Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten 2016
8. Jahrgangsstufe (VERA-8)
Mathematik – Didaktische Handreichung
Modul B

Didaktische Erläuterung
Leitidee Zahl

Inhaltsverzeichnis

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien auch online finden können?

www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

1. Allgemeine Erläuterungen

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik der Kultusministerkonferenz mit ihren Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen bilden die Grundlage für die Vergleichsarbeiten in der 8. Jahrgangsstufe (VERA-8) im Fach Mathematik. Daher soll in dieser didaktischen Handreichung zunächst der Aufbau der Bildungsstandards erläutert werden. Anschließend wird eine der fünf Leitideen, nämlich die Leitidee *Zahl*, in den Fokus genommen, um aufzuzeigen, wie sich diese Idee durch die gesamte Schullaufbahn zieht. Dabei wird besonderes Augenmerk auf die Hürden und Herausforderungen gelegt, die im Rahmen der Leitidee *Zahl* bezogen auf die Vorstellungs- und Kompetenzentwicklung von Schülerinnen und Schülern auftreten können. Neben einigen Vorschlägen zur Bewältigung dieser Herausforderungen im Unterricht wird des Weiteren aufgezeigt, wie die Testaufgaben von VERA-8 inhaltliche und prozessbezogene Anforderungen zur Leitidee *Zahl* beschreiben und wie diese Aufgaben als Ausgangspunkt für die weitere unterrichtliche Beschäftigung nutzbar gemacht werden können.

2. Leitideen in den Bildungsstandards

2.1. Die Bildungsstandards im Fach Mathematik

Im Jahr 2003 beschloss die Kultusministerkonferenz als Reaktion auf die PISA-Studie für zentrale Fächer Bildungsstandards einzuführen. Mit dieser Einführung wurde die Erwartung verbunden, eine Zielklarheit in Bezug auf die Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in diesen Fächern zu erhalten, sowie eine Überprüfung des Erreichten zu ermöglichen (Blum et al., 2006, S. 14-16). Dafür greifen die Bildungsstandards „allgemeine Bildungsziele auf und benennen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe an zentralen Inhalten erworben haben sollen“ (KMK, 2003/2004). So soll erreicht werden, dass sich Schülerinnen und Schülern unterschiedlicher Bundesländer zu bestimmten Zeitpunkten auf einem vergleichbaren Leistungsstand befinden. Damit soll gleichzeitig bezweckt werden, dass etwa Schulwechsel auch zwischen verschiedenen Bundesländern einfacher möglich sind.

Im Kompetenzmodell, das den Bildungsstandards Mathematik zu Grunde liegt, werden drei Dimensionen unterschieden (vgl. Abbildung 1):

1. *„Allgemeine mathematische Kompetenzen“*
2. *„Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen“, geordnet nach Leitideen, und*
3. *„Anforderungsbereiche“.*

Aufgaben, in denen mathematische Kompetenzen benötigt werden, können in einer oder mehreren Dimensionen beschrieben werden.

Durch Vorgabe dieses Modells soll die Umsetzung der Zielvorgaben ermöglicht werden, d. h. die Transparenz schulischer Anforderungen, die Förderung der Entwicklung eines kompetenzorientierten Unterrichts und die Schaffung einer Grundlage für die Überprüfung der erreichten Ergebnisse. Im Folgenden werden die Dimensionen dieses Kompetenzmodells kurz beschrieben[1].

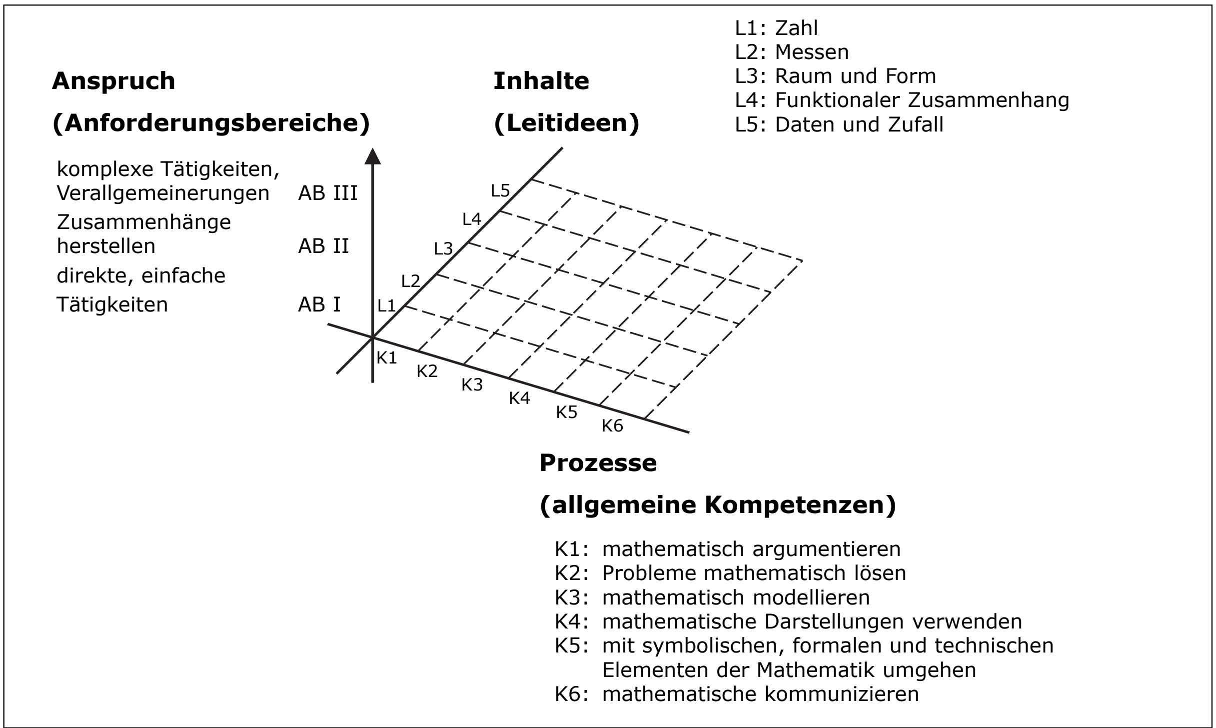


Abbildung 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards
(https://www.iqb.hu-berlin.de/institut /ab/sek1_ma)

Es werden sechs *allgemeine mathematische Kompetenzen* unterschieden. Diese bilden die Prozessdimension des Modells und beschreiben, auf welche Art und mit welchem Ziel mathematische Inhalte genutzt werden, um Aufgaben zu bewältigen. Sie lassen sich nicht streng voneinander abgrenzen, sondern werden im Verbund erworben und angewendet. Beispielsweise kann das mathematische Lösen von Problemen (K2) auch mithilfe mathematischen Argumentierens (K1) und unter Verwendung mathematischer Darstellungen (K4) erfolgen.

Die zweite Dimension des Modells wird durch die fünf *Leitideen* gebildet. Diese Inhaltsdimension beschreibt, welche mathematischen Konzepte zur Bewältigung einer Situation angewendet werden können oder müssen.

Die dritte und letzte Dimension des Kompetenzmodells der Bildungsstandards bilden die *Anforderungsbereiche*. Diese sollen den kognitiven Anspruch kompetenzbezogener mathematischer Tätigkeiten (vor allem beim Bearbeiten von Aufgaben) auf theoretischer Ebene beschreiben.

[1] Ausführlichere Erläuterungen sowie Beispielaufgaben sind in „Bildungsstandards Mathematik: konkret“ (Hrsg. von W. Blum u.a., Cornelsen-Scriptor 2006) nachzulesen. Weitere Beispielaufgaben sind auf der Homepage des IQB und in Katzenbach (2009) zu finden.

Bildungstheoretisch liegt den Bildungsstandards für das Fach Mathematik der Auftrag zu Grunde, dass der Mathematikunterricht allgemeinbildend sein sollte. Dabei sollten jedem Schüler und jeder Schülerin drei Grunderfahrungen (Winter, 1995, S. 1) vermittelt werden:

(1) *Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,*

(2) *mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,*

(3) *in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.*

Alle Bestandteile (sowohl des Kompetenzmodells als auch der Grunderfahrungen) sind wesentliche Bestandteile der Bildungsstandards und damit auch des Mathematikunterrichts in Deutschland und stehen gleichwertig nebeneinander. In Modul B werden Jahr für Jahr Aspekte des Kompetenzmodells beschreiben. Nachdem in den vorangegangenen didaktischen Handreichungen die allgemeinen Kompetenzen erläutert wurden, beginnt nun eine Serie zu den inhaltbezogenen Kompetenzen. Dies bedeutet allerdings keinesfalls, dass die anderen Bestandteile der Bildungsstandards diesem Punkt nachstehen. Schließlich werden allgemeine Kompetenzen in der Auseinandersetzung mit den inhaltlichen Leitideen erworben.

2.2. Was ist eine Leitidee?

Mit Leitideen werden zusammenhängende Felder mathematischer Ideen und Konzepte beschrieben, die genutzt werden, um reale Phänomene zu beschreiben. Mit ihnen werden die Phänomene erfasst, die sichtbar werden, wenn man die Welt mit mathematischen Augen betrachtet (Freudenthal, 1983). Dies können beispielsweise Quantifizierungen aller Art (Leitidee *Zahl*), oder ebene und räumliche Figuren, Formen, Gebilde und Muster (Leitidee *Raum und Form*) sein. Der Grundgedanke dabei ist, dass eine mathematische Problemsituation das permanente Zusammenspiel von prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen erfordert. Somit sind die Inhalte immer im Kontext allgemeiner mathematischer Kompetenzen und deren Anforderungsbereichen zu sehen. In den Bildungsstandards wird weiter erläutert: „Eine Leitidee vereinigt Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete und durchzieht ein mathematisches Curriculum spiralförmig. Die Zuordnung einer inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz zu einer mathematischen Leitidee ist nicht in jedem Fall eindeutig, sondern davon abhängig, welcher Aspekt mathematischen Arbeitens im inhaltlichen Zusammenhang betont werden soll.“ (KMK, 2003, S. 18).

3. Die Leitidee *Zahl*

3.1. Eine Zahl ist mehr als eine Ziffernkombination - Aspekte des Zahlbegriffs

Nachdem nun allgemein erläutert wurde, was eine Leitidee ist, soll an dieser Stelle näher beleuchtet werden, was die Leitidee *Zahl* ist oder ausmacht. Auf den ersten Blick mag diese Frage trivial klingen und einfach durch eine Auflistung verschiedener Ziffern oder Ziffernkombinationen (z. B. 2,3, 12, 186, etc.) als Zahl zu beantworten sein. Doch schon auf den zweiten Blick stellt man fest, dass damit der Gebrauch von Zahlen nicht umfassend wiedergegeben wird. Was ist beispielsweise mit den Brüchen, in denen zusätzlich zu den Ziffern auch ein Bruchstrich auftaucht, oder mit den irrationalen Zahlen, die gar nicht als endliche Ziffernfolge dargestellt werden können? Auch wenn man versucht, sich dem Begriff Zahl anders zu nähern als über die unterschiedlichen Möglichkeiten der Darstellung, stellt man fest, dass die Komplexität bestehen bleibt. Denn mit Zahlen kann man zum Beispiel Anzahlen wiedergeben, also Mengen beschreiben, man kann zählen, ordnen, Maße angeben und rechnen. Alle diese unterschiedlichen Aspekte der Leitidee *Zahl* werden bereits in der Grundschule eingeführt und verlieren auch im Laufe der Sekundarstufe I nicht an Wichtigkeit, sondern stellen immer wieder Herausforderungen an Schülerinnen und Schüler. Im Folgenden sollen verschiedene Aspekte des Zahlbegriffs kurz vorgestellt werden. Diesen sollen, so Krauthausen und Scherer (2007, S. 10) „im Mathematikunterricht […] vollständig und angemessen repräsentiert sein, um Einseitigkeiten vorzubeugen und der Vielfalt der potenziellen Zahlverwendungssituationen gerecht werden zu können“. Gleichzeitig spielen sie eine wichtige Rolle bei der (Weiter-)Entwicklung von Grundvorstellungen sowohl zu den einzelnen Zahlbereichen als auch zu Rechenoperationen, was im Anschluss thematisiert wird.

Am Beispiel der natürlichen Zahlen lassen sich Kardinalzahl-, Ordinalzahl-, Maßzahl-, Rechenzahl- und Kodierungsaspekt unterschieden (vgl. Abbildung 2 und Padberg, 2011, S. 14). Die Aspekte lassen sich in zwei Gruppen teilen: Der Kardinal-, Ordinal-, Maßzahl- und Kodierungsaspekt sind semantischer Natur. Das heißt, sie beschreiben jeweils einen inhaltlichen Aspekt der natürlichen Zahlen. Der Rechenzahlaspekt ist hingegen syntaktischer Natur, d. h. er beschreibt das Anwenden von (algebraischen und arithmetischen) Regeln, die ohne Ansehung von Inhalten gelten. „Grundvorstellungen zu Zahlen und Rechenoperationen müssen […] zunächst in Beziehung zu den semantischen Zahlaspekten aufgebaut werden“ (Vohns, 2005, S. 64). Nur sie erlauben die inhaltliche Interpretation in typischen Sachzusammenhängen.

Zahlaspekt	Beschreibung	Beispiele	Addition	Subtraktion
Kardinalzahlaspekt	Zahlen beschreiben die Mächtigkeit von Mengen, die *Anzahl* von Elementen einer Menge	3 Äpfel, 5 Gongschläge, 9 Zahlen, 10^3 Möglichkeiten	Vereinigen, zusammen legen	Wegnehmen, Fehlendes berechnen
Ordinalzahlaspekt	*Zählzahl*: Folge der nat. Zahlen, die beim Zählen durchlaufen werden	„eins, zwei, drei vier,…“	weiterzählen	rückwärtszählen
	Ordnungszahl: Rangplatz in einer geordneten Reihe	„Ich bin der Fünfte im Wartezimmer.“		
Maßzahlaspekt	Maßzahl für Größen	10 Minuten, 2 Meter, 5 Euro	Aneinander legen entsprechender Repräsentanten	Abtrennen entsprechender Repräsentanten, Unterschied
Rechenzahlaspekt	*Algebraischer Aspekt*: *($\mathbb{N}$, +) ist eine algebraische Struktur (mit bestimmte Eigenschaften)*	$36 + (17 + 4) = (36 + 4) + 17$ Kommutativität/ Assoziativität $23 \cdot 27 = 625 - 4$ $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$	Rechnen mit Ziffern (schriftliche Rechenverfahren) statt Rechnen mit Zahlen (halbschriftliche Strategien)	
	Algorithmischer Aspekt: Rechnen als „Ziffern-manipulation“ nach festgelegten Regeln	628 <u>+563</u> 1191		
Kodierungsaspekt	Bezeichnung von Objekten	33501 Bielefeld, Tel. 428383704 ISBN 3-8274-1019-3, PPC 4600	(macht keinen Sinn)	

Abbildung 2: Aspekte des Zahlbegriffs (adaptiert aus: Krauthausen & Scherer, 2007, S.10)

Die Entwicklung von Grundvorstellungen zu Rechenoperationen, etwa zur Addition, steht in Verbindung zu den verschiedenen Zahlaspekten. Betrachtet man die Addition beispielsweise unter dem Kardinalzahlaspekt, so entspricht diese dem Zusammenfassen von Mengen. Betrachtet man sie unter dem Ordinalzahlaspekt, so entspricht das Addieren zweier Zahlen eher dem Weiterzählen. Erst unter dem Rechenzahlaspekt wird die Addition dann zum regelgeleiteten „Rechnen mit Ziffern“ (vgl. ebd.). Was in den obigen Ausführungen am Beispiel der natürlichen Zahlen gezeigt wurde, gilt in analoger Weise für andere Zahlbereiche. Brüche zum Beispiel haben „viele verschiedene Gesichter […]. Wer daher die Bruchrechnung wirklich verstehen und nicht nur Brüche nach fehleranfälligen Regeln manipulieren will, muss zuvor diese Gesichter gründlich betrachtet und ihre Zusammenhänge erkannt haben“ (Padberg, 2002, S. 35). Ein Bruch kann unter anderem ein Teil eines Ganzen beschreiben, z. B. eine halbe Pizza (dabei sowohl den Teil eines Ganzen als auch einen Teil mehrerer Ganzer) oder genauso ein Maß, z. B. ein halber Meter (Maßzahlaspekt).

Weitere Bruchzahlaspekte sind der Verhältnis-, Operator-, Quotienten- und der Skalenwertaspekt sowie die Bruchzahl als Lösung einer linearen Gleichung (vgl. ebd.).

Eine irrationale Zahl, z. B. $\sqrt{2}$, kann unter anderem ein Maß sein, etwa für die Seitenlänge eines Quadrats mit dem Flächeninhalt zwei oder aber eine Rechenaufforderung „Finde eine Zahl, dessen Quadrat zwei beträgt (Rechenzahlaspekt).“ darstellen. Für den Aufbau oder die Weiterentwicklung adäquater Grundvorstellungen zu Rechenoperationen ist häufig das Zusammenspiel der unterschiedlichen Aspekte entscheidend. Im Folgenden soll umrissen werden, wie sich der Zahlbegriff und die Vorstellungen zu Rechenoperationen im Laufe der Schulzeit bei Schülerinnen und Schülern entwickeln und welche Stellen in diesem Prozess üblicherweise die größten Hürden für sie darstellen. Zur besseren Übersichtlichkeit werden dazu zunächst die Auswirkungen der Zahlbereichserweiterungen auf die Grundvorstellungen zu Zahlen und deren Darstellung und im Anschluss die Auswirkungen auf Grundvorstellungen zu Rechenoperationen und -strategien betrachtet.

3.2. Die Entwicklung der Leitidee *Zahl* im Laufe der Schulzeit

3.2.1. Zahldarstellung und -vorstellung

Ziel der Grundschule ist der Aufbau eines Verständnisses für das dezimale Zahlensystem. Schülerinnen und Schüler stellen natürliche Zahlen bis 1 000 000 auf verschiedene Arten dar und setzen sie zueinander in Beziehung (vgl. KMK, 2004b). Dabei sollten, wie oben erläutert, bereits alle Zahlaspekte repräsentiert sein, damit die Schülerinnen und Schüler mit Eintritt in die Mittelstufe bereits über eine differenzierte Grundvorstellung der natürlichen Zahlen verfügen. Die Sekundarstufe I vertieft diese Grundvorstellungen, stellt sie aber gleichzeitig durch die verschiedenen Zahlbereichserweiterungen immer wieder in Frage. Deshalb sind Zahlbereichserweiterungen als Kernthema in der Mittelstufe aller Schularten eine große Herausforderung für Schülerinnen und Schüler (vgl. Hefendehl-Hebeker & Prediger, 2006, S. 2).

In den Bildungsstandards wird bezüglich der Zahlbereichserweiterungen für den Hauptschulabschluss sowie für den mittleren Schulabschluss erwartet, dass Schülerinnen und Schüler „sinntragende Vorstellungen von rationalen Zahlen, insbesondere von natürlichen, ganzen und gebrochenen Zahlen, entsprechend der Verwendungsnotwendigkeit“ (KMK, 2003/2004a) nutzen, und „Zahlen der Situation angemessen [darstellen], unter anderem in Zehnerpotenzschreibweise“ (vgl. ebd.). Für den mittleren Schulabschluss wird zudem gefordert, dass Schülerinnen und Schüler „die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen an Beispielen begründen“ (KMK, 2003).

Die erste Zahlbereichserweiterung ist meist der Schritt von den natürlichen Zahlen zu den positiven Bruchzahlen. Bereits dieser Schritt erfordert ein gründliches Umdenken und einen Wandel der Zahlvorstellungen. Nun können Zahlen auch Anteile, Verhältnisse o. ä. beschreiben. Die Probleme liegen oft eher im Verstehen der erweiterten Möglichkeiten der Zahldarstellung, die die Bruchzahlen mit sich bringen. Man benötigt zwei ganze Zahlen (Zähler und Nenner), um sie darzustellen. Jede Bruchzahl kann durch unendlich viele andere Brüche oder alternativ in Dezimalschreibweise dargestellt werden (vgl. ebd. S. 3). Zwar gab es unterschiedliche Darstellungsformen auch bei den natürlichen Zahlen, etwa durch eine Potenzschreibweise, jedoch stellten diese die Grundvorstellung der Zahlen nicht so grundlegend in Frage wie die Bruchzahlen.

Bei der Zahlbereichserweiterung zu den ganzen Zahlen, also bei der Hinzunahme der negativen Zahlen sind die Schwierigkeiten der Lernenden häufig anderer Natur. Hier sollte der Ordinalzahlaspekt stärker in den Vordergrund treten, damit Schülerinnen und Schüler eine adäquate Vorstellung von negativen Zahlen als „relative Zahlen bezüglich einer Vergleichsmarke“ (vgl. ebd.) aufbauen und diese nicht nur als natürliche Zahlen in besonderer Funktion interpretieren. Letzteres hätte zur Folge, dass zwar inhaltlich erkannt wird, dass bestimmte Sachkontexte, etwa Schulden oder Temperaturen unter null Grad Celsius, einen anderen Zahlausdruck erfordern, die Ordnungsrelationen allerdings nicht verstanden werden. Da jemand mit 20 € Schulden schließlich stärker verschuldet ist als jemand mit 15 € Schulden, liegt für Schülerinnen und Schüler die Vermutung nahe, dass $-20 > -15$ gelten muss. Der Kardinalzahlaspekt, der die Menge z. B. der Schulden beschreibt, muss also durch den Ordinalzahlaspekt, etwa der Verortung der Zahlen auf einer Zahlengeraden, ergänzt werden, damit der Aufbau einer angemessenen Grundvorstellung der ganzen Zahlen gelingen kann.

Bei der Zahlbereichserweiterung zu den reellen Zahlen ist es erneut die Frage der Zahldarstellung, die einen Wandel der Grundvorstellung nötig macht. Denn nun brechen die Dezimalbrüche nicht mehr ab und lassen sich auch nicht mehr wie die periodischen nicht-abbrechenden Dezimalzahlen als Verhältnis zweier ganzer Zahlen schreiben, sondern müssen indirekt, beispielsweise mit dem ehemals als Rechenaufforderung verstandenem Wurzelzeichen beschrieben werden (vgl. ebd. S. 5). Teilweise wird anstelle der Zahl sogar ein Symbol verwendet, z. B. für die Kreiszahl π, was entgegen der Gewohnheit der Schülerinnen und Schüler steht, eine Ziffernschreibweise zu nutzen. Die Grundvorstellung der beliebig genauen Annäherung an eine exakte Zahl spielt demnach bei der Einführung reeller Zahlen eine wichtige Rolle.

3.2.2. Rechenoperationen und -strategien

Zahlbereichserweiterungen sind oft auch mit Veränderungen oder Erweiterungen von Grundvorstellungen zu Rechenoperationen verbunden. Die Einführung der Bruchzahlen macht es beispielsweise notwendig, dass die Vorstellungen von Multiplikation und die Division angepasst werden. Während die Addition und Subtraktion sich meist relativ unproblematisch mittels der bekannten Zahlaspekte inhaltlich interpretieren lassen (Hefendehl-Hebeker & Prediger, 2006, S. 3); zum Zusammenspiel der Aspekte bei der Addition von Brüchen (Vohns, 2005), erfordern Multiplikation und Division gewandelte Vorstellungen.

So lässt sich die Multiplikation nicht mehr als fortgesetztes Hinzufügen interpretieren (etwa: $4 \cdot 5$ als $5+5+5+5$), sondern es werden Anteile gebildet. Das gilt erst recht bei der Multiplikation von zwei Brüchen, bei der es um Vorstellungen zur Anteilsbildung von Anteilen geht. Dabei machen Lernende die Erfahrung, dass in den ersten Lernjahren entwickelte Vorstellungen wie *Multiplizieren vergrößert* nicht mehr tragen. Bei den ganzen Zahlen liefern Sachzusammenhänge oft gute gedankliche Stützen, die das Addieren und Subtrahieren negativer Zahlen veranschaulichen. Hingegen können Gleichungen wie $(-5)-(-7)=2$ für Schülerinnen und Schüler zunächst irritierend wirken. Schließlich tauchen so viele Minus-Zeichen auf der linken Seite auf und dennoch soll am Ende eine positive Zahl herauskommen (Hefendehl-Hebeker & Prediger, 2006, S. 5). Multiplikation und Division lassen sich zudem nur schwer inhaltlich interpretieren. Als formale Gesetze, können sie dann allerdings bei der Erweiterung der Zahlbereiche zu den reellen Zahlen meist unproblematisch übertragen werden (vgl. ebd. S. 5). In Abbildung 3 sind die Vorstellungen und Darstellungen der verschiedenen Zahlbereiche noch einmal tabellarisch zusammengefasst.

3.3. Die Leitidee *Zahl* im Unterricht

3.3.1. Unterrichtliche Anregungen zum Wandel von Grundvorstellungen

Wie oben erläutert, stellen der Aufbau eines angemessenen Zahlbegriffs und die Zahlbereichserweiterungen eine zentrale Herausforderung der Leitidee *Zahl* dar. Nur wenn Schülerinnen und Schüler ihre Grundvorstellungen wandeln, können sie „einen angemessenen Zahlbegriff entwickeln und diesen auch flexibel als Mittel zur Erschließung von lebensweltlichen und innermathematischen Zusammenhängen einsetzen.“ (Hefendehl-Hebeker & Schwank, 2015, S. 109).

	Natürliche Zahlen	**Bruchzahlen**	**Rationale Zahlen**	**Reelle Zahlen**
Vorstellungen zu den Zahlen	beschreiben in erster Linie Anzahlen, Ordnungszahlen, auch als Rechenzahlen verwendet	dienen zur Beschreibung von Anteilen eines Ganzen, Verteilsituationen, multiplikativen Vergleichen, relativen Anteilen, Verhältnissen	relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke	Grundvorstellungen ergeben sich aus Konstruktion der beliebig genauen Näherung globale Sicht: geschlossene Lücken auf der Zahlengerade
Zahldarstellung	eindeutige Zuordnung eines Zahlzeichens im dezimalen Stellenwertsystem, basierend auf der Idee der Zehnerbündelung	Darstellung nicht eindeutig: eine Bruchzahl kann durch unendlich viele Brüche oder eine Dezimalzahl oder Prozentzahl dargestellt werden	Darstellung mit bekannten Zahlsymbolen und mit Vorzeichen 3 Bedeutungen des Minuszeichens: Vor-, Rechen- und Inversionszeichen	Darstellung irrationaler Zahlen als nicht abbrechende, nicht periodische Dezimalzahlen im Stellenwertsystem keine exakte Darstellung mit end lich vielen Zeichen, nur indirekte Beschreibung
Ordnungsrelation	interpretiert als „weniger als" (Anzahlen) bzw. „früher als" (Ordnungszahlen) jede Zahl hat eindeutigen Nachfolger	Interpretation als „weniger als" unproblematisch rechnerische Ausführung schwieriger als Interpretation kein eindeutiger Nachfolger, da Brüche dicht liegen	Problem: Symmetrie der Zahlengeraden: „weniger als" ist neu deutungsbedürftig leitende Idee für Ordnungsrelation: Orientierung der Zahlengerade	Deutung der Ordnungsrelation keine neue Hürde Ordnungseigenschaft der Vollständigkeit ist zentraler Erweiterungsgrund und wird doch in der Mittelstufe kaum bemerkt
Vorstellungen für Operationen	Addition: Hinzufügen, Zusammenfügen Subtraktion: Wegnehmen, Vermindern Multiplikation: fortgesetztes Hinzufügen, kontinuierliches Skalieren, multiplikativer Vergleich Division: Verteilen, Einteilen	Addition und Subtraktion bleiben der Vorstellung nach gleich; der Einfachheit der Vorstellung entspricht keine vergleichbare Einfachheit der Durchführung Multiplikation und Division mit eingeschränkten und modifizierten Interpretationen, rechnerische Ausführung einfach neue Eigenschaften für Multiplikation/Division, z. B. vergrößert Multiplizieren nicht immer	Verständnishürde: Operationen werden nach Prinzip der Permanenz formaler Gesetze festgesetzt, so dass möglichst viele Regeln (z. B. Distributivität, …) bleiben Interpretation ist der Permanenz der formalen Gesetze nachgeordnet! modifizierte Interpretationen für Addition/Subtraktion, Multiplikation nur mit Hilfsinterpretation als gerichtetes Skalieren	keine neuen Grundvorstellungen nötig Da Unterricht selten zu grundlegenden Fragen vordringt (etwa: wie addiert man nicht abbrechende Dezimalzahlen?), werden hier selten Probleme erlebt.

Abbildung 3: Übersicht zu Vorstellungen zu Zahlen und Operationen
(aus: Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006, S. 4)

Im Folgenden sollen einige Vorschläge dazu gemacht werden, wie dies in der unterrichtlichen Praxis gelingen kann. Hefendehl-Hebeker und Prediger (2006, S. 5 f.) geben drei didaktische Ideen an, die den Unterricht prägen sollten. Zum einen sollte eine dynamische Beziehung zwischen Form und Inhalt gepflegt werden. Das bedeutet, Formeln, seien sie auch noch so einprägsam, möglichst mit einer inhaltlichen Vorstellung zu verknüpfen. Nur so werden Rechenregeln einleuchtend und damit deren Anwendung weniger fehleranfällig. Auf einem höheren Niveau kann die „Thematisierung des Zusammenspiels von Form und Inhalt das Bewusstsein von der inneren Kohärenz der Mathematik und von der Ökonomie formaler Methoden stärken“ (ebd., S. 5), mit anderen Worten, den Schülerinnen und Schülern die zweite Grunderfahrung nach Winter (1995) (siehe Kap.2.1.: „mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen“) ermöglichen.

Zweitens empfehlen die Autorinnen, Zahlen und Zahloperationen vielfältig zu deuten. Wie die Erläuterungen zu den Zahlaspekten zeigen, lassen sich bereits die natürlichen Zahlen und alle weiteren Zahlbereiche unter unterschiedlichen Aspekten betrachten. Für das Themenfeld *Erweitern und Kürzen als die rechnerische Suche nach gleichwertigen Brüchen* schlägt Prediger (2006, S. 11) folgenden Lernweg vor:

„Lernende ...

1. *… entdecken, dass es unterschiedliche Brüche gibt, die denselben Anteil oder eine verwandte Verteilungssituation beschreiben. Diese Brüche nennen wir gleichwertige Brüche.*
2. *… erklären in unterschiedlichen inhaltlichen Deutungen, wieso zwei Brüche gleichwertig sind.*
3. *… finden zu einer Bruchzahl möglichst viele gleichwertige Brüche.*
4. *… entdecken das Erweitern und Kürzen als Möglichkeit, auf der rechnerischen Ebene sehr schnell gleichwertige Brüche zu finden.*
5. *… gewinnen Vertrauen in den Kalkül durch mehrmaliges Überprüfen, dass die inhaltliche und die formale Ebene zusammenpassen. (Erhalte ich durch Kürzen wirklich gleichwertige Brüche?)*
6. *Nochmalige Deutung des Kalküls auf der inhaltlichen Ebene: Erweitern lässt sich deuten als Verfeinern von Anteilen, Kürzen als Vergröbern.“*

Das mehrfache Wechseln zwischen formaler und inhaltlicher Ebene soll einer zu starken Kalkül-Orientierung vorbeugen. Auf diesen sechs Schritten im Lernweg können Lernende Zahlvorstellungen über inhaltliche Deutungen erwerben und diese Vorstellungen wiederum zur inhaltlichen Deutung von Rechenoperationen nutzen.

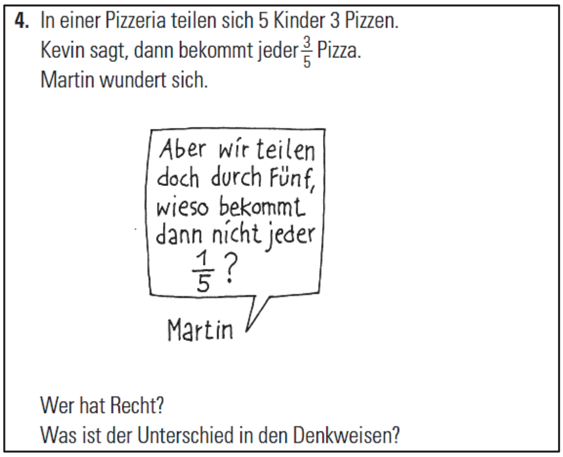


Abbildung 4: Aufgabe zu Bruchvorstellungen (aus: Prediger, 2006, S. 11).

Dabei helfen einfache Aufgaben (siehe Abbildung 4), die ganz gezielt die Grundvorstellungen der Schülerinnen und Schüler thematisieren. In der nebenstehenden Aufgabe werden beispielsweise die beiden Vorstellungen vom Bruch als Teil eines oder als Teil mehrerer Ganzer gegenübergestellt. Ähnliche Ideen zu anderen Zahlbereichen, etwa zu negativen (siehe Barzel & Eschweiler, 2006) oder irrationalen Zahlen (siehe Barzel & Hefendehl-Hebeker, 2006), finden sich unter anderem in den Heften der Reihe Praxis der Mathematik, dabei vor allem die Themenhefte 11 „Unzählig viele Zahlen: Zahlenbereiche erweitern - Zahlvorstellungen wandeln“ aus dem Jahr 2006 und 59 „Leitidee Zahl - Zahlen zählen“ aus dem Jahr 2014, oder in den Heften der Reihe mathematik lehren, zum Beispiel Heft 183 (2014) „Zugänge zu negativen Zahlen“ oder Heft 142 (2007) „Auf dem Weg zu neuen Zahlen“. Hefendehl-Hebeker und Prediger empfehlen, an schwierigen Stellen zu verweilen. Schwierigkeiten sollten nicht „durch didaktische Kniffe umschifft werden“ (Hefendehl-Hebeker & Prediger, 2006, S. 6). Beispielsweise können Regeln wie Minus mal Minus gibt Plus durchaus im Unterricht hinterfragt werden. Wenn Schülerinnen und Schüler einsehen, dass eine andere Definition dieser Regel (also etwa Minus mal Minus gibt Minus) zu logischen Widersprüchen führen würde, wird zum einen diese Regel deutlich einprägsamer und zum anderen der innere Aufbau der Mathematik und der Zwang zur logischen Schlüssigkeit deutlich.

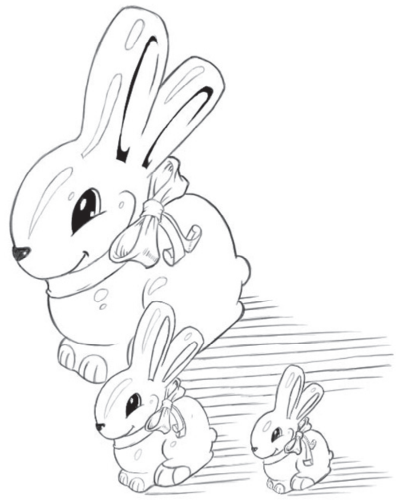
3.3.2. Kompetenzmessung mit Bezug zur Leitidee *Zahl* in VERA-8

Im Folgenden werden am Beispiel von drei Aufgaben[2] zur Leitidee *Zahl* aus den vergangenen VERA-8 Testdurchläufen inhaltliche und prozessbezogene Anforderungen beschrieben. Weiterhin werden Möglichkeiten aufgezeigt, wie diese Aufgaben als Ausgangspunkt für den Unterricht genutzt werden können.

[2] Diese und noch viele weitere Aufgaben inkl. Auswertungsanleitung und didaktischer Kommentierung sind online unter https://www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben/ma1 abrufbar.

Zunächst betrachten wir eine Aufgabe zu Schokoladenosterhasen in Abbildung 5:

Das Bild zeigt drei unterschiedlich große Schokoladenosterhasen. Der kleinste Osterhase wiegt 25 g, der mittlere Osterhase wiegt 100 g und der große Osterhase wiegt 1000 g.



Die nachfolgende Tabelle enthält Aussagen über die drei Schokoladenosterhasen.

Kreuze jeweils an, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

	richtig	falsch
Der kleine Osterhase wiegt ein Viertel des mittleren Osterhasen.	☐	☐
Der mittlere Osterhase wiegt das Vierfache des kleinen Osterhasen.	☐	☐
Das Gewicht des mittleren Osterhasen entspricht 400 % des Gewichts des kleinen Osterhasen.	☐	☐
Aus dem großen Osterhasen könnte man 10 mittlere Osterhasen machen.	☐	☐

Abbildung 5: Aufgabe Osterhase

In dieser Aufgabe spielen verschiedene Zahlaspekte und -darstellungen eine Rolle. Zum einen treten Maßzahlen für das Gewicht der Schokoladenfiguren auf, zum anderen wird der Ordinalzahlaspekt beachtet, wenn die verschieden großen Figuren in den ersten drei Antworten in Relation gesetzt werden und zuletzt spielt auch der Kardinalzahlaspekt eine Rolle, wenn ausgesagt wird, dass die Masse der Schokolade des großen Osterhasen der Menge von 10 mittleren Hasen entspricht. Dabei wird mit natürlichen und rationalen Zahlen gearbeitet, wobei die Ausdrücke ein Viertel oder das Vierfache inhaltlich als Schokoladenmasse gedeutet werden. Zur Lösung dieser Aufgabe werden dem Stimulus-Text Informationen entnommen (K6). Um die korrekten Entscheidungen bezüglich der einzelnen Aussagen treffen zu können, greifen Schülerinnen und Schüler auf sinntragende Vorstellungen von Anteilen zurück und führen etwaige Berechnungen korrekt durch (K5). Werden die obigen Aussagen inkorrekt angekreuzt, so deutet dies darauf hin, dass der Aufbau bestimmter Vorstellungen verstärkt gefördert werden sollte. Denn die erste Aussage fragt Anteilsvorstellungen ab, die zweite Vervielfachungsvorstellungen und die dritte Vorstellungen zum Prozentbegriff.

Im Unterricht kann diese Aufgabe genutzt werden, um vor allem die verwendeten Formulierungen wie *ein Viertel von* oder *ein Vierfaches von* auf bildlicher Ebene zu verdeutlichen.

Wird der Sachverhalt bspw. durch Rechtecke zugänglich gemacht, ist dies mit einer Loslösung von dem realweltlichen Kontext verbunden. Im Anschluss können die Lernenden aufgefordert werden, eigene Aufgaben aus ihrer Lebenswelt zu finden, in denen sich diese Verhältnisdarstellungen anwenden lassen. Im nächsten Schritt können dann zum Beispiel Werbeanzeigen wie *Jetzt doppelt so lecker!* oder *Doppelt so gut wie andere Produkte!* analysiert werden. Durch solche Aufgabenstellungen zu Kompetenzen im Bereich des Validierens mathematischer Modelle (K3) werden Schülerinnen und Schüler dafür sensibilisiert, wie bereits in ihrer Lebenswelt mathematische Aussagen teilweise manipulierend eingesetzt werden. Gleichzeitig erfahren sie, dass Verhältnisangaben wie doppelt oder halb usw. einen Bezugspunkt und eine Skala brauchen und daher Aussagen wie *Doppelt so lecker* aus mathematischer Sicht wenig bis keinen Sinn ergeben.

Die zweite Aufgabe in Abbildung 6 handelt von einem Sachkontext, der aus der (Schul-) Lebenswelt der Lernenden stammt:

In der Klasse 8a wird im Sportunterricht Weitsprung trainiert. Jeder Schüler hat drei Versuche. Die Sportlehrerin gibt die drei Sprungweiten in ein Tabellenkalkulationsprogramm ein und lässt für jeden Schüler die mittlere Weite berechnen.

So sieht die Tabelle für die zehn Mädchen der Klasse aus:

Weitsprung.xls

	A	B	C	D	E	F
1	**Name**	**Vorname**	**Sprung 1 (in m)**	**Sprung 2 (in m)**	**Sprung 3 (in m)**	**mittlere Weite (in m)**
2	Müller	Jacqueline	4,10	3,86	3,92	3,96
3	Frauenstein	Chantal	4,20	4,53	4,12	4,283333333
4	Yilmaz	Emine	3,90	3,75	4,10	3,916666667
5	Ostrovksi	Anna	4,57	4,62	2,70	3,963333333
6	Berghoff	Dilara	3,20	4,52	3,65	3,79
7	Schulte	Lisa	3,56	3,85	3,99	3,8
8	Kaufmann	Sara	4,24	4,32	4,41	4,323333333
9	Li	Xin Xin	4,20	4,25	4,32	4,256666667
10	Meier	Vanessa	3,15	3,25	3,47	3,29
11	Homberg	Eva-Maria	3,52	2,20	3,70	3,14

Man kann in der Tabellenkalkulation vorgeben, mit wie vielen Nachkommastellen eine Zahl angezeigt werden soll.

Gib an, wie viele Nachkommastellen in Spalte F sinnvoll sind.

Die mittlere Weite in der Zelle F2 wurde mithilfe einer Formel berechnet. In dieser Formel wurden Zellenbezeichnungen wie C2, D2 und E2 als Variablen verwendet.

Gib eine passende solche Formel an.

Abbildung 6: Aufgabe Weitsprung

In dieser Aufgabe wird ebenfalls mit verschiedenen Zahldarstellungen gearbeitet. Die Sprungweiten sind in Metern angegeben. Das Tabellenkalkulationsprogramm arbeitet allerdings mit Zellbezügen. Statt der Zahl wird eine Zellenbezeichnung als Variable benutzt (K5). Hierzu müssen sich Schülerinnen und Schüler zunächst die Bedeutung der angegebenen Variablen anhand der Tabelle erschließen (K3, K4). In der zweiten Aufgabe wird reflektiert, ob die Zahlen in der Tabelle sinnvoll dargestellt sind. Einige der Dezimalbrüche in Spalte F brechen nicht ab, sodass sich die Frage stellt, mit welcher Genauigkeit diese Werte in der Tabelle dargestellt werden sollten. Dies ist wohl am einfachsten durch die inhaltliche Interpretation zu beantworten, wenn die Nachkommastellen als Zenti- oder Millimeter interpretiert werden und die Messgenauigkeit bei Weitsprung-Wettkämpfen überdacht wird. Es ist allerdings auch möglich, die Frage durch eine rein innermathematische Überlegung zu beantworten, indem darauf verwiesen wird, dass das Ergebnis einer Mittelwertberechnung sicherlich nicht genauer sein kann als der ungenauste Eingangswert (K5).

Diese Aufgabe bietet verschiedene Möglichkeiten zur Nutzung im Unterricht. Zum einen können Messergebnisse zum Beispiel aus offiziellen Sportwettkämpfen gesammelt und in Tabellenkalkulationen ausgewertet werden. Auch Überlegungen, wer denn nun als bester Weitspringer zu bezeichnen ist, sind denkbar. Hierzu gab es in VERA-8 2011 eine weitere Teilaufgabe. Bezogen auf die Zahldarstellungen können Überlegungen angestellt werden, warum die Zahlen eigentlich nicht als Brüche angegeben werden. Auch das Arbeiten mit Zellbezügen kann vertieft werden. Darüber hinaus kann auch auf die Genauigkeit der numerischen Berechnung des Computers eingegangen werden. Wenn man beispielsweise Mittelwerte irrationaler Zahlen per Hand berechnet und mit den numerisch mit Computern berechneten Werten vergleicht, kann den Schülerinnen und Schülern der Sinn der algebraischen Rechnung nahe gebracht werden und der häufig stark ausgeprägte Glaube an die Genauigkeit des Computers in Frage gestellt werden.

Als dritte und letzte Aufgabe in Abbildung 7 soll eine innermathematische Aufgabe zeigen, wie strukturelle Zusammenhänge zwischen Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen auch für die 8. Jahrgangsstufe noch Lerngelegenheiten bieten.

Simone multipliziert einstellige, zweistellige bzw. dreistellige Zahlen mit den Faktoren 11, 101 und 1001. Sie wundert sich über die Rechenergebnisse, die sie erhält:

(1)	$7 \cdot 11 = 77$	$5 \cdot 11 = 55$
(2)	$38 \cdot 101 = 3838$	$45 \cdot 101 = 4545$
(3)	$306 \cdot 1001 = 306306$	$692 \cdot 1001 = 692692$

Ergänze den folgenden Text.

„Wenn man eine dreistellige Zahl mit 1001 multipliziert, dann …

.“

Begründe diese Aussage nun allgemein.

Abbildung 7: Aufgabe Wundersame Rechenergebnisse

In dieser Aufgabe wird die Multiplikation mit bestimmten natürlichen Zahlen betrachtet, bei der sich eine gewisse Struktur in der Ziffernfolge der Ergebnisse zeigt. Diese Beobachtung muss für den Fall der dreistelligen Zahlen als ganzer Satz formuliert werden (K1). Im Anschluss soll diese Aussage auch allgemein, d. h. nicht nur am konkreten Beispiel, begründet werden. Diese Teilaufgabe (Anforderungsbereich III) zeigt, ob das Dezimalsystem verstanden wurde. Für eine sinnvolle Begründung muss beispielsweise erkannt werden, dass die spezielle Zerlegung der Faktoren 11, 101 und 1001 in einen Einer und einen Zehner bzw. Hunderter bzw. Tausender das Phänomen erklärt. In einem anderen System als dem Dezimalsystem würden sich diese Auffälligkeiten nicht in gleicher Form ergeben. Dies ist zwar nicht Teil der erwarteten Lösung, kann aber als Ausgangspunkt genommen werden, die kulturell bedingte Dezimalsystematik zu thematisieren. Einfache Übungen etwa zum Binärsystem oder dem Hexadezimalsystem, die heute beide für Computer eine wichtige Rolle spielen, sind denkbar.

4. Fazit

Die Herausforderungen sowie die Möglichkeiten, die die Beschäftigung mit der Leitidee *Zahl* bieten, sind vielfältig. Dabei wurde hier vor allem auf die Wichtigkeit des Aufbaus adäquater Grundvorstellungen hingewiesen. Angemessene Grundvorstellungen zum Zahlbegriff sind eine Voraussetzung für grundlegende Erfahrungen:

- Mathematik als Werkzeug, um Erscheinungen der Welt aus Natur, Gesellschaft, Kultur, Beruf und Arbeit in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen,
- Mathematik als geistige Schöpfung und auch deduktiv geordnete Welt eigener Art und
- Mathematik als Mittel zum Erwerb von auch über die Mathematik hinausgehenden, insbesondere heuristischen Fähigkeiten.

Literaturverzeichnis

Barzel, B. & Eschweiler, M. (2006). Negative Zahlen – Positiv erleben! Eine Lernwerkstatt zur Einführung der negativen Zahlen (6. – 7. Klasse). *Praxis der Mathematik in der Schule,* 48, 13-21.

Bauer, L., Rolka, K.,& Törner, G. (2005). Mentale Repräsentationen von Irrationalzahlen - eine Analyse von Schülerinnenaufsätzen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 26 (1), 3-27.

Blum, W., Drüke-Noe, Ch., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg.) (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co., 14-16

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Hatterman, M. & vom Hofe, R. (2014). Zugänge zu negativen Zahlen. *mathematik lehren,* 183.

Hefendehl-Hebeker, L. & Barzel, B. (2006). ‚Irre oder irrationale Zahlen' – ein Stationenzirkel zum Einstieg (9. – 10. Klasse). *Praxis der Mathematik in der Schule*, 48, 22-28.

Hefendehl-Hebeker, L., Prediger, S. (2006). Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern - Zahlvorstellungen wandeln. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 48, 1-7.

Hefendehl-Hebeker, L.,& Schwank, I. (2015) Arithmetik: Leitidee Zahl". In Bruder, R. et al., *Handbuch Mathematikdidaktik* (S. 77-116). Heidelberg: Springer Spektrum

Katzenbach, M., Blum, W., Drüke-Noe, C., Keller, K., Köller, O., Leiss, D., Müller, M. & Roppelt, A. (2009). *Bildungsstandards: Kompetenzen überprüfen. Mathematik Sekundarstufe I. Handreichung*. Berlin: Cornelsen.

Kleine, M., & Weixler, S. (Hrsg.) (2014). Leitidee Zahl – Zahlen zählen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 59, 2-6.

KMK (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Hürth: Luchterhand

URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf (abgerufen am: 08.06.2015)

KMK (2004a). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss*. Hürth: Luchterhand

URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Haupt.pdf (abgerufen am: 08.06.2015)

KMK (2004b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Hürth: Luchterhand

URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf (abgerufen am: 08.06.2015)

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*. Hürth: Luchterhand

URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf (abgerufen am: 08.06.2015)

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 5

Malle, G. & vom Hofe, R. (2007). Auf dem Weg zu neuen Zahlen. *Mathematik lehren.* 142.

Padberg, F. (2002). *Didaktik der Bruchrechnung - Gemeine Brüche Dezimalbrüche*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag,

Padberg, F., & Benz, Ch., (2011). *Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 14

Prediger, S. (2006). Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben - Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben (5. – 8. Klasse). *Praxis der Mathematik in der Schule*, 48, 8-12.

Vohns, A. (2005). Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 26, 52-79.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 1, 37-46.