen verwendet Herr Klie Rollrasen (siehe Fotos 1und 2). Als Rollrasen bezeichnet man fertigen Rasen, der in rechteckige Stücke geschnitten und dann zum Transport aufgerollt wird.

Foto 1

Foto 2

Ein Steifen Rollrasen ist 0,6 m breit, 0,03 m dick und 2 m lang.

Ermittle, wie viele Streifen Herr Klie benötigt, um die gesamte Rasenfläche mit Rollrasen auszulegen. Reststücke eines Streifens werden weiterverarbeitet.

Abbildung 8: Aufgabe Rollrasen Teilaufgabe 1

Bei dieser Aufgabe spielen Flächenberechnungen in einem realen Kontext eine Rolle. Es sind Eigenschaften realer Objekte (des Rollrasens, der Gesamtfläche) in Form der Größe Länge angegeben. Anhand dieser müssen ein Maß für den Flächeninhalt eines Streifens sowie die Anzahl der benötigten Streifen bestimmt werden. Deshalb gehört die Aufgabe zur Leitidee *Messen*. Zunächst müssen dem Aufgabentext die *wichtigen Informationen entnommen werden* (K6). Es muss weiterhin ein Weg gefunden werden, wie *mathematisch die Anzahl der Streifen ermittelt werden kann* (K2, K3). Beispielsweise kann *die Größe der auszu-*

legenden Fläche berechnet und durch die Größe eines Rollrasenstreifens dividiert *werden* (K5), da auch mögliche Reststücke weiterverarbeitet werden können. Eine weitere Teilaufgabe der Rollrasen-Aufgabe lautet wie folgt:

Herr Klie transportiert mehrere Streifen Rollrasen in einer Schubkarre (siehe Foto 3).

Ermittle das Gewicht der sieben Rollen Rollrasen, die er pro Fuhre transportieren kann. Ein m^3 Rollrasen wiegt circa 900 kg.

__________________ kg

Foto 3

Abbildung 9: Aufgabe Rollrasen Teilaufgabe 2

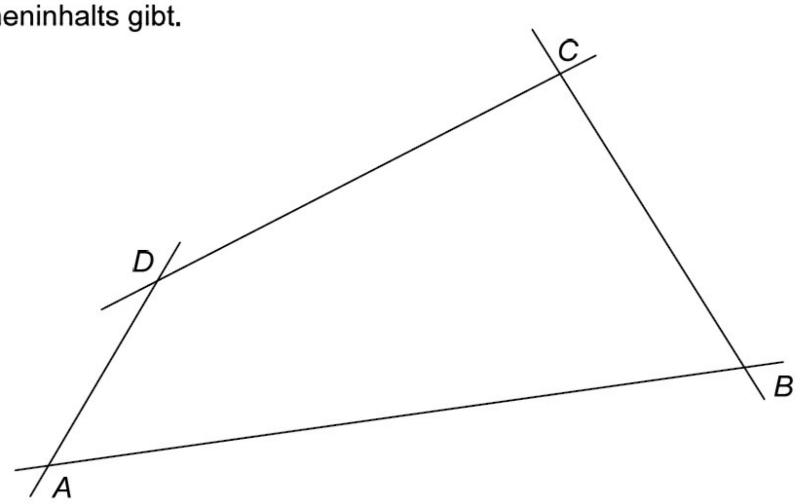
In dieser Teilaufgabe können die einzelnen Streifen als Quader mit den Maßen $0{,}6\,m$, $2\,m$ und $0{,}03\,m$ aufgefasst werden (K3). Von diesen berechnet man jeweils das Volumen und das Gewicht. Anschließend wird das Ergebnis versiebenfacht. Beide Teilaufgaben gehören aufgrund der Anforderungen an das *Modellieren und Problemlösen* zu Anforderungsbereich II.

Es können insbesondere dann Schwierigkeiten bei dieser Aufgabe auftreten, wenn ein Rollrasenstreifen nicht als Quader modelliert, sondern als Rechteckfläche aufgefasst wird. Es würde somit der berechnete Flächeninhalt weiter verwendet werden, um das Gewicht eines Rollrasenstreifens zu bestimmen. Somit überprüft diese Aufgabe auch, ob Schülerinnen und Schüler Vorstellungen zu verschiedenen Größen verknüpfen können. Sollten dabei auf Seiten der Lernenden Probleme auftreten, so ist dies wohl auch in diesem Fall der zu starken Orientierung am Kalkül geschuldet. Um Schwierigkeiten zu vermeiden, kann zur Bestimmung von Raum- und Flächeninhalten einerseits verstärkt auf Anwendungsbeispiele aus der Realität gesetzt werden, um Vorstellungen von Größen mit realweltlichen Beispielen zu verbinden. Andererseits sollte nicht das reine Anwenden von Formeln, sondern auch die (möglichst selbstständige) Herleitung ebendieser Teil des Unterrichts sein.

Das dritte und letzte Beispiel, bei dem es sich um eine innermathematische Aufgabe aus Anforderungsbereich III handelt, greift den Aspekt der selbstständigen Erarbeitung von Flächeninhalten auf:

Flächeninhalte von Rechtecken oder Dreiecken kann man leicht mit Formeln ausrechnen, wenn bestimmte Längen gegeben sind oder gemessen werden können.

Hier ist ein Viereck abgebildet, für das es keine Formel zur direkten Berechnung des Flächeninhalts gibt.



Beschreibe möglichst genau, wie man den Flächeninhalt dieses Vierecks sehr genau bestimmen kann.

Veranschauliche dein Vorgehen in der Abbildung, indem du z.B. die Strecken markierst oder einzeichnest, deren Länge du messen musst.

Abbildung 10: Aufgabe Unregelmäßiges Viereck

In dieser Aufgabe geht es darum, eine allgemeine Strategie für die Berechnung des Flächeninhalts des abgebildeten Vierecks zu finden. Die Kompetenz des *Kommunizierens* ist insofern gefragt, als dass eine Beschreibung des Vorgehens verlangt wird. Das Viereck muss in geeignete Teilfiguren zerlegt oder mit solchen ergänzt werden (K2). Hierbei können die Lernenden auf einfache Figuren zurückgreifen, deren Flächeninhaltsformel bekannt ist und diese passend einzeichnen (K4). Um zu erkennen, dass eine Methode zur Flächeninhaltsbestimmung gefragt ist und um was für ein Viereck es sich handelt, müssen Schülerinnen und Schüler diese *Informationen aus dem Aufgabentext entnehmen* (K6). Bei der Aufgabe können einige Schwierigkeiten für die Lernenden auftreten. Beispielsweise ist es möglich, dass der oben beschriebene Fehler des Verwechselns von Umfang und Flächeninhalt passiert, indem fälschlicherweise der Umfang in die Rechnung eingebunden und beschrieben wird, dass die Seiten des Vierecks addiert werden sollen. Damit eignet sich die Aufgabe jedoch gut, um an den Schülerlösungen zu erkennen, ob beim Lernenden die Vorstellung der Größe Flächeninhalt korrekt aufgebaut wurde, da mehr als das kalkülhafte Berechnen von bekannten Flächen verlangt wird. So können Aufgaben dieser Art auch im Unterricht eingesetzt werden. Indem Schülerinnen und Schüler bislang unbekannte Flächeninhalte durch das Wissen über bereits bekannte Figuren bestimmen, können Vorstellungen zu verschiedenen geometrischen Flächen ausgebaut werden.

4. Fazit

Die Beschäftigung mit der Leitidee *Messen* bietet vielfältige Herausforderungen und Möglichkeiten im Unterricht. Bereits in der Grundschule muss bei Schülerinnen und Schülern ein Verständnis für das *Messen* entwickelt werden, auf dem dann in den Sekundarstufen I und II aufgebaut werden kann. Dies spielt insbesondere im Bereich der Geometrie, doch auch in arithmetischen und statistischen Themengebieten eine Rolle. Wichtig ist es, Schülerinnen und Schüler selbstständige Entdeckungen machen zu lassen, um das Verständnis zu fördern. Das beginnt im Primarbereich durch den direkten Vergleich mit Messobjekten oder das Kreieren eigener Maßeinheiten und setzt sich in der Sekundarstufe I beispielsweise mit selbstständigen Überlegungen zur Flächeninhaltsbestimmung fort, wenn auf Grundlage bekannter Flächen die Flächeninhalte neuer geometrischer Objekte bestimmt werden sollen.

Wenn man sich den Herausforderungen, die mit der Leitidee *Messen* einhergehen, im schulischen Alltag stellt und ein geeignetes Messverständnis bei den Lernenden entwickelt werden kann, so ist dies eine gute Voraussetzung für unterschiedliche grundlegende Erfahrungen im Mathematikunterricht. Die Leitidee *Messen* verbindet nicht nur die innermathematische Sichtweise Mathematik „als geistige Schöpfung und auch deduktiv geordnete Welt eigener Art zu verstehen“ mit der Erfahrung Mathematik zur Umwelterschließung zu verwenden („Mathematik als Werkzeug, um Erscheinungen der Welt aus Natur, Gesellschaft, Kultur, Beruf und Arbeit in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen“), sondern ermöglicht auch vielfältige Erfahrungen zum Problemlösen, also Mathematik als „Mittel zum Erwerb von auch über die Mathematik hinausgehenden, insbesondere heuristischen Fähigkeiten“ (Winter, 1995, S. 37).

Literaturverzeichnis

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R., Köller, O. (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2015). Schulmathematik und Realität – Verstehen durch Anwenden. In Bruder, R. et al., *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 19). Heidelberg: Springer.

Franke, M. & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie. In der Grundschule*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Freudenthal, Hans (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Greefrath, G. & Laakmann, H. (2014). Mathematik eben – Flächen messen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 56, 2-10.

Katzenbach, M., Blum, W., Drüke-Noe, C., Keller, K., Köller, O., Leiss, D., Müller, M., Roppelt, A. (2009). *Bildungsstandards: Kompetenzen überprüfen. Mathematik Sekundarstufe I. Handreichung*. Berlin: Cornelsen.

KMK (2003): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf (abgerufen am: 12.09.2016)

KMK (2004a): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss.* URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Haupt.pdf (abgerufen am: 12.09.2016)

KMK (2004b): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf (abgerufen am: 12.09.2016)

KMK (2012): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.* URL:

http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf (abgerufen am: 12.09.2016)

Leuders, T. & Barzel, B. (2014). Größen, Maße und Messen. In Linneweber-Lammerskitten, H., *Fachdidaktik Mathematik. Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II* (S. 48-68). Seelze: Klett Kallmeyer.

Prediger, S. & Wittmann, G. (2014). Verständiger Umgang mit Begriffen und Verfahren: Zentrale Grundlagen der Kompetenzbereiche Wissen-Erkennen-Beschreiben und Operieren-Berechnen. In Linneweber-Lammerskitten, H., *Fachdidaktik Mathematik. Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II* (S. 128-140). Seelze: Klett Kallmeyer.

Schwill, A. (1993). Fundamentale Ideen der Informatik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 25, 1, 20-31.

Vohns, A. (2000). *Das Messen als fundamentale Idee im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I*. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt für die Sekundarstufe I.

URL: http://www.aau.at/avohns/pdf/messen.pdf (abgerufen am: 12.09.2016)

Vohns, A. (2012). Grundprinzipien des Messens. Erkunden – Vernetzen – Reflektieren. *mathematik lehren*, 173, 20-24.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 1, 37-46.