Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

# Vergleichsarbeiten 2015
# 8. Jahrgangsstufe (VERA-8)
# Mathematik – Didaktische Handreichung
# Modul B

## Didaktische Erläuterung
## Allgemeine mathematische Kompetenzen fördern

## Inhaltsverzeichnis



Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien auch online finden können?

www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

# 1. VERA-8 im Fach Mathematik

In VERA-8 Mathematik werden auch im Jahr 2015 alle Leitideen und alle allgemeinen mathematischen Kompetenzen aus den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss bzw. für den Mittleren Schulabschlussüberprüft. Daher werden im Folgenden die wesentlichen Komponenten der Bildungsstandards Mathematik kurz dargestellt. Anschließend werden alle allgemeinen mathematischen Kompetenzen ausführlicher beschrieben, anhand von typischen Aufgaben erläutert und Hinweise zur unterrichtlichen Behandlung gegeben.

# 2. Die Bildungsstandards Mathematik

Die Bildungsstandards beschreiben die fachbezogenen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis zu gewissen Zeitpunkten ihrer Schullaufbahn erworben haben sollen. Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die nur in aktiver Auseinandersetzung mit substantiellen Fachinhalten erworben werden können. Genauer kann man Kompetenzen definieren als die „bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“ (Weinert 2001). Illustriert und konkretisiert werden solche Kompetenzen durch Aufgaben, zu deren Lösung diese Kompetenzen benötigt werden.

Bildungsstandards bieten eine Orientierung über verbindliche Zielerwartungen sowie Möglichkeiten zur Überprüfung, inwieweit diese Ziele bis zu definierten Punkten in Bildungsgängen erreicht worden sind. Das wesentliche Ziel von Bildungsstandards ist es, durch eine veränderte Sicht auf Bildungsziele die Qualität des Unterrichts zu steigern und dadurch die Leistungen sowie die fachbezogenen Einstellungen aller Schülerinnen und Schüler zu verbessern.

Konkret werden in den Bildungsstandards Mathematik für den mittleren Schulabschluss drei „Dimensionen“ unterschieden, die man als „Prozess-“, „Inhalts-“ und „Anspruchsdimension“ bezeichnen kann.

Die „Prozessdimension“ unterscheidet die allgemeinen mathematischen Kompetenzen, deren Erwerb im Mittelpunkt des Unterrichts stehen soll; im Einzelnen sind diese[1]:

- *Mathematisch argumentieren (K1),*
- *Probleme mathematisch lösen (K2),*
- *Mathematisch modellieren (K3),*
- *Mathematische Darstellungen verwenden (K4),*
- *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5),*
- *Mathematisch kommunizieren (K6).*

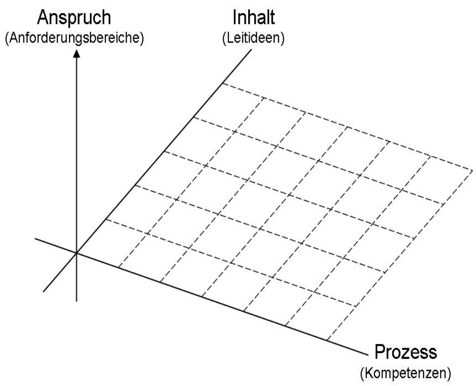


Abbildung 1: Kompetenzmodell

Diese Aufschlüsselung von „mathematischer Kompetenz“ in einzelne Kompetenzen soll eine gezielte Entwicklung dieser Fähigkeiten und Fertigkeiten ermöglichen. Dabei ist es weder möglich noch beabsichtigt, die einzelnen Kompetenzen scharf voneinander abzugrenzen.

[1] Genauer beschrieben werden die Kompetenzen in „Bildungsstandards Mathematik: konkret“, Kapitel 2 (Hrsg. W. Blum u.a., Cornelsen-Scriptor 2012).

Vielmehr ist es geradezu typisch für mathematisches Arbeiten, dass mehrere Kompetenzen im Verbund benötigt werden und sich die verschiedenen Kompetenzen gegenseitig durchdringen. Einzelne Aufgaben können daher in der Regel *nicht* eindeutig jeweils *genau einer* allgemeinen mathematischen Kompetenz zugeordnet werden. Es kann in vielen Fällen aber ein Schwerpunkt für eine allgemeine Kompetenz angegeben werden, deren Entwicklung durch eine Aufgabe besonders gefördert werden kann.

Die „Inhaltsdimension" wird bestimmt von den inhaltsbezogenen Leitideen, anhand derer die Kompetenzen erworben werden sollen; im Einzelnen sind diese:

- Leitidee Zahl (L1),
- Leitidee Messen (L2),
- Leitidee Raum und Form (L3),
- Leitidee funktionaler Zusammenhang (L4),
- Leitidee Daten und Zufall (L5).

Innerhalb dieser Leitideen gibt es konkrete Inhalte, die sogenannten inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen, die typischerweise zum mathematischen Schulcurriculum gehören und anhand derer die allgemeinen mathematischen Kompetenzen erworben werden sollen. Die Leitideen sind nicht identisch mit den klassischen Stoffgebieten der Schulmathematik (Zahlen und Größen, Geometrie, Algebra, Stochastik), es gibt aber offensichtliche, enge Beziehungen zwischen Leitideen und Stoffgebieten. Die Strukturierung der Inhalte nach Leitideen soll zum einen stärker die Verbindungen zwischen den verschiedenen Stoffgebieten betonen (z. B. funktionale Beziehungen im geometrischen Kontext)und zum anderen die spiralige Anordnung des Lehrstoffs bzw. den fortschreitenden Kompetenzaufbau über längere Zeitintervalle unterstützen.

Die „Anspruchsdimension" ergibt sich aus den Anforderungsbereichen, die den kognitiven Anspruch kompetenzbezogener mathematischer Anforderungen – vor allem beim Bearbeiten von Aufgaben – auf theoretischer Ebene beschreiben sollen. In den Bildungsstandards Mathematik unterscheidet man pragmatisch drei solche Anforderungsbereiche, die kurz mit

- Reproduzieren (AB I),
- Zusammenhänge herstellen (AB II),
- Verallgemeinern und Reflektieren (AB III)

überschrieben sind. Natürlich sind die Übergänge zwischen diesen Bereichen fließend. Je nachdem, in welchem Anforderungsbereich die angesprochenen Kompetenzen gefordert sind, werden Aufgaben einem der drei Anforderungsbereiche zugeordnet. Dieses theoretische Anspruchsniveau einer Aufgabe darf keinesfalls mit der tatsächlichen Lösungsquote der Aufgabe in Tests verwechselt werden (wobei kognitiv anspruchsvollere Aufgaben natürlich tendenziell auch weniger häufig gelöst werden).

Bildungstheoretische Grundlage dieses dreidimensionalen „Kompetenzmodells" ist der Allgemeinbildungsauftrag des Unterrichtsfachs Mathematik, wie er prägnant von Heinrich Winter beschrieben worden ist (Winter 2003). Hierauf beziehen sich die von der KMK verabschiedeten Bildungsstandards Mathematik ausdrücklich: Mathematikunterricht soll Schülerinnen und Schülern drei Grunderfahrungen ermöglichen, nämlich

- technische, natürliche, soziale und kulturelle Erscheinungen und Vorgänge mit Hilfe der Mathematik wahrnehmen, verstehen und unter Nutzung mathematischer Gesichtspunkte beurteilen,
- Mathematik mit ihrer Sprache, ihren Symbolen, Bildern und Formeln in der Bedeutung für die Beschreibung und Bearbeitung von Aufgaben und Problemen inner- und außerhalb der Mathematik kennen und begreifen,
- in der Bearbeitung von Fragen und Problemen mit mathematischen Mitteln allgemeine Problemlösefähigkeit erwerben.

Schülerinnen und Schüler sollen also Mathematik als Werkzeug, als geistige Schöpfung eigener Art, sowie als Hilfsmittel zum Erwerb fachbezogener und fachübergreifender Fähigkeiten kennenlernen. Selbstverständlich kann und soll Bildung nicht auf fachbezogene kognitive Leistungen eingeschränkt werden; vielmehr schließt eine umfassende schulische Bildung u. a. auch soziale Kompetenzen sowie motivationale und emotionale Faktoren mit ein.

# 3. Allgemeine mathematische Kompetenzen

In den VERA-8-Tests Mathematik werden alle oben beschriebenen allgemeinen mathematischen Kompetenzen und alle inhaltsbezogenen Leitideen abgedeckt. Im Folgenden werden diese allgemeinen Kompetenzen kurz erläutert und in den Kontext der VERA-Aufgaben gestellt. Außerdem wird exemplarisch ein Ausblick auf einen Unterricht gegeben, der diese Kompetenzen fördert.

## 3.1 Die Kompetenz Mathematisch argumentieren

Unter *Mathematisch Argumentieren* wird die Kompetenz verstanden, mathematische Aussagen zu einer schlüssigen Argumentationskette zu verbinden sowie gegebene mathematische Argumentationen zu verstehen und zu bewerten (vgl. u. a. Hanna 2000). Zum mathematischen Argumentieren gehören das Erläutern, das Begründen, das Bewerten und das Beweisen. In diesem Zusammenhang sind meist Fragen zu stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind, wie beispielsweise „Gibt es …?“, „Weshalb ist das so …?“ oder „Ist das immer so …?“, sowie begründete Vermutungen zu formulieren. Aufgaben, die die Lernenden zum Argumentieren auffordern, weisen meist Formulierungen auf wie „Begründe ...“, „Widerlege …“, „Welche Bedingungen müssen eintreten, damit ...“ oder „Warum ist das so? Erläutere …“.

Bei der Entwicklung einer (hinreichend komplexen) Argumentation kann man idealtypisch die sechs folgenden, aufeinander aufbauenden Schritte unterscheiden:

1. Erforschen einer Problemstellung und Formulierung einer Vermutung
2. Untersuchen der Vermutung und Sammeln von Argumenten
3. Auswahl von Argumenten durch Überprüfung ihrer Brauchbarkeit und Stichhaltigkeit
4. Verknüpfen von Argumenten zu einer Argumentationskette
5. Überprüfen der Argumentation auf Standfestigkeit
6. Ggf. Formulierung der Argumentation

Diese Schrittfolge kann als Basis für Unterstützungsmaßnahmen dienen. Zentral ist, dass ein Argumentationsprozess sowohl explorative als auch systematisierende Prozesse umfasst. Schülerinnen und Schülern kann so zumindest in Ansätzen transparent gemacht werden, wozu man auch Begründungen und präformale Beweise verwenden kann, die Lernende vor allem in jüngeren Jahrgangsstufen bereits ausführen können. Hinsichtlich des formalen Beweisens können diese Schritte noch einmal leicht modifiziert werden (Reiss et al. 2006).

Grundlage für jegliche Argumentationen stellen eine kritische Fragehaltung der Lernenden bzw. ihr Bedürfnis dar, ein gegebenes Argumentationsproblem auch zu lösen. Darüber hinaus benötigen sie ein breites Faktenwissen. Allerdings ist dies noch keine hinreichende Bedingung. Wie Untersuchungen zeigen, müssen die Lernenden auch über ein adäquates *Metawissen* verfügen, um ihr Faktenwissen zur Formulierung einer Argumentation bzw. eines Beweises nutzen zu können (vgl. Reiss et al. 2006). Zu diesem Metawissen bzw. –können zählen insbesondere:

- ein adäquates Begriffsverständnis zur Unterscheidung von mathematischen Aussagen, Definitionen und Sätzen,

- die Fähigkeit, zwischen Voraussetzungen und Behauptungen zu unterscheiden,
- der Umgang mit „…wenn, dann…“ und „…genau dann, wenn…“ Formulierungen,
- die Fähigkeit zu logisch korrekten Schlussfolgerungen,
- ein Einblick in die Bedeutung von Beispielen beim Argumentieren und Beweisen,
- die Kenntnis verschiedener Argumentationsmuster bzw. Beweisformen,
- die Kenntnis von Problemlösestrategien und die Fähigkeit, diese zu nutzen.

Die meisten Formen des Argumentierens im Mathematikunterricht werden im Rahmen innermathematischer Problemstellungen ausgeführt. Die Argumentation selbst und ihre Funktion hinsichtlich des Bestätigens oder Widerlegens einer Aussage ist dabei der Kern der Aufgabenstellung. Zu unterscheiden ist hierbei, ob eine Argumentation nur rein mental ausgeführt oder ob sie zusätzlich schriftlich oder mündlich dargelegt wird. Erfolgen Argumentationen im Rahmen außermathematischer Problemstellungen, können sie als Teil des Modellierens aufgefasst werden, sie stehen hier also im Dienste der Modellierung einer Sachsituation. Es geht dann meist um das Begründen getroffener Annahmen, das Vornehmen von Vereinfachungen, die Auswahl bzw. Bildung eines geeigneten Modells oder das Aussprechen einer Empfehlung aufgrund der durchgeführten Überlegungen oder Berechnungen (Büchter & Leuders 2005).

In den Bildungsstandards Mathematik werden beim *Mathematischen Argumentieren* wie bei jeder Kompetenz drei verschiedene *Anforderungsbereiche* unterschieden (vgl. KMK 2004):

- Zum niedrigsten Anforderungsbereich „Reproduzieren“ gehört hier das Wiedergeben bzw. Ausführen von einfachen, oft einschrittigen Routineargumentationen unter Rückgriff auf vertraute Rechnungen, Verfahren, Herleitungen und Sätze oder Argumentieren unter Zuhilfenahme von Alltagswissen.
- Der mittlere Anforderungsbereich „Zusammenhänge herstellen“ umfasst das Entwickeln oder Erläutern von Argumentationen mit wenigen Schritten sowie das Beschreiben und Begründen von überschaubaren Lösungswegen sowie das Bewerten von Ergebnissen bezüglich ihres Anwendungskontextes und das Erläutern von Zusammenhängen.
- Zum höchsten Anforderungsbereich „Verallgemeinern und Reflektieren“ gehören das Entwickeln oder Erläutern komplexer Argumentationen sowie das Vergleichen und Bewerten vorgegebener Argumentationen. Außerdem gehören zu diesem Anforderungsbereich das Stellen von für die Mathematik charakteristischen Fragen und das Äußern von begründeten Vermutungen.

Ein Beispiel für eine VERA-Aufgabe, die die Kompetenz *Mathematisch argumentieren* besonders anspricht, ist die Aufgabe „Freizeitkosten“ (siehe Abbildung 2). Die Schülerinnen und Schüler sollen hier begründet entscheiden, ob das arithmetische Mittel einer Datenreihe stets genau in der Mitte zwischen dem kleinsten und dem größten Wert liegt. Sie können sich dabei auf eine gegebene Datenreihe beziehen, in der dies tatsächlich der Fall ist. Die Aussage lässt sich etwa durch ein Gegenbeispiel widerlegen, in der das arithmetische Mittel nicht genau in der Mitte zwischen dem kleinsten und dem größten Wert liegt. Hierzu kann die gegebene Datenreihe leicht verändert oder eine gänzlich neue Datenreihe angegeben werden. Um die Aufgabe korrekt zu lösen, müssen die Lernenden also insbesondere mit Allaussagen und Gegenbeispielen adäquat umgehen können. Da hier eine Argumentation mit wenigen Schritten entwickelt und dargestellt werden soll, wird die Aufgabe dem mittleren Anforderungsbereich (AB II) zugeordnet.

**„Freizeitkosten“**

Betty hat sechs Monate lang notiert, wie viel Geld sie für ihre Freizeitaktivitäten ausgegeben hat.

| Monat | Januar | Februar | März | April | Mai | Juni |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ausgaben in € | 31 | 31 | 20 | 28 | 30 | 40 |

Sie hat ausgerechnet, dass sie in diesen sechs Monaten durchschnittlich 30 € pro Monat ausgegeben hat.

Dennis sagt: „Die Arbeit hättest du dir sparen können. Das arithmetische Mittel liegt ja in jedem Fall immer genau in der Mitte zwischen dem kleinsten und dem größten Wert, bei deinen Zahlen also genau zwischen 20 und 40.“

Hat Dennis Recht?

Kreuze an.

☐ Ja ☐ Nein

Begründe deine Entscheidung.

Abbildung 2: VERA-Aufgabe „Freizeitkosten“

Auch die VERA-Aufgabe „Würfeloberfläche“ (siehe Abbildung 3) zielt besonders auf die Kompetenz *Mathematisch argumentieren* ab. Die Lernenden sollen hier begründet entscheiden, um wie viel Prozent die Oberfläche eines Würfels abnimmt, wenn dessen Kantenlänge halbiert wird. Sie können dabei grundsätzlich rechnerisch oder anschaulich argumentieren und ggf. auf ein selbst gewähltes Beispiel zurückgreifen. Weiterhin kann die Problemstellung auf die Betrachtung nur einer einzigen der sechs Seitenflächen reduziert werden. Die Schülerinnen und Schüler müssen hier also eine mehrschrittige, komplexe Argumentation entwickeln und darstellen. Aus diesem Grund wird die Aufgabe dem höchsten Anforderungsbereich (AB III) zugeordnet.

**„Würfeloberfläche“**

Verkleinert man die Kantenlänge eines Würfels, verkleinert sich auch die Größe seiner Oberfläche.

Die Kantenlänge eines Würfels wird halbiert.

Um wie viel Prozent verkleinert sich die Größe seiner Oberfläche?

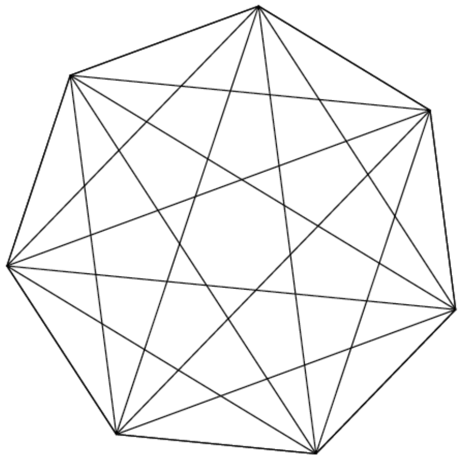
Kreuze an.

☐ um 25 % ☐ um 50 % ☐ um 75 % ☐ um 87,5 %

Begründe deine Antwort.

Abbildung 3: VERA-Aufgabe „Würfeloberfläche“

Die Aufgaben aus dem VERA-Test können ggf. angepasst und im Unterricht eingesetzt werden, um gezielt die Kompetenz *Mathematisch argumentieren* zu fördern. Darüber hinaus können im Unterricht auch offenere Aufgabenformate verwendet werden, etwa die folgende Aufgabe zur Argumentation im n-Eck (siehe Abbildung 4).



Jede Ecke des abgebildeten 7-Ecks ist genau einmal mit jeder anderen Ecke verbunden.

1. Warum ergibt die Rechnung $\frac{7 \cdot 6}{2}$ die Gesamtzahl der Verbindungen in dem abgebildeten 7-Eck?
2. Wie kann die Gesamtzahl der Verbindungen in einem 10-Eck, in einem 100-Eck und in einem n-Eck berechnet werden? Begründe deine Antwort.
3. Eine Diagonale ist eine Verbindung zweier nicht benachbarter Ecken. Wie kann man die Gesamtzahl der Diagonalen in einem n-Eck berechnen? Begründe deine Antwort.

Abbildung 4: Unterrichtsaufgabe „n-Eck“ (vgl. Krumsdorf 2009: 13

Weitere Anregungen findet man z. B. hier:

- Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 30 („WARUM? Argumentieren, Begründen, Beweisen“), 2009
- mathematik lehren, Heft 110 („Begründen“), 2002
- mathematik lehren, Heft 155 („Wege zum Beweisen“), 2009
- Mathematik 5-10, Heft 26 („Das ist so, weil…“), 2014

## 3.2 Die Kompetenz Probleme mathematisch lösen

Ein Problem liegt allgemein vor, wenn der Problemlöser ein Ziel hat, aber nicht unmittelbar weiß, wie er dieses Ziel erreichen kann (Duncker 1935/1974). Anders ausgedrückt: Ist dem Problemlöser der Lösungsweg unbekannt und muss dieser neu entwickelt werden, wird eine Aufgabe für ihn zum Problem (Pólya 1948). Der Problemcharakter einer Aufgabe kann hingegen verschwinden, falls eine vergleichbare Aufgabe in einem kurzen zeitlichen Abstand wieder bearbeitet werden soll und nun durch bloßes Abrufen von bekannten Lösungsschritten gelöst werden kann. Erfolgreiches Problemlösen erfordert häufig das Umstrukturieren und Kombinieren bekannter Wissensfacetten. Dies bedeutet, dass vorhandenes Wissen und verfügbare Kompetenzen beim Problemlösen auf eine neue, unbekannte Fragestellung übertragen werden sollen, um diese zu beantworten

Für das erfolgreiche Bearbeiten von Problemen sind motivationale Lernvoraussetzungen, Fertigkeiten und vor allem Fähigkeiten zur Nutzung von Heurismen entscheidend (Mayer 1998). Während das Beherrschen technischer Fertigkeiten eine Grundlage für jegliches mathematische Arbeiten darstellt, wird das besondere Augenmerk beim Bearbeiten von Problemen auf Heurismen gelegt. Diese verwendet man, wenn kein Routineverfahren

(Algorithmus) zur Verfügung steht, sondern vom Problemlöser ein Lösungsverfahren erst konstruiert werden muss.

Dabei unterscheidet man:

- Heuristische Hilfsmittel: Dazu zählen Figuren Skizzen, Tabellen, Graphen und Gleichungen. Sie sollen dazu dienen, ein Problem zu verstehen, zu strukturieren oder zu visualisieren. Sie haben daher eher Verfahrenscharakter und können auch genutzt werden, um die Lösungswege von Lernenden zu dokumentieren (Bruder & Collet 2011: 45).
- Heuristische Strategien: Dazu zählen (systematisches) Probieren, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Zurückführen auf etwas Bekanntes und Suchen nach Analogien. Heuristische Strategien sind grundsätzliche Vorgehensweisen beim Problemlösen, wenn das Problem bereits verstanden wurde(Bruder & Collet 2011: 69).
- Heuristische Prinzipien: Dazu zählen Zerlegen und Ergänzen, Fallunterscheidungen und die gezielte Untersuchung von Extrem- bzw. Grenzfällen (Extremalprinzip). Sie sind stärker an Fachinhalte gebunden als die heuristischen Strategien und stehen im Zusammenhang mit einem Aspektwechsel (Bruder & Collet 2011: 87).

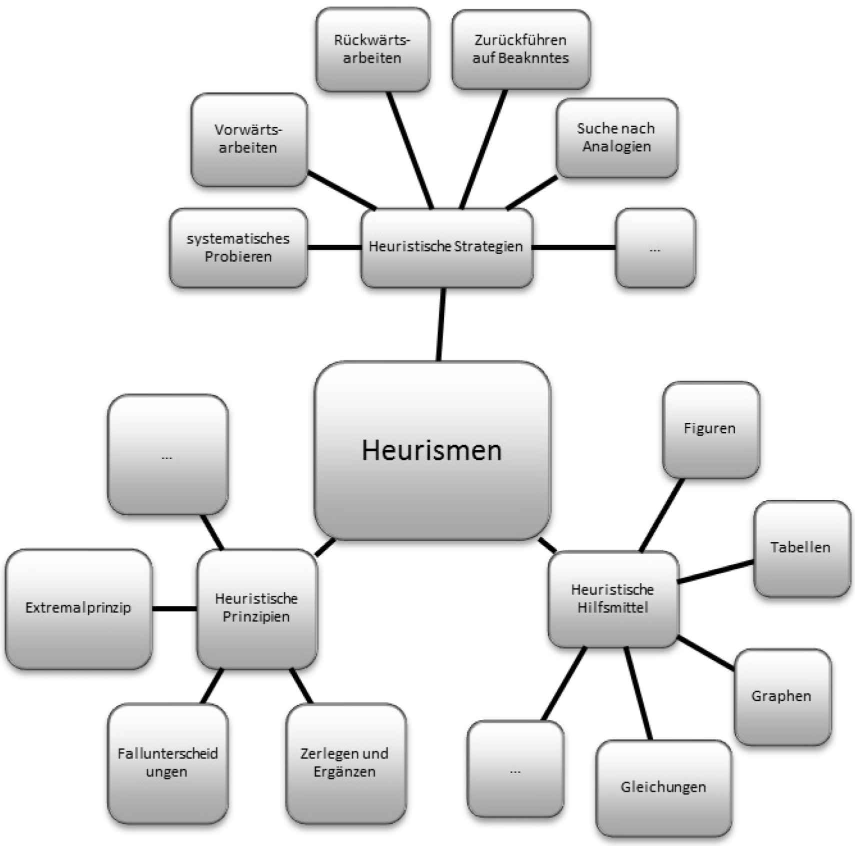



Abbildung 5: Heurismen (vgl. Bruder & Collet 2011: 45)

Eine Übersicht zu Heurismen zeigt Abbildung 5. Man unterscheidet kognitive Strategien, welche sich unmittelbar mit der Verarbeitung von Informationen aus der Aufgabe beschäftigen, und metakognitive Strategien, die den gesamten Lösungsprozess planen, kontrollieren und regulieren. Somit zählen zur Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2) neben der erfolgreichen Verwendung geeigneter heuristischer Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien auch das Überprüfen und Finden von Lösungsideen und Lösungswegen.

Beim Lösen mathematischer Probleme werden die drei verschiedenen *Anforderungsbereiche* wie folgt unterschieden (vgl. KMK 2004):

- Zum niedrigsten Anforderungsbereich „Reproduzieren“ gehört das Lösen von Routineaufgaben sowie das Bearbeiten von einfachen Problemen – auch mit experimentellen Verfahren.
- Der mittlere Anforderungsbereich „Zusammenhänge herstellen“ umfasst das Bearbeiten von Problemen und deren Lösungen, die Anwendung von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien sowie das Formulieren von Problemen und das Überprüfen der Plausibilität von Ergebnissen.
- Zum höchsten Anforderungsbereich „Verallgemeinern und Reflektieren“ gehören das Bearbeiten von anspruchsvollen Problemen und das Finden von Lösungsideen sowie das Reflektieren von Lösungswegen.

Die VERA-Aufgabe „Eindeutig“ (siehe Abbildung 6) spricht die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* auf verschiedenen Niveaus an. In der ersten Teilaufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler zu einigen linearen Gleichungen jeweils angeben, ob diese eine oder keine Lösung haben. Sie können hierzu in der Regel nicht auf ein einfaches Standardverfahren zurückgreifen, sondern werden selbst eine Vorgehensweise entwickeln müssen, um die Aufgabe korrekt zu lösen. Dabei können sie jedoch auf bekannte Rechenverfahren (Äquivalenzumformungen) zurückgreifen. Neben der Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* wird hier also auch die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* angesprochen. Die kognitiven Anforderungen an das Problemlösen sind hier geringer als in der zweiten Teilaufgabe, in der die Lernenden selbst eine Gleichung angeben sollen, die unendlich viele Lösungen hat. Aus diesem Grund wird die erste Teilaufgabe dem mittleren Anforderungsbereich (AB II) zugeordnet und die zweite Teilaufgabe dem höchsten Anforderungsbereich (AB III).

**„Eindeutig“**

Selina und Jasmin üben das Lösen von Gleichungen.

**Teilaufgabe 1**

„Bei den folgenden Gleichungen sehe ich sofort, ohne zu rechnen, ob sie jeweils eine oder keine Lösung haben“, sagt Selina.

Entscheide, ob die folgenden Gleichungen eine oder keine Lösung haben.

Kreuze jeweils an.

| | Es gibt **keine** Lösung. | Es gibt **eine** Lösung. |
|---|---|---|
| $3x + 32 = 17x + 4$ | ☐ | ☐ |
| $x + 32 = x + 4$ | ☐ | ☐ |
| $3 + 32x = 17 + 4x$ | ☐ | ☐ |

**Teilaufgabe 2**

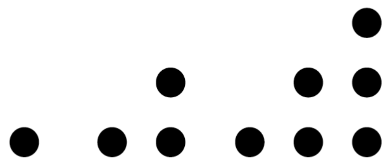
Für eine weitere Gleichung finden beide Mädchen nicht nur eine, sondern unendlich viele Lösungen. Jasmin sagt: „Es gibt auch Gleichungen mit unendlich vielen Lösungen. In diese kann man für *x* jede beliebige Zahl einsetzen und es entsteht immer eine wahre Aussage."

Notiere eine Gleichung, auf die Jasmins Beschreibung zutrifft.

..............................................................................................

Abbildung 6: VERA-Aufgabe „Eindeutig“

Die Aufgaben aus dem VERA-Test können ggf. in abgewandelter Form im Unterricht eingesetzt werden, um gezielt die prozessbezogene Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* zu fördern. Darüber hinaus können im Unterricht auch offenere Aufgabenformate verwendet werden, etwa die folgende Aufgabe zu Erkundungen mit Dreieckszahlen (siehe Abbildung 7).



Einige Zahlen sehen aus wie Dreiecke oder Vierecke, andere besitzen noch mehr Ecken. Welche Zahlen sind Sechseckzahlen, welche Siebeneckzahlen,…? Ergänze dazu die Tabelle und überlegehinterher, wie die Zahlen aussehen können.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Dreieckzahlen | 1 | 3 | 6 | 10 | | |
| Viereckzahlen | 1 | 4 | 9 | | | |
| Fünfeckzahlen | 1 | 5 | 12 | | | |
| Sechseckzahlen | 1 | 6 | | | | |
| ... | | | | | | |

Welche Zahlen können in verschiedenen Gestalten auftreten? Wie kommst du ihnen am besten auf die Spur?

Abbildung 7: Unterrichtsaufgabe „Dreieckszahlen“ (vgl. Hußmann&Leuders 2008: 10f.)

Weitere Anregungen findet man z. B. hier:

- Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 19 („Wie geht es weiter? – Wachstum und Prognose“), 2008
- mathematik lehren, Heft 115 („Heuristik – Problemlösen lernen“), 2002
- Mathematik 5-10, Heft 13 („Alles eine Frage der Strategie – Problemlösen“), 2010

## 3.3 Die Kompetenz Mathematisch modellieren

Beim mathematischen Modellieren geht es um das Hin- und Herwechseln zwischen außermathematischen Realsituationen und mathematischen Begriffen, Resultaten oder Methoden. Hierzu gehört sowohl das Konstruieren passender mathematischer Modelle als auch das Verstehen oder Bewerten gegebener Modelle.

Mathematische Modelle sind „(…) vereinfachende, nur gewisse, hinreichend objektivierbare Teilaspekte berücksichtigende Darstellung[en] der Realität“ (Henn & Maaß 2003: 2). In der Regel können Realsituationen – abhängig etwa von der Ziel- bzw. Fragestellung des Modellierers – auf viele verschiedene Arten vereinfacht werden. Es gibt insofern meist nicht ein eindeutiges, bestes mathematisches Modell für eine Realsituation, sondern eine Vielzahl in Frage kommender Modelle. Konsens ist, dass Modelle in sich widerspruchsfrei, stimmig und zweckmäßig sein sollen. Mit stimmig ist in diesem Zusammenhang gemeint, dass wesentliche Beziehungen der realen Situation im Modellabgebildet werden. Die Zweckmäßigkeit eines Modells kann nur mit Hilfe des zu bearbeitenden Problems beurteilt werden. Sie kann beispielsweise durch die Sparsamkeit des verwendeten Modells, aber in einer anderen Situation auch durch den Reichtum der dargestellten Beziehungen zum Ausdruck kommen. Eine neue Problemstellung erfordert unter Umständen eine neue

Modellierung; auch dann, wenn der gleiche Gegenstand betrachtet wird (vgl. Greefrath, Kaiser, Blum, Borromeo Ferri 2013).

Im Folgenden wird zunächst ein siebenschrittiger Modellierungskreislauf dargestellt, um die einzelnen Teilaspekte des Modellierens detailliert aufzeigen zu können. Später werden dann ein kürzerer Lösungsplan für Modellierungsaufgaben vorgestellt und unterrichtliche Anregungen gegeben, die helfen können, möglichen Schwierigkeiten beim Einsatz von Modellierungsaufgaben im Unterricht zu begegnen.

Der in Abbildung 2 dargestellte siebenschrittige Modellierungskreislauf gibt die einzelnen Schritte des Modellierens, von denen im Sinne der Bildungsstandards streng genommen lediglich die vier Teilschritte 2, 3, 5 und 6 zur Kompetenz *Mathematisch modellieren* gezählt werden, idealtypisch wieder. Dabei scheinen die einzelnen Bearbeitungsschritte beim Lösen von Modellierungsaufgaben linear aufeinander zu folgen. In der Regel wechseln die Lernenden jedoch mehrfach zwischen „Mathematik" und dem „Rest der Welt" hin und her.

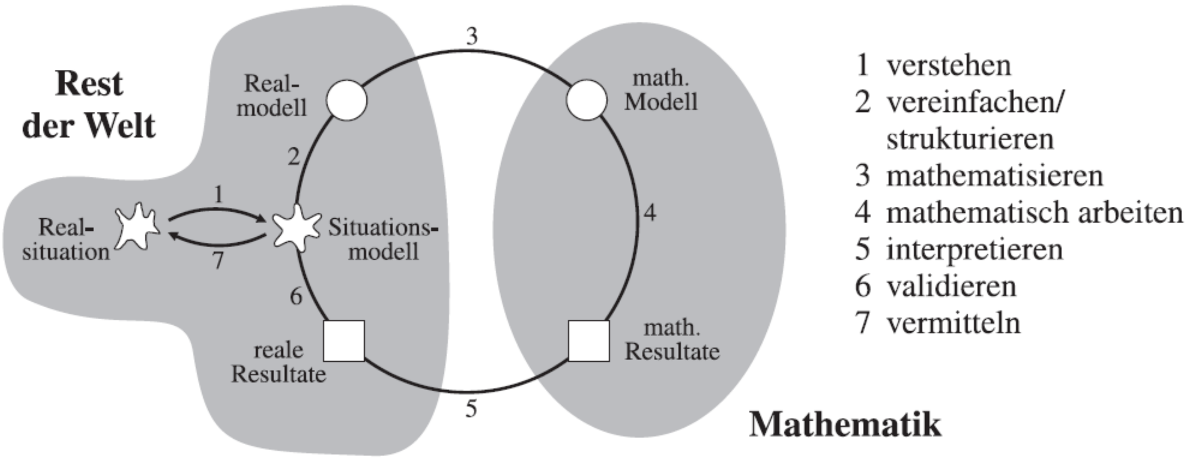



Abbildung 8:Siebenschrittiger Modellierungskreislauf (Blum2010)

Alle sieben Schritte des Modellierungskreislaufs werden im Weiteren am Beispiel der VERA-Aufgabe „Der Riese" (AB III, siehe Abbildung 9) exemplarisch konkretisiert. Dabei ist zu beachten, dass reale Bearbeitungsprozesse von Schülerinnen und Schülern nicht so klar an diesem Modellierungskreislauf orientiert sind.

**„Der Riese“**

In der Zeichnung ist ein Teil eines Kopfes zu sehen. Dieser Teil ist 3 m hoch.

Wie groß wäre ein Riese ungefähr, zu dem dieser Teil des Kopfes gehört?

........................ m

Schreibe deinen Lösungsweg auf.

Abbildung 9: VERA-Aufgabe „Der Riese“

- Verstehen: Die beschriebene Realsituation mit der gegebenen Abbildung ist im ersten Schritt zu verstehen. Hierzu muss der Aufgabentext sinnentnehmend gelesen und auf die Abbildung bezogen werden. Dabei wird zunächst ein mentales Modell der gegebenen Situation konstruiert. Dieses sogenannte Situationsmodell enthält in diesem Fall unterschiedliche und teilweise für die Lösung irrelevante Angaben.
- Vereinfachen / Strukturieren: Als nächstes müssen die wichtigen Angaben identifiziert und die Fragestellung präzisiert werden, wodurch sich ein so genanntes Realmodell ergibt. Dabei ist es hier wichtig zu erfassen, dass die abgebildete Figur den oberen Teil eines Kopfes ab der Nasenspitze darstellt und etwa 3 m hoch ist. Weiterhin muss geschätzt werden, welchem Anteil eines gesamten Körpers der dargestellte Teil des Kopfes entspricht. Die Schülerinnen und Schüler können z. B. abschätzen, wie oft der Zeichnung abgebildete Teil des Kopfes in einen Körper passt.
- Mathematisieren: In diesem Schritt müssen die zuvor gewonnenen Informationen und gemachten Annahmen in die Mathematik übertragen werden. Es kann beispielsweise eine Wertetabelle aufgestellt werden, in der bekannte Werte für die Größe eines halben Kopfes und die Körpergröße eingetragen werden:

| | | |
|---|---|---|
| Größe halber Kopf | 10 | 300 |
| Körpergröße | 150 | h |

- Alternativ lässt sich aus dem direkt geschätzten oder rechnerisch ermittelten Verhältnis 15 der beiden Größen ein Term für die gesuchte Größe h des Riesen aufstellen ( $h = 15 \cdot 3$ ).

- Mathematisch arbeiten: Bei diesem rein innermathematischen Teilschritt wird durch Anwendung geeigneter mathematischer Kenntnisse und Verfahren ein mathematisches Resultat erzeugt. Die anzuwendenden Lösungsverfahren können je nach aufgestelltem Modell verschiedener Art sein (z. B. systematisches Probieren, grafische Lösung, rechnerische Lösung oder rein inhaltliche Überlegungen). Zur Bewältigung dieses Teilschrittes ist hier insbesondere die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* erforderlich. Bei bestimmten Aufgaben können zusätzlich die Kompetenzen *Mathematisch argumentieren* und *Probleme mathematisch lösen* notwendig sein.
- Interpretieren: Die erhaltene mathematische Lösung (z. B. h = 4500) ist nun zurück auf die Realität zu übertragen und in dieser als reales Resultat zu deuten. Die Lösung h = 4500 bedeutet hier, dass der Riese eine Körpergröße von 4500 cm bzw. 45 m hat.
- Validieren: Das Resultat (45 m) ist nun anhand des Situationsmodells zu überprüfen: „Ist die Größenordnung plausibel?“, „Sind Genauigkeit und Einheit sinnvoll?“, „Ist die Ausgangsfrage damit beantwortet?“. Eine solche Validierung erfordert auch die kritische Reflexion des (rein) rechnerischen Ergebnisses. Führt eine solche Validierung zu einer Verwerfung des Resultats, ist der Modellierungskreislauf – beispielsweise mit veränderten Annahmen – erneut zu durchlaufen.
- Darlegen: Die in der Aufgabe geforderte Beratung verlangt abschließend die Darlegung der gewonnenen Erkenntnisse. Dazu wird bei dieser Aufgabe in besonderem Maße die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (nämlich einem externen Adressaten Überlegungen und Ergebnisse verständlich darzulegen) benötigt.

Da der siebenschrittige Modellierungskreislauf im Allgemeinen zu komplex ist, sollte im Unterricht als Orientierungshilfe für die Lernenden nur ein vereinfachter Kreislauf verwendet werden. In Abbildung 10 ist ein so genannter Lösungsplan dargestellt, der die sieben Schritte des obigen Kreislaufs auf vier Schritte verdichtet und somit dessen Komplexität wesentlich reduziert. Dabei entspricht der erste Schritt „Aufgabe verstehen“ auch Schritt 1 im siebenschrittigen Modellierungskreislauf, der zweite Schritt „Modell erstellen“ fasst die Schritte 2 und 3 zusammen, der dritte Schritt „Mathematik benutzen“ entspricht Schritt 4 und der vierte Schritt „Ergebnis erklären“ vereint die Schritte 5 bis 7 des siebenschrittigen Modellierungskreislaufs. Eine bewusste Auseinandersetzung mit einem für Lernende und Lehrende gut nutzbaren Lösungsplan kann eine erfolgreiche Bearbeitung von Modellierungsaufgaben unterstützen.

Lösungshilfen sind den Schülerinnen und Schülern bereits aus der Grundschule bekannt. Auf diesen grundlegenden Bausteinen des Lösungsprozesses einer Aufgabe aufbauend, kann zu Beginn der Sekundarstufe I der Lösungsplan als vereinfachte Version des Modellierungskreislaufs erarbeitet werden. Daran lassen sich auch die wesentlichen Bearbeitungsschritte und Merkmale von Modellierungsaufgaben verdeutlichen.

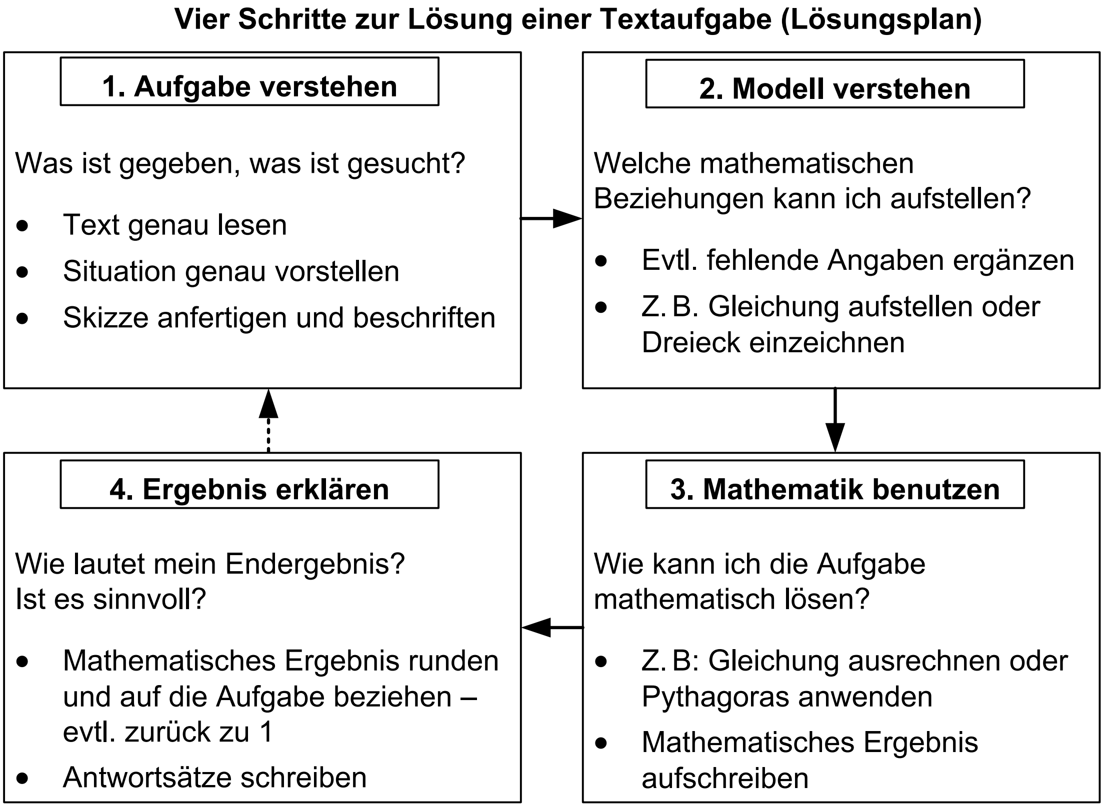



Abbildung 10: Lösungsplan (vgl. Blum 2010)

Für Schülerinnen und Schüler stellt jeder der zuvor beschriebenen Teilschritte des Modellierungskreislaufs eine potentielle kognitive Hürde beim Lösen von Modellierungsaufgaben dar. Auch die Antizipation solcher potentiellen kognitiven Hürden im Rahmen der Unterrichtsvorbereitung kann die vorbereitenden Arbeiten oft komplexer und zeitaufwändiger machen als dies beim Unterricht mit eher traditionellen, geschlossenen Aufgaben der Fall ist (vgl. Blum 1996). Ermutigend ist zu erwähnen, dass der auffordernde Charakter von offenen Modellierungsaufgaben oft zu einer intensiveren Auseinandersetzung der Lernenden mit diesen führt, und dass solche Aufgaben häufig vielfältige Möglichkeiten zur Binnendifferenzierung bieten. Anfängliche Schwierigkeiten bei der Behandlung von Modellierungsaufgaben reduzieren sich, wenn adäquate Hilfen – beispielsweise ein vereinfachter Modellierungskreislauf – zu ihrer Bearbeitung gegeben werden (vgl. Maaß 2007). Dabei ist das Bewusstmachen der einzelnen Teilschritte des Modellierens sowohl für Lernende als auch für Lehrende grundlegend.

In den Bildungsstandards Mathematik werden beim mathematischen Modellieren die drei verschiedenen *Anforderungsbereiche* wie folgt unterschieden (vgl. KMK 2004):

- Zum niedrigsten Anforderungsbereich „Reproduzieren" gehört das Nutzen vertrauter und direkt erkennbarer Modelle, das direkte Überführen einer Realsituation in die Mathematik sowie das Prüfen von Resultaten am Kontext.
- Der mittlere Anforderungsbereich „Zusammenhänge herstellen" umfasst das Durchführen von Modellierungen, die mehrere Schritte erfordern, das Interpretieren von Ergebnissen einer Modellierung sowie das Prüfen der Ergebnisse an der Ausgangssituation.
- Zum höchsten Anforderungsbereich „Verallgemeinern und Reflektieren" gehören das Modellieren von komplexen und unvertrauten Situationen sowie das Reflektieren und Beurteilen mathematischer Modelle wie etwa Formeln und Darstellungen.

Ein weiteres Beispiel für eine VERA-Aufgabe, die die Kompetenz *Mathematisch modellieren* besonders anspricht, ist die Aufgabe „Jeans mit Ermäßigung" (siehe Abbildung 11). Die

Schülerinnen und Schüler sollen hier berechnen, wie teuer eine Jeans, die nach einer Preisreduzierung um 20 % noch 48 € kostet, vor dieser Ermäßigung war. Die gegebenen Größen und ihre Beziehungen müssen (z. B. mit der Prozentformel) in ein geeignetes mathematisches Modell übertragen werden. Hierzu kann etwa zunächst darauf geschlossen werden, dass der neue Preis 80 % des ursprünglichen Preises beträgt. Anschließend lässt sich mit mathematischen Mitteln (z. B. Äquivalenzumformungen) eine Lösung ermitteln. Da es sich hier um eine mehrschrittige Modellierung handelt, wird die Aufgabe dem mittleren Anforderungsbereich (AB II) zugeordnet.

**„Jeans mit Ermäßigung“**

In einem Kaufhaus wird eine Jeans mit 20 % Ermäßigung angeboten. Der neue Preis beträgt nun 48,00 €. Wie teuer war die Jeans vorher?

Kreuze an.

☐ 38,40 € ☐ 48,20 € ☐ 57,60 € ☐ 60,00 € ☐ 68,00 €

Abbildung 11: VERA-Aufgabe „Jeans mit Ermäßigung“

Auch die VERA-Aufgabe „Mensch ärgere dich nicht“ (siehe Abbildung 12) spricht die Kompetenz *Mathematisch modellieren* an. Die Lernenden sollen hier berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei einmaligem Würfeln eine Sechs geworfen wird. Weil hier als naheliegendes Modell die Laplace-Wahrscheinlichkeit verwendet werden kann, wird die Aufgabe dem niedrigsten Anforderungsbereich (AB I) zugeordnet.

**„Mensch ärgere dich nicht“**

Beim Brettspiel „Mensch ärgere dich nicht“ muss ein Spieler mit einem Spielwürfel eine Sechs werfen, um eine Spielfigur auf den Startpunkt setzen zu dürfen.

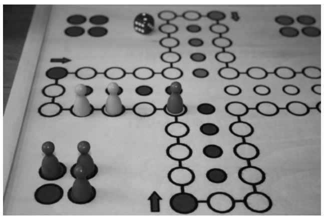


Abbildung 1

**Teilaufgabe 1**

Meistens muss ein Spieler mehrmals würfeln, bevor er starten kann.

Gib die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Spieler gleich beim ersten Würfeln eine Sechs hat.

..............................

Abbildung 12: VERA-Aufgabe „Mensch ärgere dich nicht“, Teilaufgabe 1

Die Aufgaben aus dem VERA-Test können ggf. angepasst und im Unterricht eingesetzt werden, um die prozessbezogene Kompetenz *Mathematisch modellieren* gezielt zu fördern. Darüber hinaus sollten im Unterricht aber auch offenere Aufgabenformate verwendet werden. Es bieten sich etwa Fermi-Aufgaben an, für deren Lösung mathematische Modelle aufgestellt werden müssen. Ein Beispiel dafür ist die an eine Werbung einer Firma, die Rasierapparate herstellt, angelehnte Aufgabe(siehe Abbildung 13).

Untersuche die folgende Behauptung aus der Werbung:
„Sie rasieren in 18 Monaten etwa so viel wie ein ganzes Fußballfeld".

Abbildung 13: Unterrichtsaufgabe „Rasierer-Werbung" (vgl. Laakmann 2005: 14)

Zu dieser Aufgabe können die Schülerinnen und Schüler dann weitere Fragen stellen, die helfen, das Problem zu lösen. Etwa:

- Wie oft rasiert sich der Lehrer?
- Wie groß ist ein Fußballfeld?
- Wie groß ist ein Bart?
- Wie lange dauert eine Rasur?
- Wird der ganze Bart rasiert?
- Wie viele Tage haben 18 Monate?

Weitere Anregungen findet man z. B. hier:

- Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 3 („Modellieren bildet"), 2005
- mathematik lehren, Heft 113 („Modellieren"), 2002
- Schriftenreihen „Materialien für einen realitätsbezogenen Unterricht" (Verlag Franzbecker) und „Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht" (Springer) der ISTRON-Gruppe

## 3.4 Die Kompetenz Mathematische Darstellungen verwenden

Darstellungen werden benötigt, um mathematische Objekte, die oft abstrakt sind, überhaupt fassbar und kommunizierbar zu machen.

Das Darstellen eines Sachverhaltes, das Operieren innerhalb bzw. mit einer Darstellung und das Interpretieren einer Darstellung sind drei Tätigkeiten, die nicht im gleichen Maße im Unterricht umgesetzt werden (vgl. Sträßer 2003 und Fischer & Malle 1995). Es überrascht nicht, dass das Operieren etwa zweieinhalbmal so oft vorkommt wie das Interpretieren bzw. das Darstellen selbst, hier also offenkundig eine gewisse Unausgewogenheit herrscht, während die drei genannten Tätigkeiten im Sinne der Bildungsstandards in ausgewogener Weise im Unterricht Berücksichtigung finden sollten.

Nach Bruner (et al. 1971) lassen sich drei Ebenen der Darstellung unterscheiden – die enaktive, die ikonische und die symbolische –, die alle drei gemäß dem Alter der Schülerinnen und Schüler beim Lernen anzusprechen sind und sich durch einen zunehmenden Abstraktionsgrad auszeichnen. Auf der enaktiven Ebene werden mathematische Inhalte handelnd dargestellt, auf der ikonischen Ebene werden sie bildlich wiedergegeben, und auf der symbolischen Ebene werden sie durch Sprache oder durch Symbole ausgedrückt. Der Wechsel der enaktiven, der ikonischen und der symbolischen Ebene kann genau in dieser Stufung ein zentraler Teil des Lernprozesses sein.

Allerdings unterscheidet sich diese Differenzierung in drei Ebenen der Darstellung davon, wie Darstellungen in den Bildungsstandards verwendet werden. Symbolische Darstellungen, wie beispielsweise ein Funktionsterm oder eine Formel, werden in den Bildungsstandards eher durch die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) erfasst. Wird hingegen eine Übersetzung zwischen einer symbolischen und einer nicht-symbolischen Darstellung vorgenommen, so gehört diese Tätigkeit in der Tat zur Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4).

Den Wechsel zwischen Darstellungen erfahren Schülerinnen und Schüler der achten Jahrgangsstufe besonders häufig im Kontext inhaltsbezogener Kompetenzen, die der

Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ (L4) angehören. Ein in dieser Jahrgangsstufe prominentes Beispiel sind Funktionen, bei denen sich Übersetzungen zwischen grafischen, tabellarischen, symbolischen und sprachlichen Darstellungen der Zusammenhänge unmittelbar anbieten. Abhängig von einer gewählten Darstellung sind Eigenschaften von Funktionen, Veränderungen von Funktionen sowie dazugehörige Zusammenhänge unterschiedlich gut erkennbar. Hußmann & Laakmann (2011) stellen für das Themengebiet „Lineare Funktionen“ in einer Übersicht dar, welche Tätigkeiten innerhalb einzelner Darstellungen bzw. beim Wechsel zwischen diesen auszuführen sind (vgl. Tabelle 1). Siller & Fuchs (2009) benennen mit dem Übersetzen alltagssprachlicher Formulierungen in mathematische Darstellungen noch eine weitere charakteristische Tätigkeit für das Umgehen mit Darstellungen.

| **Wechsel von/nach** | **verbal** | **grafisch** | **tabellarisch** | **symbolisch** |
|---|---|---|---|---|
| **verbal** | Umformulieren | anhand von Punkten und/oder der Steigung einen Graphen skizzieren | Werte finden | Steigung und *y*-Achsenabschnitt entnehmen oder algebraisch ermitteln |
| **grafisch** | Interpretieren | Verschieben oder Drehen | Punkte systematisch ablesen und in eine Tabelle eintragen | *y*-Achsenabschnitt und Steigung oder zwei Punkte ablesen, dann einen Funktionsterm aufstellen |
| **tabellarisch** | Zahlenwerte hinsichtlich charakteristischer Eigenschaften interpretieren | zwei Punkte einzeichnen und eine Gerade hindurchlegen | weitere Tabellenzeilen erzeugen (mithilfe von Differenzen- oder Quotientengleichheit) | aus Punkten die Steigung *m* ermitteln oder an Einer-Schritten ablesen; *y*-Achsenabschnitt ermitteln oder anhand des Funktionswertes zu $x = 0$ ablesen |
| **symbolisch** | Bedeutung der Steigung *m* und des *y*-Achsenabschnitts interpretieren | Kenngrößen als *y*-Achsenabschnitt und Steigung einzeichnen, dann die Gerade zeichnen | Wertepaare systematisch berechnen | Terme umformen |

Tabelle 1: Tätigkeiten beim Wechseln zwischen Darstellungsarten zu linearen Funktionen (Hußmann & Laakmann 2011: 7).

Der bewusste Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen kann Einsichten vertiefen und das flexible Umgehen mit einem Inhalt fördern. Aber nicht erst beim Wechsel zwischen Darstellungen, sondern schon zu einem früheren Zeitpunkt, nämlich bei der (bewussten) Wahl einer Darstellung, stellt sich immer auch die Frage, welche Darstellung wofür „geeignet“ ist. Auf den Aspekt der Eignung einer Darstellung wird auch in der Beschreibung der Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* in den Bildungsstandards Bezug genommen, hier insbesondere vom Zweck, den eine Darstellung erfüllen soll.

Nicht jede Darstellung ist jedoch eine *mathematische* Darstellung im eben besprochenen Sinne. Von mathematischen Darstellungen abzugrenzen sind insbesondere jene, die lediglich illustrierende Funktion haben (siehe z.B. die Grafik zur Aufgabe „Mensch ärgere dich nicht“ in Abbildung 12), und auch solche, aus denen nur lesend Informationen zu entnehmen sind, etwa wenn ein Schild abgebildet ist, von dem Größenangaben abgelesen werden müssen.

Zur Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* gehören „sowohl das Auswählen oder Erzeugen" mathematischer Darstellungen als auch das Umgehen mit gegebenen Darstellungen. Hierzu zählen Diagramme, Graphen und Tabellen ebenso wie Formeln. Das Spektrum reicht von Standarddarstellungen wie Wertetabellen bis zur zweckgerichteten

Erzeugung oder Beurteilung neuartiger Darstellungen, etwa Graphen, in denen zwei Größen wie Geschwindigkeit und Höhe gleichzeitig in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt sind.

In den Bildungsstandards Mathematik werden beim Verwenden mathematischer Darstellungen die drei verschiedenen *Anforderungsbereiche* wie folgt unterschieden (vgl. KMK 2004):

- Zum niedrigsten Anforderungsbereich „Reproduzieren“ gehört das Anfertigen und Nutzen vertrauter und geübter Darstellungen von mathematischen Objekten und Situationen.
- Der mittlere Anforderungsbereich „Zusammenhänge herstellen“ umfasst das Erkennen von Beziehungen zwischen Darstellungsformen sowie das Wechseln zwischen den Darstellungsformen.
- Zum höchsten Anforderungsbereich „Verallgemeinern und Reflektieren“ gehören das Entwickeln eigener Darstellungen, das zweckentsprechende Beurteilen verschiedener Formen von Darstellungen sowie das Lesen und Beurteilen nicht vertrauter Darstellungen.

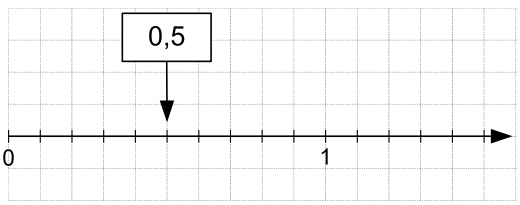
Ein Beispiel für eine VERA-Aufgabe, die die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* besonders anspricht, ist die Aufgabe „Zahlenstrahl“ (Abbildung 14). Die Lernenden sollen hier eine auf einem Zahlenstrahl markierte Zahl ablesen und eine gegebene Zahl markieren. Da es sich bei dem Zahlenstrahl um eine für die Schülerinnen und Schüler vertraute und geübte Darstellung handelt, wird sie dem niedrigsten Anforderungsbereich (AB I) zugeordnet.

**„Zahlenstrahl“**

**Teilaufgabe 1**

Auf welche Zahl zeigt der Pfeil?

Schreibe die Zahl in das Kästchen.




**Teilaufgabe 2**

Markiere die Zahl $\frac{1}{5}$ mit einem Pfeil auf dem gegebenen Zahlenstrahl.

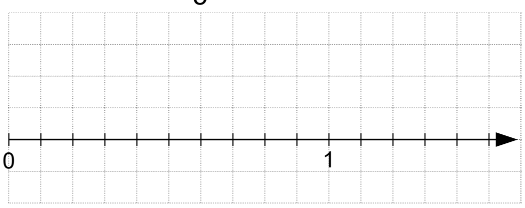



Abbildung 14: VERA-Aufgabe „Zahlenstrahl“, Teilaufgaben 1 und 2

Die Aufgabe „Reiseverlauf“ spricht ebenfalls besonders die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* an. Die Schülerinnen und Schüler sollen hier die Wahrheitsgehalte einiger sprachlicher Aussagen über zwei als Funktionsgraphen dargestellte Reiseverläufe zweier Fahrzeuge beurteilen. Da hierzu Übersetzungen zwischen sprachlicher und grafischer

Darstellungsform notwendig sind, wird die Aufgabe dem mittleren Anforderungsbereich (AB II) zugeordnet.

**„Reiseverlauf“**

**Teilaufgabe 1**

Das Diagramm (siehe Abbildung 1) zeigt vereinfacht den Reiseverlauf von zwei Fahrzeugen A und B.

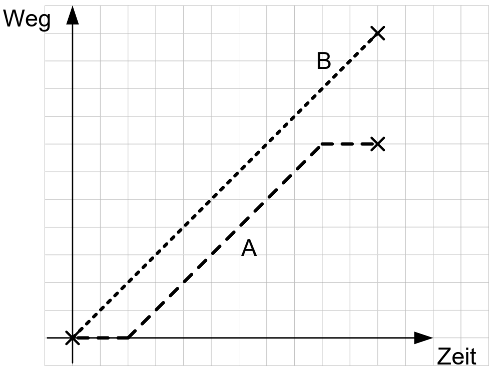



Abbildung 1

Welche Aussagen passen zu dem Diagramm?

Kreuze jeweils an.

| | trifft zu | trifft nicht zu |
|---|---|---|
| Während A fährt, haben A und B die gleiche Geschwindigkeit. | ☐ | ☐ |
| A fährt früher los als B. | ☐ | ☐ |
| Der Weg, den B fährt, ist kürzer als der Weg von A. | ☐ | ☐ |

Abbildung 15: VERA-Aufgabe „Reiseverlauf“, Teilaufgabe 1

Im Unterricht können die Aufgaben aus dem VERA-Test verwendet werden, um die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* gezielt zu fördern. Darüber hinaus können und sollten aber auch offenere Aufgabenformate verwendet werden, bei deren Bearbeitung die Schülerinnen und Schüler selbst verschiedene Darstellungsformen auswählen und diskutieren können. Ein Beispiel hierfür ist das „Schulweg-Problem“ (siehe Abbildung 16).

Lukas benötigt für den Schulweg 30 Minuten. Seine Schwester Birte braucht für denselben Weg 40 Minuten. Wann überholt Lukas seine Schwester, wenn er 5 Minuten später als sie zu Hause losgeht?

Abbildung 16: Unterrichtsaufgabe „Schulweg-Problem“ (Hußmann & Laakmann 2011: 8)

Die Lernenden können zwischen verschiedenen Darstellungsformen wählen, um dieses Problem zu bearbeiten. Zunächst bietet es sich an, die gegebene sprachliche Situationsbeschreibung in eine tabellarische (siehe Abbildung 17) oder grafische (siehe Abbildung 18) Darstellungsform zu übersetzen und diese anschließend ggf. in eine symbolische Darstellung in Form eines Funktionsterms zu überführen. Schwierigkeiten könnte den Lernenden bereiten, dass die Länge des Schulwegs nicht gegeben ist und daher nur mit dem relativen Schulweg gearbeitet werden kann (vgl. Hußmann & Laakmann 2011: 8). Alternativ kann daher auch eine beliebige, aber feste Schulweglänge vorgegeben werden oder man lässt die Lernenden mit verschiedenen Werten arbeiten und die Ergebnisse anschließend vergleichen.

Anhand des Schulweg-Problems lassen sich die Stärken und Schwächen verschiedener Darstellungsformen sinnvoll diskutieren: In der graphischen Darstellungsform kann z. B. nur eine ungefähre Lösung abgelesen werden und der Aufwand für die Entwicklung eines Funktionsterms ist hier für die Schülerinnen und Schüler wohl unangemessen hoch. Darüber hinaus lassen sich hier verschiedene Wechsel zwischen Darstellungsformen durchführen und die Auswirkungen von Annahmen wie gleichbleibender Geschwindigkeit auf verschiedene Darstellungsformen diskutieren. (vgl. auch Hußmann & Laakmann 2011:8)

| Min | Birte | Lukas |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1/8 | 0 |
| 10 | 2/8 | 1/6 |
| 15 | 3/8 | 2/6 |
| 20 | 4/8 | 3/6 |
| 25 | 5/8 | 4/6 |
| 30 | 6/8 | 5/6 |
| 35 | 7/8 | 6/6 |
| 40 | 8/8 | 0 |

Abbildung 17: Tabellarische Lösung des Schulweg-Problems (vgl. Hußmann & Laakmann 2011: 8)

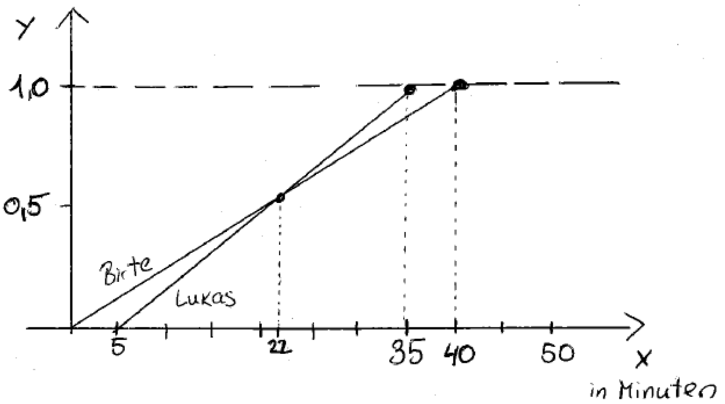



Abbildung 18: Graphische Lösung des Schulweg-Problems (vgl. Hußmann & Laakmann 2011: 8)

Weitere Anregungen findet man z. B. in Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 38 („Eine Funktion – viele Gesichter. Darstellen und Darstellungen wechseln“), 2011.

## 3.5 Die Kompetenz Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Zu der Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* gehören das Ausführen von Operationen mit Zahlen, Größen, Variablen, Termen oder geometrischen Objekten, aber auch deren Auswahl und die Reflexion ihrer Eignung sowie die Nutzung begrifflichen Wissens hinter den Verfahren, um sie bei Bedarf anzupassen. Das Spektrum reicht von einfachen und überschaubaren Routineverfahren bis zu komplexen Verfahren. Zudem kann man das Beherrschen mathematischer Fakten auch zu dieser Kompetenz zählen.

Die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* wird als solche häufig implizit in der didaktischen Literatur diskutiert. Man findet Klagen und Belege über eine an Kalkülen und der Schulung von Fertigkeiten orientierte Aufgabenkultur in der Sekundarstufe I (u. a. Blum 2001; Hefendehl-Hebeker 2004; Kunter et al. 2006; Neubrand 2002). Im Wesentlichen werden die folgenden möglichen Ursachen für diese kalkülgeprägte Aufgabenkultur diskutiert:

Als eine mögliche Ursache wird die für das Fach Mathematik charakteristische stete Suche „nach Verallgemeinerung und begrifflicher Fundierung und in der Folge nach Effektivierung der gebildeten Begriffe und Verfahren“ genannt (BLK 1997: 38). Diese kann, wenn optimale Lösungsverfahren einmal vorliegen, zu einer Beschränkung auf Rechenverfahren führen, sodass in der Folge das Formale (die Syntax) das Inhaltliche (die Semantik) überlagert und von diesem abgespalten wird (z. B. Malle 1993). Ein solches Vorgehen steht im Widerspruch zur eigentlichen Qualität von Formalisierungen (Sjuts 2007), die das mehrfache Ausführen gleicher Routinen entlasten sollen, indem beispielsweise Terme als „ökonomische Darstellungsmittel für allgemeine Zusammenhänge“ (Fischer et al. 2010: 2) genutzt werden.

Als weitere mögliche Ursache wird eine vordergründige Leistungs- und Erfolgsorientierung diskutiert, da sich die Beherrschung von Verfahren und Algorithmen „ja so schön leicht abtesten [lässt]“ (Winter 1975: 114; vgl. auch Hefendehl-Hebeker 2004). Dass technische Verfahren tatsächlich einen sehr großen Anteil an den kognitiven Aktivitäten bei der Bearbeitung von Klassenarbeitsaufgaben haben, zeigen auch die Untersuchungen von Drüke-Noe (2014). Es zeigt sich sogar, dass das technische Arbeiten im Allgemeinen die einzige Kompetenz ist, die den kognitiven Anspruch von Klassenarbeiten kennzeichnet.

Gerade bei Aufgaben aus der Algebra besteht die Gefahr des vorwiegend syntaktischen Umgehens mit diesen (Schupp 2002). Werden jedoch beim Umgehen mit den die Aufgabenkultur vielfach dominierenden Verfahren und Kalkülen semantische Aspekte verstärkt gegenüber den syntaktischen betont, so kann Wissen flexibler angewendet und das Ausführen von Problemlöse- und Modellierungsprozessen gefördert werden (u. a. Hefendehl-Hebeker 2004). So leistet ein Unterricht, in dem syntaktische und semantische Aspekte des Umgehens mit Verfahren ausgewogen berücksichtigt werden, einen wesentlichen Beitrag zur adäquaten Entwicklung der Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen*. Zudem werden die drei in den Bildungsstandards formulierten Winterschen Grunderfahrungen– Anwendungs-, Struktur- und Problemorientierung – ausgewogener berücksichtigt, was auch dazu beiträgt, dass die Schülerinnen und Schüler ein angemessenes Bild von Mathematik entwickeln können.

In den Bildungsstandards Mathematik werden für die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* die drei verschiedenen *Anforderungsbereiche* wie folgt unterschieden (vgl. KMK 2004):

- Zum niedrigsten Anforderungsbereich „Reproduzieren“ gehören das Verwenden von Routineverfahren, das Umgehen mit vertrauten Formeln und Symbolen sowie die Nutzung von digitalen Mathematikwerkzeugen in geübten Situationen.
- Der mittlere Anforderungsbereich „Zusammenhänge herstellen“ umfasst das Ausführen von Lösungs- und Kontrollverfahren, das Übersetzen von symbolischer Sprache in Alltagssprache, das Arbeiten mit Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Tabellen und Diagrammen sowie das verständige Auswählen und Nutzen digitaler Mathematikwerkzeuge.
- Zum höchsten Anforderungsbereich „Verallgemeinern und Reflektieren“ gehören das Bewerten der Effizienz von Lösungs- und Kontrollverfahren und das Reflektieren der Möglichkeiten und Grenzen der Nutzung digitaler Mathematikwerkzeuge.

Die VERA-Aufgabe „Gleichung verändern“ (siehe Abbildung 19) spricht besonders die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen, und technischen Elementen der Mathematik umgehen* an. Die Lernenden sollen hier in der ersten Teilaufgabe eine lineare Gleichung lösen und in der zweiten Teilaufgabe die gegebene Gleichung so verändern, dass sie eine bestimmte Lösung hat. Um die erste Teilaufgabe korrekt zu lösen, müssen die Lernenden einfache Äquivalenzumformungen durchführen, d. h. es werden nur kalkülorientierte Fertigkeiten angesprochen. Sie wird daher dem niedrigsten Anforderungsbereich (AB I) zugeordnet. In der zweiten Teilaufgabe müssen dagegen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Bestandteilen der linearen Gleichung und deren Lösung hergestellt werden. Da die Lernenden hier kein einfaches Routineverfahren anwenden können, gehört die Aufgabe zum mittleren Anforderungsbereich (AB II).

**„Gleichung verändern“**

Gegeben ist die Gleichung $2 \cdot x + 4 = 14$.

**Teilaufgabe 1**

Welche Lösung hat die Gleichung?

Kreuze an.

☐ 3 ☐ 5 ☐ 7 ☐ 10 ☐ 12

**Teilaufgabe 2**

Verändere in der Gleichung genau eine der drei Zahlen 2, 4 oder 14 so, dass die veränderte Gleichung die Lösung $x = 9$ hat.

Gib eine passende neue Gleichung an.

.....................................................................

Abbildung 19: VERA-Aufgabe „Gleichung verändern“

Auch die Aufgaben aus dem VERA-Test können später im Unterricht eingesetzt werden, um gezielt die prozessbezogene Kompetenz *Mit symbolischen, formalen, und technischen Elementen der Mathematik umgehen* zu fördern. Im Unterricht sollte besonders darauf geachtet werden, dass insbesondere die Ausbildung solcher Routinen unterstützt wird, „die das Erkennen von Zusammenhängen und Strukturen erleichtern und das Betreiben von Mathematik, insbesondere das Übersetzen zwischen Realität und Mathematik, ‚werkzeughaft‘ unterstützen können.“ (Leiß & Blum 2012: 47)

Die Aufgabe „Quadratische Terme“ (Abbildung 20) weist im Vergleich zu den VERA-Aufgaben einen höheren Grad an Offenheit auf und regt zum selbstständigen Entdecken an.

**„Quadratische Terme“**

Multipliziert man lineare Terme, so erzeugt man quadratische Terme, z. B.:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x + 3 \\ g(x) = x - 2 \end{array}\right\} \quad h(x) = (x-2)\cdot(x+3) = x^2 + x - 6$$

a) Untersuche die drei Funktionen *f(x)*, *g(x)*und *h(x)*, indem du sie grafisch darstellst (z. B. mit einem Funktionenplotter, einem grafischen Taschenrechner, einem CAS oder einer Tabellenkalkulation.

b) Welche Zusammenhänge zwischen den Graphen kannst du entdecken? Beschreibe deine Beobachtungen und überprüfe deine Ergebnisse an weiteren Beispielen dieser Art.

c) Verwende deine Erkenntnisse, um folgende Aufgabe zu lösen:
Kreuze jeweils an, ob die in der Tabelle gegebenen quadratischen Terme sich als Produkt von zwei linearen Termen $f(x) = x + a$ und $g(x) = x - b$ mit ganzzahligen a, b schreiben lassen.

| | **Term** | **Antwort** | |
|---|---|---|---|
| c1) | $x^2 + 2x$ | ja O | nein O |
| c2) | $4 - x^2$ | ja O | nein O |
| c3) | $2x^2 + 4x + 2$ | ja O | nein O |
| c4) | $x^2 + 2x + 1$ | ja O | nein O |
| c5) | $x^2 + x + 1$ | ja O | nein O |
| c6) | $x^2 - 6x - 8$ | ja O | nein O |

d) Unter welchen Voraussetzungen ist es möglich, einen quadratischen Term als Produkt von zwei linearen Termen $f(x) = x + a$ und $g(x) = x - b$ zu schreiben? Begründe deine Antwort.

Abbildung 20: Unterrichtsaufgabe „Quadratische Terme“ (Leuders 2012: 89)

In den ersten beiden Teilaufgaben können die Lernenden verschiedene Rechentechniken und digitale Werkzeuge nutzen, um die Darstellbarkeit quadratischer Funktionen als Produkte von Linearfaktoren zu erkunden. Hierzu sollen sie insbesondere auch selbst gewählte Beispiele untersuchen, um die eigenen Vermutungen zu überprüfen. In der dritten Teilaufgabe sollen die eigenen Erkenntnisse schließlich auf einige vorgegebene Beispiele angewendet werden, bevor in der letzten Teilaufgabe eine allgemeine Regel zu formulieren ist.

Die einzelnen Teilaufgaben sprechen verschiedene Anforderungsbereiche an und fördern neben dem technischen Arbeiten auch weitere Kompetenzen (insbesondere *Mathematisch argumentieren*, *Probleme mathematisch lösen* und *Mathematische Darstellungen verwenden*). Die Lernenden können hier auf Routineverfahren (z. B. Funktionsgraphen zeichnen, Ausmultiplizieren) und vertraute Formeln und Symbole (z. B. quadratische Funktionen) zurückgreifen, müssen aber auch Zusammenhänge zwischen verschiedenen Darstellungsformen herstellen und über die Anwendung geeigneter Werkzeuge und Rechentechniken selbst entscheiden. Weiterhin bietet die Aufgabenstellung Gelegenheiten zur selbstständigen Erprobung und Reflexion verschiedener Rechenverfahren und Mathematikwerkzeuge.

## 3.6 Die Kompetenz Mathematisch kommunizieren

Zum mathematischen Kommunizieren gehört sowohl das Entnehmen von Informationen aus schriftlichen Texten, mündlichen Äußerungen oder sonstigen Quellen als auch das Darlegen von Überlegungen und Resultaten unter Verwendung einer angemessenen Fachsprache. Im Unterricht sind Quellen schriftlicher Texte u. a. das Schulbuch, Hefte, Folien, der Computer oder die Tafel. Es gehören aber auch Texte dazu, die die Schülerinnen und Schüler selbst verfassen. Unabhängig davon, ob mathematische Sprache in schriftlicher oder in mündlicher Form vorliegt, können mit dem produktiven („aktiven“) und dem rezeptiven („passiven“) Aspekt zwei Richtungen des Kommunizierens unterschieden werden. „Zum einen müssen Aufgabenstellungen sprachlich verstanden werden, bevor mathematische Tätigkeiten ausgeführt werden können. Zum anderen sind Gedanken, Lösungswege oder Begründungen möglichst prägnant und für andere nachvollziehbar mündlich oder schriftlich darzulegen.“ (Drüke-Noe 2009: 52f). Diese Darlegungen können je nach Entwicklungsstand noch eher umgangssprachlich oder schon stärker fachsprachlich geprägt sein.

Die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* steht in engem Zusammenhang mit den anderen in den Bildungsstandards Mathematik benannten Kompetenzen, insbesondere mit den Kompetenzen *Probleme mathematisch lösen* und *Mathematisch modellieren*. Kommunizieren spielt aber auch außerhalb des Unterrichts eine Rolle, wenn z. B. ein geometrisches Objekt oder eine Lösungsprozedur beschrieben werden. Beim Bearbeiten von Problemlöse- und von Modellierungsaufgaben müssen Schülerinnen und Schüler in aller Regel Übersetzungsprozesse zwischen sprachlich oder bildlich dargelegten inner- bzw. außermathematischen Kontexten und der Mathematik leisten oder auch nach einem solchen Übersetzungsprozess dessen Ablauf sprachlich darlegen. Oft beginnt ein Problemlöse- bzw. Modellierungsprozess mit dem Lesen eines in schriftlicher Form gegebenen inner- oder außermathematischen Kontextes. Erst dann kann das eigentliche Problemlösen bzw. Modellieren beginnen. Blum und Leiß (2005) identifizieren beim Modellieren mehrere substantielle kognitive Teilprozesse, bei denen auch Sprache eine entscheidende Rolle spielt. Im Hinblick auf das Kommunizieren ist insbesondere der erste Schritt des Modellierens entscheidend. Falls von einer Beschreibung der Realsituation in Textform ausgegangen wird, muss diese zunächst verstanden werden, um darauf aufbauend ein Situationsmodell bilden zu können. Hierfür ist der sichere Umgang mit dem rezeptiven Aspekt des Kommunizierens eine notwendige, wenn auch nicht hinreichende Voraussetzung. Ein idealtypischer Problemlöse- oder Modellierungsprozess schließt dann oft mit dem produktiven Aspekt des Kommunizierens ab. Meist wird als Abschluss einer Aufgabenbearbeitung gefordert, Überlegungen oder Vorgehensweisen verständlich darzulegen. Auch das Verschriftlichen mathematischer Lernprozesse und Resultate ist für den Aufbau einer tiefer reichenden Fachkompetenz unter dem Anspruch von Allgemeinbildung wichtig (Schupp 2002: 22). Das Darstellen eigener Wege und Resultate fördert dann wiederum auch das verstehende Lesen von Textaufgaben.

Eine sorgfältige Abgrenzung der Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* gegenüber der Kompetenz *Mathematisch argumentieren* gelingt für konkrete Aufgabenbeispiele nicht immer ohne Schwierigkeiten. Während beim mathematischen Argumentieren die Einhaltung logischer Strenge (bei unterschiedlichem Grad der Formalisierung) die Tätigkeiten prägt, hat Kommunizieren zum wesentlichen Ziel, dass Verständnis bei einem (ggf. fiktiven) Gegenüber erreicht wird.

Insgesamt wird deutlich, dass in einem kompetenzorientierten Unterricht, der die gemeinsame Vermittlung inhalts- und prozessbezogener Kompetenzen zum Ziel hat, auch das *Mathematische Kommunizieren* eine wesentliche Rolle spielt.

In den Bildungsstandards Mathematik werden für die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* die drei verschiedenen *Anforderungsbereiche* wie folgt unterschieden (vgl. KMK 2004):

- Zum niedrigsten Anforderungsbereich „Reproduzieren“ gehört das Ausdrücken einfacher mathematischer Sachverhalte, das Entnehmen von Informationen aus kurzen, einfachen Texten und Abbildungen sowie das sachlich angemessene Reagieren auf Fragen und Kritik.
- Der mittlere Anforderungsbereich „Zusammenhänge herstellen“ umfasst das verständliche Darstellen von Lösungswegen, das sinnentnehmende Erfassen von Informationen aus komplexen mathematikhaltigen Texten und Abbildungen, das Verwenden der Fachsprache und das Eingehen auf Äußerungen von anderen.
- Zum höchsten Anforderungsbereich „Verallgemeinern und Reflektieren“ gehören das Präsentieren komplexer mathematischer Sachverhalte, das sinnentnehmende Erfassen von Informationen aus komplexen mathematischen Texten sowie das Bewerten von Äußerungen zu mathematischen Inhalten.

Eine VERA-Aufgabe, bei deren Bearbeitung die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* besonders angesprochen wird, ist die Aufgabe „Räumungsverkauf“ (siehe Abbildung 21). Die Lernenden sollen hier den neuen Preis einer Jeans nach einer Preisreduzierung um einen bestimmten Prozentsatz berechnen. Die Aufgabe wird dem niedrigsten Anforderungsbereich (AB I) zugeordnet, weil einige Informationen aus einem kurzen, einfachen Text und einer übersichtlichen Abbildung entnommen werden sollen. Darüber hinaus müssen die Lernenden ihren Lösungsweg zu dieser einfachen Routineaufgabe aus der Prozentrechnung angeben.

**„Räumungsverkauf“**

Häufig wird ein Räumungsverkauf durchgeführt, wenn ein Geschäft umgebaut oder geschlossen wird. Dabei werden Waren billig angeboten und ihre Preise oft sogar mehrfach reduziert.

Abbildung 1

**Teilaufgabe 1**

Der Preis der Jeans wird reduziert (siehe Abbildung 2).

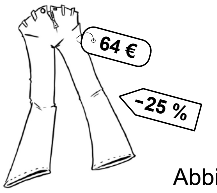


Abbildung 2

Tina hat 50 €. Kann sie sich davon diese Jeans kaufen?

Kreuze an.

☐ Ja ☐ Nein

Gib deinen Lösungsweg an.

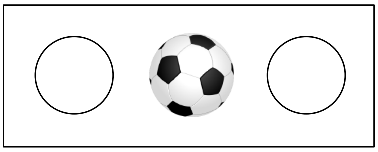
Abbildung 21: VERA-Aufgabe „Räumungsverkauf“, Teilaufgabe 1

Die VERA-Aufgabe „Rubbellose“ (siehe Abbildung 22) spricht insbesondere die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren*, aber auch die Kompetenz *Mathematisch modellieren* an. Um eine Standardmodellierung mit Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung durchführen zu können, müssen die Lernenden hier zunächst aus einem komplexeren Text relevante Informationen entnehmen. Die Aufgabe wird daher dem mittleren Anforderungsbereich (AB II) zugeordnet.

## „Rubbellose“

Eine Bäckerei führt zur Fußball-EM eine Verlosung durch. Während der 25 Spieltage bekommt jeder Kunde beim Einkauf ein Los mit drei Rubbelfeldern.

Nach dem Freirubbeln sieht man auf jedem Feld entweder ein Fußballbild oder einen freien Kreis.



Es gilt folgender Gewinnplan:

| Rubbelfelder | Gewinn |
|---|---|
| 3 Fußballbilder | ein echter Fußball |
| 2 Fußballbilder, 1 freier Kreis | eine Autofahne |
| 1 Fußballbild, 2 freie Kreise | ein Fußballbrötchen |
| 3 freie Kreise | Niete |

Die Bäckerei lässt 7500 Lose drucken. 25 davon haben 3 Fußballbilder.

### Teilaufgabe 1

Der erste Kunde bekommt ein Los.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er einen echten Fußball?

Kreuze an.

☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{3}{25}$ ☐ $\frac{1}{25}$ ☐ $\frac{1}{300}$ ☐ $\frac{1}{7500}$

Abbildung 22: VERA-Aufgabe „Rubbellose“, Teilaufgabe 1

Die VERA-Aufgabe „Parfum“ (siehe Abbildung 23) spricht ebenfalls unter anderem die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* an, denn die Schülerinnen und Schüler sollen hier vor allem auch den eigenen Lösungsweg verständlich darlegen. In einem kurzen Informationstext wird erläutert, dass ein Pumpzerstäuber je Pumpstoß durchschnittlich 0,2 ml Parfum verteilt. Die Lernenden sollen nun berechnen, wie lange eine Parfumflasche mit 100 ml Inhalt etwa ausreicht. Es handelt sich hierbei um ein Modellierungsproblem. Bei der Lösung der Aufgabe wird aber auch die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* auf mittlerem Anforderungsniveau (AB II) angesprochen, weil der Lösungsweg notiert werden soll.

**„Parfum“**

Parfums werden meist in edlen Glasflaschen (siehe Abbildung 1) verkauft. Ein Pumpzerstäuber auf diesen Flaschen verteilt das Parfum in winzig kleine Tröpfchen (siehe Abbildung 2). Dabei werden mit jedem Pumpstoß durchschnittlich 0,2 ml Parfum verteilt.

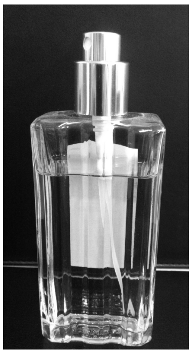


Abbildung 1

Abbildung 2

**Teilaufgabe 2**

Sandra kauft eine Parfumflasche mit 100 ml Inhalt.

Gib an, wie lange diese Flasche wohl reicht, wenn Sandra täglich mehrere Pumpstöße Parfum verwendet.

.................... Tage

Notiere deinen Lösungsweg.

Abbildung 23: VERA-Aufgabe „Parfum“, Teilaufgabe 2

Neben den Aufgaben aus dem VERA-Test können im Unterricht auch offenere Aufgaben eingesetzt werden, um die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* gezielt zu fördern. Neben solchen Aufgaben, in denen Informationen aus Texten oder Abbildungen zu entnehmen sind oder eigene Lösungswege schriftlich dargelegt werden müssen, sind hierzu insbesondere auch Aufgaben, Sozialformen und Unterrichtsmethoden geeignet, die Kommunikationsprozesse zwischen Lernenden anregen.

Auch Aufgaben, die das Erklären eines Lösungsweges oder das Finden und Erläutern eines Fehlers in einer gegebenen Lösung zum Ziel haben, sind geeignet, die Kompetenz des Kommunizierens zu fördern.

Die Fähigkeiten zum Erstellen mathematikhaltiger Texte lassen sich durch verschiedene Unterrichtsmethoden fördern, von denen hier nur einige beispielhaft genannt seien (s. Barzel, Büchter, Leuders 2011):

- Lerntagebuch
- Schreibgespräch
- Placemat („Platzdeckchen“)
- Aufgabenkartei
- Spickzettel
- Mathematisches Lexikon bzw. Wiki
- Expertengutachten

Die Aufgabe „Welcher Mobilfunktarif ist der beste?“ (siehe Abbildung 25) kann etwa als Expertengutachten inszeniert werden, um die Lernenden zur Produktion eigener mathematikhaltiger Texte anzuregen.

**Welcher Mobilfunk-Tarif ist der beste?**

Ina sucht einen neuen Mobilfunk-Tarif. In den vergangenen sechs Monaten hat sie durchschnittlich ca. 250 Minuten telefoniert, ca. 350 Megabyte Datenvolumen verbraucht und ca. 30 SMS verschickt. Dabei gab es deutliche Schwankungen, im Sommerurlaub hat sie z. B. fast gar nicht telefoniert.

Ihr sollt Ina nun dabei unterstützen und beraten, unter den vorliegenden Angeboten das beste für sie herauszusuchen. Euer Beratungsergebnis sollt ihr auf einem Plakat darstellen. In der großen Gruppe stellt ihr dann Eure Ergebnisse vor und begründet, warum ihr euch für ein Angebot entschieden habt.

Abbildung 24: Unterrichtsaufgabe „Welcher Mobilfunk-Tarif ist der beste?“ (Autorenteam)

Weitere Anregungen findet man z. B. hier:

- Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 46 („Mit Sprache muss man rechnen – Leseförderung“), 2012
- Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 45 („Ausgesprochen Mathe – Sprachen fördern“), 2012
- Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 24 („Sprichst du Mathe? Kommunizieren in und mit Mathematik“), 2008
- mathematik lehren, Heft 156 („Mathematische Sprache entwickeln“), 2009
- mathematik lehren, Heft 99 („Mathematik und Sprache“), 2000

# 4. Fazit

Das Programm VERA kann nicht nur zur Feststellung von Leistungsständen, sondern auch als Anregung zur unterrichtlichen Förderung von Kompetenzen dienen. Dabei sei betont, dass nicht die Aufgaben per se bei den Schülerinnen und Schüler zur Ausformung, Festigung und Weiterentwicklung der zu ihrer Lösung benötigten Kompetenzen führen, sondern nur eine den Schülerfähigkeiten angepasste Auswahl von Aufgaben und deren adäquate Behandlung im Unterricht. Die Lernenden müssen – so sagen alle empirischen Untersuchungen – ausreichend viele Gelegenheiten haben, die entsprechenden kompetenzbezogenen Tätigkeiten (wie Argumentieren oder Modellieren) selbst zu vollziehen, mehr noch, über diese Tätigkeiten zu reflektieren, Lösungswege zu begründen, verschiedene Wege zu vergleichen, Ergebnisse kritisch zu diskutieren und vieles andere mehr. Die Ergebnisse von nationalen und internationalen Leistungsvergleichen weisen darauf hin, dass im Mathematikunterricht noch bewusster und noch konsequenter als bislang die umfassende Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler im Mittelpunkt der Arbeit stehen sollte. In einem so verstandenen Mathematikunterricht achtet die Lehrkraft noch mehr als bisher auf die individuellen Kompetenzstände der Schülerinnen und Schüler und macht Aufgabenangebote für verschiedene Leistungsniveaus. Viele weitere Vorschläge für kompetenzorientiertes Unterrichten sind enthalten z. B. in Bruder et al. (2008) oder in Blum et al. (2006).

Es gibt sicher keinen universellen Königsweg zum Unterrichtserfolg. Ein naheliegender Weg zur Realisierung eines solchen Unterrichts im Fach Mathematik ist, dass alle Lernenden auf ihrem Niveau herausfordernde, aber auch realistische Anforderungen zur Auseinandersetzung mit den Inhalten des Unterrichts erhalten, und dass dabei unterschiedliche allgemeine Kompetenzen abgedeckt werden. Gerade offenere Aufgabenvarianten sind hier besonders gut geeignet, indem sie Schülerinnen und Schülern ermöglichen, entsprechend ihren Fähigkeiten eigene Wege zu gehen und selbständig Lösungen zu finden. Die Lehrkraft kann dabei versuchen, möglichst viele dieser Lösungswege zu beobachten und im Bedarfsfall unterstützend einzugreifen, und sie kann nach der Bearbeitung unterschiedliche Schülerlösungen präsentieren und diskutieren lassen.

## 5. Literaturverzeichnis


Barzel, Bärbel / Büchter, Andreas / Leuders, Timo 2011: Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II; Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor

BLK 1997: Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts"; Nr. 60 ; Bonn: Bund-Länder-Kommission

Blum, Werner 1996: Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht - Trends und Perspektiven; In: Kadunz et al. (Hrsg.): Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik; Nr. 23; S. 15-38; Wien: Hölder-Pichler-Tempsky

Blum, Werner 2001: Was folgt aus TIMSS für Mathematikunterricht und Mathematiklehrerausbildung? ; In: Klieme, E. / Baumert, J. (Hrsg.): TIMSS - Impulse für Schule und Unterricht. Forschungsbefunde, Reforminitiativen, Praxisberichte und Video-Dokumente; S. 75-83; Bonn: Bundesministerium für Bildung und Forschung

Blum, Werner 2010: Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht. Herausforderung für Schüler und Lehrer; In: Praxis der Mathematik in der Schule; Nr. 34; S. 42-48

Blum, Werner / Galbraith, Peter L. / Henn, Hans-Wolfgang / Niss, Mogens 2007 (Hrsg.): Modelling and Applications in Mathematics Education; New York: Springer

Blum, Werner / Leiß, Dominik 2005: Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"-Aufgabe; In: mathematik lehren; Nr. 128; S. 18-21

Bruder, Regina / Collet, Christina 2011: Problemlösen lernen im Mathematikunterricht; Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Bruder, Regina / Leuders, Timo / Büchter, Andreas 2008: Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten; Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor

Bruner, Jerome S. / Olver, Rose R. / Greenfield, Patricia. M. 1971: Studien zur Kognitiven Entwicklung, Stuttgart: Klett Verlag

Büchter, Andreas / Leuders, Timo 2005: Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistungen überprüfen; Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor

Collins/ Brown, Newman 1989: Cognitive Apprenticeship, Teaching the Crafts of Reading, Writing, and Mathematics, in: Knowing, Learning and Instruction, Hilsedfale, N.J., Erlbaum 1989, S. 453-494

Dörfler, Willy 2006: Diagramme und Mathematikunterricht; In: Journal für Mathematik-didaktik;Nr.27; S. 200-219

Drüke-Noe, Christina 2009: Mathematische Texte – Auch in Klassenarbeiten. Anregungen zur Umsetzung und zur Bewertung; In: mathematik lehren; Nr. 156; S. 52-57

Drüke-Noe, Christina 2014: Empirische Untersuchungen zur Aufgabenkultur in Klassenarbeiten neunter und zehnter Klassen im Fach Mathematik; Wiesbaden: Springer

Duncker, Karl 1935/1974: Zur Psychologie des produktiven Denkens (3. Aufl.); Berlin: Springer

Fischer, Astrid / Hefendehl-Hebeker, Lisa / Prediger, Susanne 2010: Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen Praxis der Mathematik in der Schule. Sekundarstufen I und II;Nr.33; S. 1-7

Fischer, Roland / Malle, Günther 1985: Mensch und Mathematik – B.I; Mannheim: Wissenschaftsverlag

Greefrath, Gilbert / Kaiser, Gabriele / Blum, Werner / Borromeo Ferri, Rita 2013: Mathematisches Modellieren – Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe; In: Borromeo Ferri, R. / Greefrath, G. / Kaiser, G. (Hrsg.): Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und didaktische Hintergründe. Wiesbaden: Springer Spektrum

Hanna, Gila 2000: Proof, Explanation and Exploration: An Overview; In: Educational Studies in Mathematics; Nr. 64; S. 5-23

Hefendehl-Hebeker, Lisa 2004: Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht; Duisburg: Universität Duisburg-Essen

Henn, Hans-Wolfgang / Maaß, Katja 2003: Standardthemen im realitätsbezogenen Mathematikunterricht; In: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht; Bd. 8; S.1-5

Hußmann, Stephan / Laakmann, Heinz 2011: Eine Funktion - viele Gesichter. Darstellen und Darstellungen wechseln; In: Praxis der Mathematik in der Schule; Nr. 38; S. 2-13

Hußmann, Stephan / Leuders, Timo 2008: Wachstum vorhersagen – Algebraisch denken lernen; In: Praxis der Mathematik in der Schule; Nr. 19; S. 8-12

KMK 2004:Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss; München: Luchterhand

Krumsdorf, Julian 2009: Beweisen am Beispiel; In: Praxis der Mathematik in der Schule; Nr. 30; S. 8-13

Kunter, Mareike / Dubberke, Thamar / Baumert, Jürgen / Blum, Werner / Brunner, Martin / Jordan, Alexander / Klusmann, Uta / Krauss, Stefan / Löwen, Katrin / Neubrand, Michael / Tsai, Yi-Miau 2006: Mathematikunterricht in den PISA-Klassen 2004: Rahmenbedingungen, Formen und Lehr-Lernprozesse; In: P.-K. Deutschland (Hrsg.): PISA 2003. Untersuchungen zur Kompetenzentwicklung im Verlauf eines Schuljahres; S. 161-194; Münster: Waxmann

Laakmann, Heinz 2005: Werbung und Mathematik – oder: Rasiert man(n) in 18 Monaten ein Fußballfeld? ; In: Praxis der Mathematik in der Schule; Nr. 3; S. 14-18

Leiß, Dominik / Blum, Werner 2012: Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen; In: Blum, W. / Drüke-Noe, C. / Hartung, R. / Köller, O. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen; S. 33-50; Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor

Leuders, Timo 2012: Kompetenzorientierte Aufgaben im Unterricht. In: Blum, W. / Drüke-Noe, C. / Hartung, R. / Köller, O. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen; S. 81-95; Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor

Maaß, Katja 2004: Mathematisches Modellieren im Unterricht; Hildesheim: Franzbecker

Maaß, Katja 2007: Mathematisches Modellieren – Aufgaben für die Sekundarstufe I; Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor

Malle, Gunter 1993: Didaktische Probleme der elementaren Algebra; Braunschweig / Wiesbaden: Vieweg

Mayer, Richard E. 1998: Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving; In: Instructional Science; Nr. 26; S. 49-63

Neubrand, Michael / Klieme, Eckhard / Lüdtke, Oliver / Neubrand, Johanna 2002:Kompetenzstufen und Schwierigkeitsmodelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung; In: Unterrichtswissenschaft; Nr. 30; S. 100-119

Pólya, George 1948: How to solve it a new aspect of mathematical method; Princeton, N.J.: Princeton University Press

Reiss, Kristina / Heinze, Aiso / Kuntze, Sebastian / Kessler, Stephan / Rudolph-Albert, Franziska / Renkl, Alexander 2006: Mathematiklernen mit heuristischen Lösungsbeispielen; In: Prenzel, M. / Allolio-Näcke, L. (Hrsg.): Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms; S. 194-208; Münster: Waxmann

Schupp, Hans 2002: Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht; Hildesheim / Berlin: Verlag Franzbecker

Siller, Hans-Stefan / Fuchs, Karl Josef 2009: Darstellen, Modellbilden; In: Mathematik im Unterricht; Nr. 3; S. 66-84

Sjuts, Johann 2007: Kompetenzdiagnostik im Lernprozess - auf theoriegeleitete Aufgabengestaltung kommt es an; In: mathematica didactica; Nr. 30(2); S. 33-52

Sträßer, Rudolph 2003: Darstellen und Interpretieren; In: mathematik lehren; Nr. 117; S. 4-7

Franz E. Weinert (Hrsg.)2001: Leistungsmessung in Schulen. Weinheim und Basel: Beltz; 27f.

Winter, Heinrich 1975: Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht?; In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik; Nr. 7; S. 106-116

Wittmann, Erich Christian 1990: Wider die Flut der "bunten Hunde" und der "grauen Päckchen": Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens; In: Wittmann, E. C. / Müller, G. N. (Hrsg.): Handbuch produktiver Rechenübungen; S. 152-166; Stuttgart: Klett Verlag