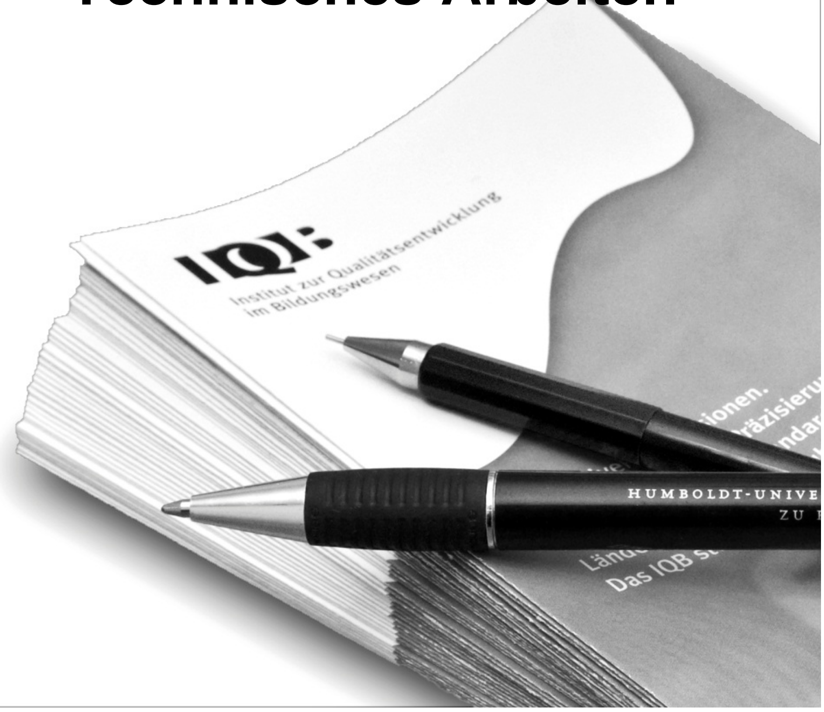
Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten 2014
8. Jahrgangsstufe (VERA-8)
Mathematik – Didaktische Handreichung
Modul B

Didaktische Erläuterung
Technisches Arbeiten



Inhaltsverzeichnis

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische Materialien auch online finden können?

www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

Allgemeines Kapitel zur Kompetenz „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“

„Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ ist eine der sechs in den Bildungsstandards Mathematik (KMK 2003 & 2004) formulierten prozessbezogenen Kompetenzen. Diese Kompetenz – im Folgenden kurz: „Technisches Arbeiten“ – wird in diesem Allgemeinen Kapitel näher beschrieben, und es werden Anregungen für ihre Förderung und ihren schrittweisen Aufbau gegeben.

Im ersten Abschnitt wird „Technisches Arbeiten“ am Beispiel konkreter Aufgaben und mit Bezug zu den drei in den Bildungsstandards Mathematik formulierten Anforderungsbereichen erläutert (vgl. 1.1). Eine tabellarische Übersicht zeigt, welche Teilkompetenzen des Technischen Arbeitens die Aufgaben in VERA 2014 erfordern (vgl. 1.2), und ein Bezug zum Kompetenzstufenmodell wird hergestellt (vgl. 1.3). Der zweite Abschnitt thematisiert das Technische Arbeiten im Zusammenspiel mit den beiden Kompetenzen „Modellieren“ (vgl. 2.1) und „Probleme lösen“ (vgl. 2.2). Der dritte Abschnitt enthält einen Überblick über die didaktische Diskussion zu dieser Kompetenz und die Bedeutung von sowie das Umgehen mit rechnerischen Verfahren. Der vierte Abschnitt benennt einige häufig auftretende Schwierigkeiten im Umgang mit Verfahren und Operationen. Der fünfte Abschnitt enthält ausgewählte Anregungen zum unterrichtlichen Umgang mit Schwierigkeiten, die beim Technischen Arbeiten auftreten können. An das Resümee im sechsten Abschnitt schließt sich der siebte und letzte Abschnitt an mit dem Literaturverzeichnis (vgl. 7.1), Hinweisen auf weiterführende unterrichtspraktische Zeitschriften (vgl. 7.2) sowie Hinweisen auf Arbeitsmaterialien für Schülerinnen und Schüler.

1. Die Kompetenz „Technisches Arbeiten“

1.1 „Technisches Arbeiten“ in den Bildungsstandards

Zu dieser Kompetenz gehört „in erster Linie das Ausführen von Operationen mit Zahlen, Größen, Variablen und Termen oder mit geometrischen Objekten. Das Spektrum reicht von einfachen und überschaubaren Routineverfahren bis zu komplexen Verfahren einschließlich deren reflektierenden Bewertung. Zudem kann man das Beherrschen mathematischer Fakten auch zu dieser Kompetenz zählen. […] Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz kann man wie folgt genauer fassen:

Anforderungsbereich I: Verwenden elementarer Lösungsverfahren; direktes Anwenden von Formeln und Symbolen; direktes Nutzen einfacher mathematischer Werkzeuge (z. B. Formelsammlung, Taschenrechner).

Anforderungsbereich II: Mehrschrittige Anwendung formal mathematischer Prozeduren; Umgang mit Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen im Kontext; mathematische Werkzeuge je nach Situation und Zweck gezielt auswählen und einsetzen.

Anforderungsbereich III: Durchführen komplexer Prozeduren; Bewerten von Lösungs- und Kontrollverfahren; Reflektieren der Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Werkzeuge“[1]; Verallgemeinerungen vornehmen.

In den folgenden drei Abschnitten (vgl. 1.1.1 bis 1.1.3) werden für die drei Anforderungsbereiche zentrale Aspekte des Technischen Arbeitens am Beispiel ausgewählter Aufgaben illustriert.

1.1.1 Teilkompetenzen im Anforderungsbereich I

Die folgenden drei Aufgaben illustrieren exemplarisch kognitive Anforderungen im Anforderungsbereich I. So kommt in der Aufgabe „Temperaturdifferenz“ (Abbildung 1) ein elementares Verfahren zur Anwendung – hier: die Bildung der Differenz zweier ganzzahliger Größen –, um den Temperaturanstieg zu ermitteln. Ein ähnlich elementares Lösungsverfahren – hier: die Berechnung des Produkts zweier Zahlen – ist bei der Aufgabe „Parlamentswahl“ (Abbildung 2) nötig, um die gesuchte Anzahl Stimmen zu berechnen. Auch in der Aufgabe „Einfache Gleichung“ (Abbildung 3) wird ein elementares und direkt erkennbares Lösungsverfahren angewendet, bei dem hier nun auch mit Variablen umzugehen ist.

Aufgabe Temperaturdifferenz

An einem Herbsttag misst Tim morgens im Garten eine Temperatur von $-1\,°C$.
Am Nachmittag beträgt die Temperatur an der gleichen Stelle $18\,°C$.

Gib an, um wie viel Grad Celsius die Temperatur angestiegen ist.

Die Temperatur ist um _______ °C gestiegen.

Abbildung 1

Aufgabe Parlamentswahl

Bei einer Parlamentswahl wurden in einem Wahlbezirk 12 650 gültige Stimmen abgegeben.
Davon fielen 42 % auf den Kandidaten Herrn Aal.

Teilaufgabe 1

Gib die Anzahl der Stimmen an, die Herr Aal bei dieser Wahl bekam.

____________ Stimmen

Abbildung 2

Aufgabe Einfache Gleichung

Gegeben ist die Gleichung $18 - 3x = 12$.

Gib den Wert für x an.

$x =$ ....

Abbildung 3

[1] Aus: Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss und den Mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik.

1.1.2 Teilkompetenzen im Anforderungsbereich II

Die beiden Aufgaben „Winkel im Dreieck“ (Abbildung 4) und „Durch 1001 teilbar“ (Abbildung 5) illustrieren kognitiv anspruchsvollere Teilkompetenzen des Technischen Arbeitens, die wegen ihrer Mehrschrittigkeit schon zum Anforderungsbereich II gehören.

Aufgabe Winkel im Dreieck

Ein Dreieck hat die Innenwinkel α, β und γ.

Es gilt: β ist doppelt so groß wie α.
γ ist dreimal so groß wie α.

Gib an, wie groß der Winkel γ ist.

γ = ...

Abbildung 4

Aufgabe Durch 1001 teilbar

Peter behauptet: „Wenn man eine dreistellige Zahl zweimal hintereinander aufschreibt, dann entsteht eine sechsstellige Zahl, die immer durch 1001 teilbar ist.“

Beispiel: 243243 : 1001 = 243

Welches Argument kann Peter verwenden, um seine Behauptung zu begründen?

Kreuze jeweils an, ob das Argument geeignet ist oder nicht.

	geeignet	nicht geeignet
Alle sechsstelligen Zahlen sind durch 1001 teilbar, denn diese sind alle größer als 1001.	☐	☐
Alle sechsstelligen Zahlen sind durch 1000 teilbar. Außerdem sind alle sechsstelligen Zahlen durch 1 teilbar. Also sind sie auch durch 1001 teilbar.	☐	☐
Die sechsstellige Zahl ist durch 1001 teilbar, da ihre Bildung nach dem folgenden Muster erfolgt: $abc \cdot 1001 = abc \cdot 1000 + abc \cdot 1 = abc000 + abc = abcabc$	☐	☐
Die sechsstellige Zahl ist durch 1001 teilbar, weil in 1001 nur Nullen und Einsen enthalten sind.	☐	☐
Die sechsstellige Zahl ist durch 1001 teilbar, weil sie so entsteht, dass die dreistellige Zahl mit 1000 multipliziert und dann die dreistellige Zahl zum Ergebnis addiert wird.	☐	☐

Abbildung 5

Die Aufgabe „Winkel im Dreieck“ verlangt zu ihrer Bearbeitung u. a. die Kompetenz „Technisches Arbeiten“ (vgl. Didaktischen Kommentar zu dieser Aufgabe sowie Abschnitt 2.2). Für deren Teilkompetenz im mittleren Anforderungsbereich ist kennzeichnend, dass nach einer Ansatzfindung mit einer bzw. nacheinander mit mehreren Gleichungen zu arbeiten ist. Diese können dann durch Anwenden eines mehrschrittigen Verfahrens oder durch geeignetes Probieren gelöst werden. Auch der Kontextbezug ist charakteristisch für den Anforderungsbereich II. Im vorliegenden Fall beziehen sich die Gleichungen auf einen geometrischen Kontext. Alternativ könnte eine Gleichung z. B. einen realitätsbezogenen Kontext beschreiben (vgl. hierzu auch 2.1).

In der Aufgabe „Durch 1001 teilbar“ kennzeichnet die mehrschrittige formale Anwendung mathematischer Prozeduren den kognitiven Anspruch im Anforderungsbereich II. Diese Prozeduren sind abzuarbeiten, um die gegebenen Aussagen zu überprüfen (vgl. Didaktischen Kommentar zu dieser Aufgabe), wenngleich die Hauptanforderung dieser Aufgabe im mathematischen Argumentieren besteht.

1.1.3 Teilkompetenzen im Anforderungsbereich III

Die Komplexität des technischen Anspruchs oder geforderte Bewertungen, Reflexionen oder Verallgemeinerungen kennzeichnen Teilkompetenzen des Technischen Arbeitens im höchsten Anforderungsbereich. Exemplarisch illustrieren dies zwei Teilaufgaben der bereits in VERA 2013 gestellten Aufgabe „Dreieckszahlen“ (Abbildung 6).

So ist in Teilaufgabe 3 der Zusammenhang zwischen zwei beliebigen aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen durch Verallgemeinerung zu erkennen und allgemein durch eine Rekursionsformel zu beschreiben. In Teilaufgabe 5 ist eine allgemeine Formel zur expliziten Berechnung einer beliebigen Dreieckszahl anzugeben. In beiden Teilaufgaben sind allgemeine Aussagen mit Variablen zu formulieren. Dies verlangt Formalisierungen (vgl. 3.) sowie strukturelle Verallgemeinerungen und erfordert daher kognitive Aktivitäten, die für den höchsten Anforderungsbereich typisch sind.

Aufgabe Dreieckszahlen

Zahlen, die sich aus der Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ergeben, heißen Dreieckszahlen.

Dreieckszahlen, beginnend mit der 1, lassen sich veranschaulichen, indem man Plättchen in Dreiecksform legt.

Abbildung 1 zeigt die Dreieckszahl 10, denn hierfür benötigt man 10 Plättchen.

Man rechnet so: 1 + 2 + 3 + 4 = 10.

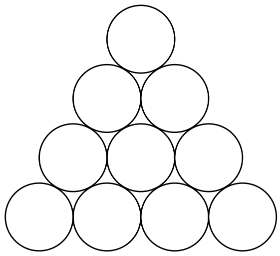
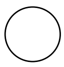
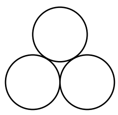
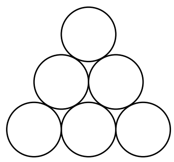
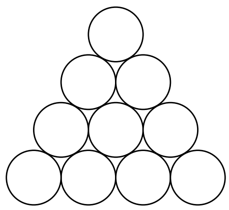


Abbildung 1

Die Dreieckszahlen heißen D_1, D_2 ... In der folgenden Tabelle sind die ersten vier dargestellt:

Nummerierung	1. Figur	2. Figur	3. Figur	4. Figur
Veranschaulichung				
Dreickszahl	1	3	6	10
Bezeichnung	D_1	D_2	D_3	D_4

Teilaufgabe 3

Gib eine Formel an, mit der man eine beliebige Dreieckszahl D_n aus deren Vorgängerdreieckszahl D_{n-1} berechnen kann.

D_n = ________________________

Teilaufgabe 5

Gib eine Formel an, mit der man eine Dreieckszahl D_n direkt berechnen kann, ohne den Vorgänger zu kennen.

D_n = ________________________

Abbildung 6

In der gemeinsamen Betrachtung illustrieren die vorstehenden Aufgaben unterschiedliche Teilkompetenzen des Technischen Arbeitens (vgl. 1.2). Diese Aufgaben machen auch deutlich, wie mit jedem höheren Anforderungsbereich die kognitive Komplexität der (Teil-) Kompetenzen größer wird. Mit dieser zunehmenden kognitiven Komplexität geht einher, dass in den meisten Fällen auch die empirische Schwierigkeit einer Aufgabe zunimmt, die wiederum an ihrer Zugehörigkeit zu einer bestimmten Kompetenzstufe (vgl. 1.3) erkennbar ist.

1.2 Teilkompetenzen in den Aufgaben in VERA 2014

Die folgende Tabelle gibt mit Bezug zu den drei Anforderungsbereichen eine Übersicht über die Teilkompetenzen des Technischen Arbeitens und benennt in der dritten Spalte die Aufgaben aus VERA 2014, die u. a. diese Teilkompetenzen bei ihrer Bearbeitung erfordern.

<table>
<tr><th>Anforderungs-bereiche</th><th>Teilkompetenzen</th><th>Aufgabenname</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Anforderungs-bereich I</td><td>Verwenden elementarer Lösungsverfahren</td><td>Zwischen zwei Zahlen
Temperaturdifferenz
Colakästen 1, 2
Parlamentswahl 1
Das ist gerundet
Viele Brötchen
Papiergewicht
Leistung des Motors
Hälfte
Croissant
Anteile in geometrischen Objekten 1 - 3
Ferienjob 1
Sterne und Sandkörner 2
Hauptstädte 1, 2
KiBa
Zahlen addieren 2</td></tr>
<tr><td>direktes Anwenden von Formeln und Symbolen</td><td>Einfache Gleichung
Richtig umgeformt 1, 2
Körper füllen
Ohrhänger 1, 2
Gleichung finden 1, 2</td></tr>
<tr><td>direktes Nutzen einfacher mathematischer Werkzeuge (z. B. Formelsammlung, Taschenrechner)</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Anforderungs-bereich II</td><td>Mehrschrittige Anwendung formal mathematischer Prozeduren</td><td>Ferienjob 2
Überschlag doch mal
Durch 1001 teilbar</td></tr>
<tr><td>Umgang mit Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen im Kontext</td><td>Inliner 2
Winkel Gamma
Autokauf
Winkel im Dreieck
Sauerkraut 2</td></tr>
<tr><td>mathematische Werkzeuge je nach Situation und Zweck gezielt auswählen und einsetzen</td><td></td></tr>
</table>

Anforderungs-bereich III	Durchführen komplexer Prozeduren	
	Bewerten von Lösungs- und Kontrollverfahren	
	Reflektieren der Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Werkzeuge	
	Verallgemeinerungen vornehmen	Dreieckszahlen 3, 5 (beide aus VERA 2013)

Tabelle 1: Teilkompetenzen der Kompetenz „Technisches Arbeiten“ in den drei Anforderungsbereichen

1.3 Teilkompetenzen und ihre Zugehörigkeit zu Kompetenzstufen

Entsprechend der Vorgehensweise bei den fünf anderen prozessbezogenen Kompetenzen lassen sich auch für das Technische Arbeiten Kompetenzstufen formulieren. Diese sind in einem Kompetenzstufenmodell mit sechs Stufen näher beschrieben (KMK, 2011). Im Unterschied zu den Anforderungsbereichen einer Kompetenz, die theoriegeleitet beschrieben sind (vgl. hierzu 1.1 und 1.2), werden diese Kompetenzstufen aufgrund tatsächlicher empirischer Schwierigkeiten beschrieben. Die zugrunde gelegten empirischen Daten wurden mittels einer repräsentativen Stichprobe von Schülerinnen und Schülern erhoben, die entsprechende Testaufgaben bearbeitet haben. Auf der untersten Kompetenzstufe (KS 1A) befinden sich Aufgaben, die sehr viele Schülerinnen und Schüler lösen konnten. Schwierige, nur von ganz wenigen richtig gelöste Aufgaben bilden die sechste und damit höchste Kompetenzstufe (KS 5). Speziell für die Kompetenz „Technisches Arbeiten“ werden diese sechs Stufen im Kompetenzstufenmodell (KMK, 2011) ganz grob wie folgt beschrieben:

KS 1A: einschrittige Standardverfahren im Bereich der natürlichen Zahlen anwenden,

KS 1B: einschrittige Standardverfahren anwenden,

KS 2: wenigschrittige Standardverfahren anwenden,

KS 3: mehrschrittige Standardverfahren und einschrittige Verfahren mit Variablen anwenden,

KS 4: mehrschrittige Operationen mit Variablen ausführen,

KS 5: komplexe innermathematische Verfahren anwenden und kritisch hinterfragen.

2. „Technisches Arbeiten“ im Zusammenspiel mit weiteren Kompetenzen

Die sechs in den Bildungsstandards benannten prozessbezogenen Kompetenzen lassen sich nicht trennscharf voneinander abgrenzen. Daher beruht die Zuweisung von Kompetenzen zu einer Aufgabe auf gewissen Idealisierungen, die auf einer modellhaften Vorstellung vom Aufgabenbearbeitungsprozess aufbauen. Diesen kann man sich nach Bromme et al. (1990) als eine idealtypische Abfolge von kognitiven Teilhandlungen vorstellen, die Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung von Aufgaben ausführen. Man legt so „die ideale Performanz eines mittleren, idealen Aufgabenlösers“ (ebd., S. 6) zugrunde und setzt voraus, dass Schülerinnen und Schüler zumindest instrumentell über sämtliche mathematischen Begriffe und Verfahren verfügen, die zur Lösung einer Aufgabe nötig sind. Eine derart verstandene Abfolge von Teilhandlungen bildet die Grundlage der folgenden Betrachtungen, die jedoch nicht ausschließt, dass Schülerinnen und Schüler im konkreten Falle eine Aufgabe abweichend von dieser Abfolge bearbeiten.

Die genauere Identifizierung solcher Teilhandlungen kann beim Umgehen mit Schwierigkeiten während der Aufgabenbearbeitung unterstützen, speziell beim Technischen Arbeiten, das vielfach im Zusammenspiel mit den anderen prozessbezogenen Kompetenzen benötigt wird. Dieses Zusammenspiel wird im Weiteren am Beispiel der beiden Kompetenzen „Mathematisch modellieren“ und „Probleme mathematisch lösen“ verdeutlicht, und es werden kognitive Teilhandlungen benannt, die für „Technisches Arbeiten“ kennzeichnend sind.

2.1 „Technisches Arbeiten“ bei Modellierungsaufgaben

Bearbeiten Schülerinnen und Schüler Modellierungsaufgaben, so führen sie eine Abfolge von Teilhandlungen aus, die sich idealtypisch z. B. durch einen siebenschrittigen Modellierungskreislauf (nach Blum/Leiß, 2005) erfassen lässt. In diesem Kreislauf erfordert insbesondere der Teilschritt 4 (vgl. Abbildung 7), der den Übergang vom zuvor aufgestellten mathematischen Modell zu mathematischen Resultaten liefert, die Kompetenz „Technisches Arbeiten“. Je nach Aufgabe können während dieses Teilschrittes weitere Kompetenzen bei der Aufgabenbearbeitung nötig sein, wie beispielsweise „Mathematisch argumentieren“ oder „Mathematische Darstellungen verwenden“. Auch Teilschritt 3 erfordert des Öfteren Technisches Arbeiten, nämlich wenn bei der Aufstellung eines mathematischen Modells Formalisierungen notwendig sind.

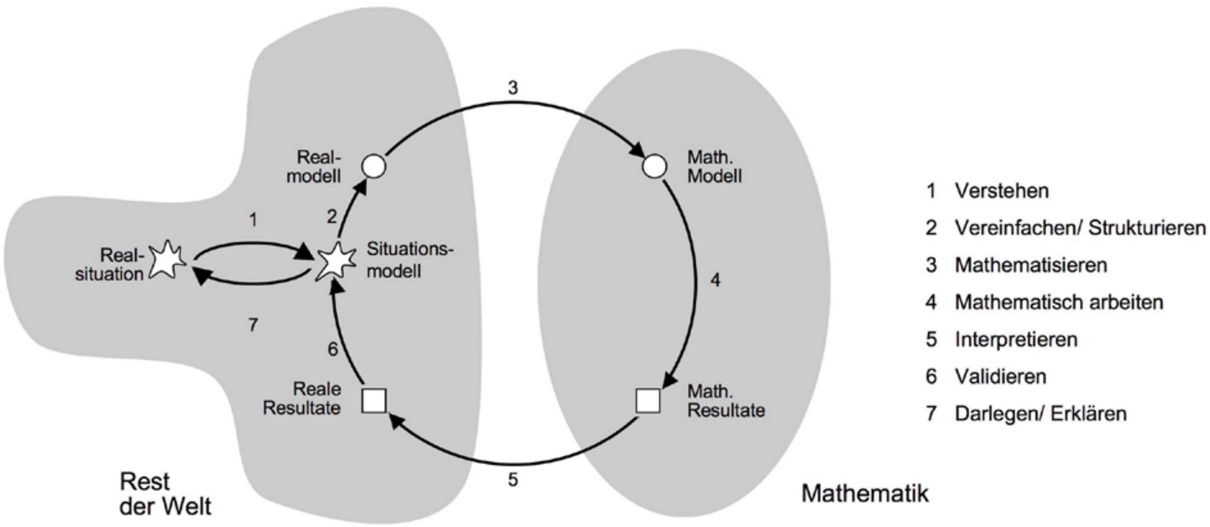
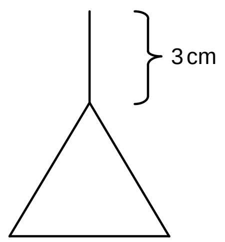


Abbildung 7: Modellierungskreislauf (Blum/Leiß, 2005, S. 19; vgl. auch Allgemeiner Didaktischer Kommentar zur Kompetenz „Mathematisch modellieren“ zu VERA 2009)

Der Teilschritt 4 wird hier nun am Beispiel der Aufgabe „Ohrhänger“ (Abbildung 8) konkretisiert. In dieser Aufgabe ist zunächst ein geeignetes rechnerisches Modell aufzustellen, das dann im Rahmen des Technischen Arbeitens in ein Resultat zu überführen ist.

Aufgabe Ohrhänger

Janina biegt Ohrhänger aus Silberdraht, die aus einem oberen und einem unteren Teil bestehen. Den oberen Teil macht Janina immer 3 cm lang, der untere Teil hat immer die Form eines gleichseitigen Dreiecks (siehe Abbildung).



(nicht maßstabsgerecht)

Teilaufgabe 1

Das gleichseitige Dreieck hat eine Seitenlänge von 5 cm.

Wie viele solche Ohrhänger kann Janina mit 90 cm Silberdraht herstellen?

.... Ohrhänger

Schreibe deinen Lösungsweg auf.

Abbildung 8

Die Schülerinnen und Schüler müssen im idealtypischen Aufgabenbearbeitungsprozess zunächst die im Text gegebenen Informationen lesen und dabei fachsprachliche Begriffe anwenden, um dann ein rechnerisches Modell aufzustellen. Mit diesem errechnen sie anschließend die Anzahl (hier: x) der beschriebenen Ohrhänger (vgl. auch den Didaktischen Kommentar zu dieser Aufgabe). *Ein möglicher* zugehöriger Ansatz – ein rechnerisches Modell – könnte dabei lauten:

$$(3 + 3 \cdot 5) \cdot x = 90$$

Beim Überführen dieses rechnerischen Modells in ein Resultat sind Rechenregeln verständig anzuwenden, elementare Rechenoperationen auszuführen bzw. Regeln für das Umformen von Gleichungen zu befolgen. Die letzte dieser kognitiven Teilhandlungen liefert schließlich das mathematische Resultat (hier: $x = 5$), das dann im nächsten Teilschritt als gesuchte Anzahl der Ohrhänger zu interpretieren ist. Natürlich kann man die gesuchte Anzahl auch ohne explizite Verwendung von Variablen finden, indem die nötigen Rechnungen (u. a. Berechnung der Länge des für einen Ohrhänger nötigen Silberdrahts) im Kopf ausgeführt werden.

2.2 „Technisches Arbeiten" bei Problemlöseaufgaben

Strukturell vergleichbare kognitive Teilhandlungen wie beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben finden beim Bearbeiten von Problemlöseaufgaben statt. Auch von diesen Aufgaben kann man einen idealtypischen Bearbeitungsverlauf annehmen, der sich beispielsweise durch den auf Pólya (1948) zurückgehenden vierschrittigen Problemlösezyklus beschreiben lässt (vgl. hierzu auch das Allgemeine Kapitel zur Kompetenz „Probleme mathematisch lösen" zu VERA 2012). Beim Anwenden der Kompetenz „Probleme mathematisch lösen" geht es im Wesentlichen um das Nutzen von Strategien und Heurismen, doch auch hier kann die Aufgabenbearbeitung zusätzlich „Technisches Arbeiten" erfordern, wie nachstehend am Beispiel der Aufgabe „Winkel im Dreieck" (vgl. Abbildung 4 in Abschnitt 1.1.2) dargelegt wird.

In dieser Aufgabe kann die Strategie „Identifizieren von Teilproblemen" angewendet werden, um zum Kontext passende Gleichungen aufzustellen. Diese können dann durch geeignete Ersetzungen ineinander überführt werden, um schließlich die Größe des Winkels Gamma zu errechnen. Beim Bearbeiten des ersten Teilproblems ergibt sich mit Bezug zum Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

und die Angaben über die Winkelbeziehungen in diesem Dreieck liefern die beiden Gleichungen

$$\beta = 2\alpha \text{ und } \gamma = 3\alpha.$$

Geeignete Ersetzungen führen schließlich auf die Gleichung

$$\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180^\circ.$$

Termumformungen sowie eine Division im Bereich der natürlichen Zahlen liefern dann das Ergebnis des ersten Teilproblems $(\alpha = 30^\circ)$.

Das Bearbeiten des zweiten Teilproblems liefert schließlich die gesuchte Größe des Winkels Gamma.

3. „Technisches Arbeiten“ – didaktische Aspekte

Die Kompetenz „Technisches Arbeiten“ wird als solche nur implizit in der didaktischen Literatur diskutiert. Vielmehr findet sich eine Vielzahl an Klagen über eine an Kalkülen und der Schulung von Fertigkeiten orientierte Aufgabenkultur in der Sekundarstufe I (u. a. Blum, 2001; Bromme et al., 1990; Hefendehl-Hebeker, 2004; Schupp, 2002; Wittmann, 1990). Empirische Belege für diese Einschätzungen finden sich allerdings nur wenige (vgl. Kunter et al., 2006; Neubrand, 2002). Im Wesentlichen werden drei mögliche Ursachen für diese kalkülgeprägte Aufgabenkultur diskutiert:

Als erste mögliche Ursache wird die für das Fach Mathematik charakteristische stete Suche „nach Verallgemeinerung und begrifflicher Fundierung und in der Folge nach Effektivierung der gebildeten Begriffe und Verfahren“ genannt (BLK, 1997, S. 38). Diese kann, wenn optimale Lösungsverfahren einmal vorliegen, zu einer Beschränkung auf Rechenverfahren führen, sodass in der Folge das Formale (die Syntax) das Inhaltliche (die Semantik) überlagert und von diesem abgespalten wird (z. B. Malle, 1993). Ein solches Vorgehen steht im Widerspruch zur eigentlichen Qualität von Formalisierungen (Sjuts, 2007), die das mehrfache Ausführen gleicher Routinen entlasten sollen, indem Terme als „ökonomische Darstellungsmittel für allgemeine Zusammenhänge“ (Fischer et al., 2010, S. 2) genutzt werden.

Als zweite mögliche Ursache wird eine vordergründige Leistungs- und Erfolgsorientierung diskutiert, da sich die Beherrschung von Verfahren und Algorithmen „ja so schön leicht abtesten [lässt]“ (Winter, 1975, S. 114; vgl. auch Hefendehl-Hebeker, 2004). Dass technische Verfahren tatsächlich einen sehr großen Anteil an den kognitiven Aktivitäten bei der Bearbeitung von Klassenarbeitsaufgaben haben, zeigen auch die Untersuchungen von Drüke-Noe (2014). Es zeigt sich sogar, dass das technische Arbeiten im Allgemeinen die einzige Kompetenz ist, die den kognitiven Anspruch von Klassenarbeiten kennzeichnet.

Eine dritte denkbare Ursache sieht Wittmann (1990) in einem gängigen Gestaltungsprinzip der Übungspraxis im Unterricht, bei dem insbesondere das Prinzip der Isolierung von Schwierigkeiten es den Schülerinnen und Schülern ermöglicht, die gerade geforderten Aufgaben „notfalls mechanisch“ (ebd., S. 156) zu lösen.

Gerade bei Aufgaben aus der Algebra besteht diese Gefahr des vorwiegend syntaktischen Umgehens mit diesen (Schupp, 2002). Werden jedoch beim Umgehen mit den die Aufgabenkultur vielfach dominierenden Verfahren und Kalkülen semantische Aspekte verstärkt gegenüber den syntaktischen betont, so kann Wissen flexibler angewendet und das Ausführen von Problemlöse- und Modellierungsprozessen gefördert werden (u. a. Hefendehl-Hebeker, 2004). So leistet ein Unterricht, in dem syntaktische und semantische Aspekte des Umgehens mit Verfahren ausgewogen berücksichtigt werden, einen wesentlichen Beitrag zur adäquaten Entwicklung der Kompetenz „Technisches Arbeiten“. Zudem werden die drei in den Bildungsstandards formulierten Winterschen Grunderfahrungen (vgl. KMK, 2003, 2004) – Anwendungs-, Struktur- und Problemorientierung – ausgewogener berücksichtigt, was auch dazu beiträgt, dass die Schülerinnen und Schüler ein angemessenes Bild von Mathematik entwickeln können.

4. Schwierigkeiten im Umgehen mit der Kompetenz „Technisches Arbeiten“

Beim Anwenden dieser Kompetenz treten zahlreiche Schwierigkeiten auf. Diese entstehen beim Aufruf bzw. beim Abarbeiten von Verfahren und sie kommen beim Umformen arithmetischer bzw. algebraischer Terme sowie Gleichungen vor. Malle (1993) identifiziert eine Vielzahl von Verfahrensfehlern, von denen ausgewählte im Folgenden vorgestellt und erläutert werden. Darauf aufbauend werden im nächsten Abschnitt Anregungen zum Umgehen mit solchen Schwierigkeiten gegeben.

Malle unterscheidet u.a. diese Verfahrensfehler:

- Übergeneralisieren
- unzulässiges Linearisieren
- Verwendung inadäquater Schemata (u. a. sogenannte Weglass- und Streichschemata)
- Nichtbeachtung von Prozedurhierarchien

Ein typisches Beispiel für das *Übergeneralisieren* ist die fehlerhafte Übertragung der Regel zur Multiplikation von Brüchen auf die Addition von Brüchen, sodass Brüche addiert werden, indem die Zähler sowie die Nenner addiert werden.

Beim *unzulässigen Linearisieren* bereitet speziell auch das Strukturerkennen bei Termen Probleme. Wird im Term $(a + b)^2$ nicht die Summe in ihrer Bedeutung erkannt, so wird dieser Term häufig in folgender Weise fehlerhaft umgeformt:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

Haben Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten mit dem Umformen von Termen, da ihnen die erforderlichen Umformungsregeln nicht geläufig sind, *verwenden* sie ersatzweise mitunter *inadäquate Schemata*. Dabei kommen insbesondere sogenannte *Weglass*- oder *Streichschemata* (Malle, 1993, S. 176) zur Anwendung, wie die folgenden zwei Beispiele zeigen. Im ersten Beispiel wird bei der Termumformung schlicht die 3 im Zähler gegen die 3 im Nenner „gekürzt“:

$$\frac{3x+2}{3} = x+2.$$

In ähnlicher Weise wird im zweiten Beispiel die Gleichung „vereinfacht“, indem die 4 auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gestrichen wird:

$$4x+5=4 \Rightarrow x+5=0$$

Schließlich ist auch das *Nichtbeachten von Prozedurhierarchien* eine häufig auftretende Schwierigkeit. Diese wird am Beispiel der zweiten Teilaufgabe von „Richtig umgeformt“ (Abbildung 9) und einer Fehllösung (Abbildung 10) illustriert.

Aufgabe Richtig umgeformt

Teilaufgabe 2

Multipliziere den Term $4k \cdot (2k - m)$ aus.

$4k \cdot (2k - m) =$ ....

Abbildung 9

$4k \cdot (2k - m) = 8k^2 - m$

Abbildung 10

In dieser Teilaufgabe soll ein gegebener Term ausmultipliziert werden. Hierbei führt insbesondere das Nichterkennen oder das Nichtbeachten von Hierarchien vielfach zur in Abbildung 10 gezeigten Fehllösung, obwohl zunächst richtigerweise eine Prozedur „Klammern auflösen“ aufgerufen wird. Das Abarbeiten dieser Prozedur erfordert nach Malle mehrere Unterprozeduren. Eine davon ist die Multiplikation von 2k mit 4k. Das Ausführen dieser Unterprozedur – hier das Berechnen eines Produkts, bei dem jeweils Koeffizienten bzw. Variable miteinander zu multiplizieren sind – erfordert möglicherweise so viel Konzentration, dass anschließend vergessen wird, zur eigentlichen Prozedur „Klammern auflösen“ zurückzukehren und auch das zweite Produkt zu berechnen. Die gesamte Struktur dieser Aufgabe gerät außer Acht und so wird nur noch „-m“ notiert.

Speziell beim Lösen von Gleichungen stehen drei Aspekte in engem Zusammenhang mit Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern (Malle, S. 188ff). Diese sind

- das Erkennen von Termstrukturen,
- das Anwenden von Regeln,
- das Verwenden von heuristischen Strategien (ebd., S. 188ff).

Ein nur unzureichendes Zusammenspiel dieser drei Aspekte scheint vielfach die Ursache für Schwierigkeiten zu sein. Beim Umgehen mit Schwierigkeiten kann es nicht allein darum gehen, „noch mehr zu üben“ (Vollrath, 1994). Ein bloßes Abarbeiten einer Vielzahl von Aufgaben kann sogar dazu führen, dass das rein syntaktische Umgehen mit Termen und Gleichungen noch stärker in den Vordergrund tritt. Daher werden im folgenden Abschnitt vor allem solche unterrichtlichen Anregungen gegeben, die beim Technischen Arbeiten stärker auf semantische Aspekte und das Erkennen von Strukturen zielen.

5. Unterrichtliche Anregungen zur Entwicklung des Technischen Arbeitens

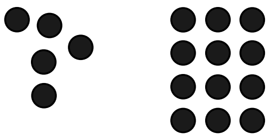
Wie bei der Entwicklung anderer Kompetenzen auch, bietet es sich beim Technischen Arbeiten ebenfalls an, bewusst einzelne Teilkompetenzen aus den drei Anforderungsbereichen aufzugreifen, gerade auch solche, die zum Anforderungsbereich III gehören. Die hier gegebenen Anregungen sollen beim Umgehen mit bekannten und häufig auftretenden Schwierigkeiten unterstützen. Sie sind nicht als Lehrgang zu verstehen, sondern sollen dem variationsreichen Umgehen mit Termen, Gleichungen und Verfahren dienen und so einen Beitrag zur Förderung des Technischen Arbeitens leisten. Weitere Anregungen finden sich in den aufgabenspezifischen didaktischen Kommentaren.

Wie in den vorstehenden Abschnitten beschrieben, soll das Ausführen von Verfahren im Unterricht nicht als Selbstzweck betrieben werden, wie es beim primär syntaktischen Arbeiten der Fall wäre. Vielmehr sollte gerade auch die entlastende Funktion von Formalisierungen herausgestellt werden, etwa indem bewusst ein Wechsel in eine formale Darstellung vollzogen wird (u. a. Cohors-Fresenborg, 1996; Cohors-Fresenborg, Sjuts & Sommer, 2004; Malle, 1993) oder indem im Falle auftretender Schwierigkeiten Begriffe, Methoden und Regeln anschaulich behandelt werden (Vollrath, 1994).

Hierfür eigenen sich Visualisierungen (zeichnerisch und/oder unter Zuhilfenahme von Material wie z. B. Zahlplättchen oder Cuisenairestäbchen) oder auch Versprachlichungen von Termstrukturen. Ziel ist es, durch das Herstellen vielfältiger inhaltlicher Bezüge sowie durch die Wahl verschiedener Lösungswege bzw. verschiedener Problemlösestrategien kontinuierliche Wechsel zwischen Syntax und Semantik arithmetischer bzw. algebraischer Terme zu befördern, um nicht allein syntaktisch mit diesen zu operieren und allein nur Verfahren anzuwenden.

Ausgehend von der Schwierigkeit „Nichtbeachten von Prozedurhierarchien“ wird dies im Folgenden an einer Aufgabe mit bewusst einfach gewählten Zahlen exemplarisch konkretisiert. Tritt diese Schwierigkeit auf, so können Terme z. B. unter Hinzunahme von Zahlplättchen und unterstützt durch die Versprachlichung von Handlungen mit diesen bearbeitet werden. Stehen keine Zahlplättchen zur Verfügung, können ebenso entsprechende ikonische Darstellungen angefertigt werden.

Üblicherweise bereitet der Term $4 \cdot 3 + 5$ weniger Schwierigkeiten als der gleichwertige Term $5 + 4 \cdot 3$, da bei letzterem nicht schlicht von links nach rechts gerechnet werden kann (Fehllösung 27), sondern Prozedurhierarchien zu beachten sind. Um deren Erkennen zu unterstützen, kann man den Term $5 + 4 \cdot 3$ zunächst mithilfe von Zahlplättchen veranschaulichen (Abbildung 11).

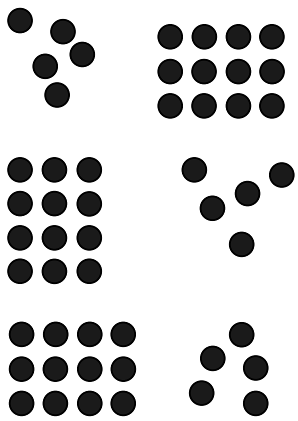


$5 + 4 \cdot 3$

Grafik: © IQB

Abbildung 11

Dabei werden erst 5 Plättchen gelegt und dann kommen noch 4 Reihen zu je 3 Plättchen hinzu. Durch schlichtes Abzählen der Anzahl der insgesamt gelegten Plättchen (17) kann das rechnerische Ergebnis kontrolliert werden. Auch ein Versprachlichen der Teilhandlungen, die ihre Entsprechung in den rechnerischen Teilprozeduren finden, hilft die zugrundeliegende Hierarchie dieses Terms zu erkennen: „Man legt erst fünf Plättchen und dann noch viermal drei Plättchen hinzu“. Dieses Hin- und Herwechseln zwischen der bildlichen Darstellung, der sprachlichen Darstellung und dem Term macht deutlich, dass zunächst das Produkt $4 \cdot 3$ zu bilden und dessen Wert dann zu 5 zu addieren ist.



$5+3\cdot4$

$4\cdot3+5$

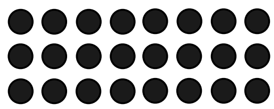
$3\cdot4+5$

Grafik: © IQB

Abbildung 12

Ein Umordnen der beiden Teilfiguren aus Abbildung 11 mit jeweils 12 bzw. 5 Plättchen führt zu drei weiteren Darstellungen (Abbildung 12), aus denen sich die zugehörigen wertgleichen Terme ablesen lassen: $5+4\cdot3$, $4\cdot3+5$, $3\cdot4+5$. Auch in diesen Darstellungen sind die Teilprozeduren „Produkt bilden“ und „Summe bilden“ erkennbar. Schließlich lässt sich die Wertgleichheit aller vier Terme mit Bezug zum Kommutativgesetz für die Multiplikation bzw. für die Addition begründen.

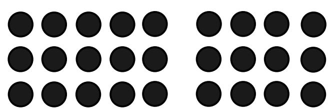
Werden hingegen die Teilprozeduren nicht erfolgreich identifiziert und wird für den Term die $5+4\cdot3$ naheliegende Fehllösung 27 ermittelt, lässt sich beispielsweise überlegen, wie der Term zu verändern ist, damit 27 tatsächlich dessen Lösung ist. Der zugehörige Term lässt $(5+4)\cdot3$ sich ebenfalls mit Bezug zu Darstellungen mit den Zahlplättchen erarbeiten (Abbildung 13, Abbildung 14).



$3\cdot9$

Grafik: © IQB

Abbildung 13



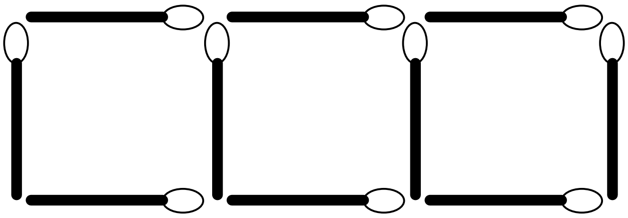
$(5+4)\cdot3$

Grafik: © IQB

Abbildung 14

Doch nicht nur arithmetische Terme lassen sich gut unter Zuhilfenahme geeigneter Darstellungen semantisch deuten. Dies kann ebenso mit algebraischen Termen geschehen. Für solche Darstellungen eignen sich zum Beispiel Strecken oder Rechtecke (vgl. z. B. Didaktischen Kommentar zur Aufgabe „Richtig umgeformt“). Alternativ können auch die durch Terme beschriebenen Objekte hergestellt werden (vgl. z. B. Didaktischen Kommentar zur Aufgabe „Ohrhänger“).

Auch am Beispiel von Streichholzfiguren können wechselseitige Übersetzungen zwischen algebraischen Termen und deren Darstellung vorgenommen werden. Als Ausgangspunkt hierfür kann der Impuls in Abbildung 15 dienen.



Grafik: © IQB

Abbildung 15

Das Bild zeigt drei Quadrate, die aus zehn Streichhölzern gelegt wurden.

Folgende Aufgaben können zu dieser Figur gestellt und mit direktem Bezug zur gegebenen Figur beantwortet werden:

a) Wie viele Streichhölzer benötigt man, um zwei Quadrate zu legen? Notiere einen passenden Term.
b) Wie viele Streichhölzer benötigt man, um vier Quadrate zu legen? Notiere einen passenden Term.
c) Wie viele Streichhölzer benötigt man, um fünf Quadrate zu legen? Notiere einen passenden Term.
d) Wie viele Streichhölzer benötigt man, um 20 Quadrate zu legen? Notiere einen passenden Term.
e) Gib einen Term an, mit dem sich die Anzahl der benötigten Streichhölzer für eine beliebige Anzahl von Quadraten berechnen lässt.

Die erste Teilaufgabe lässt sich durch unmittelbaren Bezug zur Figur lösen. Die Teilaufgaben b) und c) erfordern eine gedankliche Fortsetzung der Figur. Auch d) könnte noch durch konkretes Handeln oder durch zeichnerische Fortsetzung der Figur gelöst werden, verlangt jedoch im Grunde genommen schon eine Verallgemeinerung der zugrunde liegenden Struktur, in der zum Beispiel der hier noch arithmetische Term $3 \cdot 20 + 1$ die gesuchte Anzahl liefert. Bezeichnet man mit n die Anzahl der Quadrate, so erhält man durch weitere Formalisierung $3 \cdot n + 1$ als einen denkbaren Term, mit Hilfe dessen die Anzahl der benötigten Streichhölzer errechnet werden kann.

Auch anhand räumlicher Figuren, die z-B. mit Holzwürfeln (sog. Somawürfeln) gelegt werden, können Formalisierungen vorgenommen werden. Ein Beispiel ist Abbildung 16 zu entnehmen:

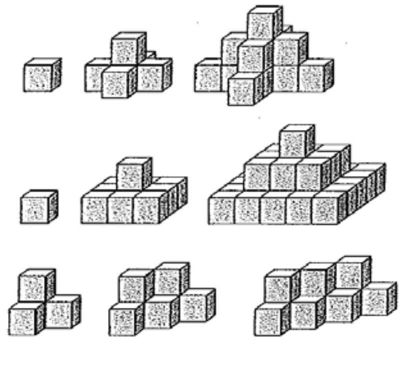
	Die abgebildeten Körper sind mit kleinen Würfeln nach 3 Prinzipien gebaut worden. Baue die Körper nach und setze sie fort. a) Wie viele Würfel benötigst du jeweils für den nächsten Schritt? b) Wie viele Würfel würdest du für den zehnten, zwanzigsten, hundertsten, n-ten Körper benötigen?

Abbildung 16: Aufgabe „Formeln entdecken“ (nach: Henn, Hans-Wolfgang und Büchter, Andreas (Hrsg.): Der Mathekoffer, Zahlen/Terme/Gleichungen, Karte 17., © 2008 Friedrich Verlag GmbH, Seelze).

6. Resümee

Die hier vorgestellten theoretischen Überlegungen und unterrichtlichen Anregungen sollen auch bei der Kompetenz „Technisches Arbeiten“ zum bewussten und reflektierten Umgehen mit einzelnen Teilkompetenzen beitragen, um Schülerschwierigkeiten bei der Aufgabenbearbeitung besser zu erkennen und schließlich reduzieren zu können. Der Aufbau der Teilkompetenzen kann allerdings – wie bei allen anderen Kompetenzen auch – nur langfristig erfolgen. Es erfordert deren gezieltes Üben und Festigen in einem qualitätsvollen Unterricht, der u. a. im Hinblick auf die fortwährende Entwicklung inhalts- und prozessbezogener Kompetenzen fachlich gehaltvoll gestaltet ist und die Schülerinnen und Schüler kognitiv aktiviert (vgl. Blum, 2006).

7. Kommentiertes Literaturverzeichnis

7.1 Zitierte Literatur

Blum, W. (2001). Was folgt aus TIMSS für Mathematikunterricht und Mathematiklehrerausbildung? In E. Klieme & J. Baumert (Hrsg.), *TIMSS - Impulse für Schule und Unterricht. Forschungsbefunde, Reforminitiativen, Praxisberichte und Video-Dokumente* (S. 75-83). Bonn: Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF).

Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. *mathematik lehren*, *128*, 18-21.

Blum, W. (2006). Die Bildungsstandards Mathematik. Einführung. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 14-32). Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Bromme, R., Seeger, F. & Steinbring, H. (1990). *Aufgaben, Fehler und Aufgabensysteme Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler* (Bd. 14, S. 1-30). Köln: Aulis Verlag Deubner.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2008). DER MATEHKOFFER. Friedrich Verlag, Seelze.

Bund-Länder-Kommission. (1997). *Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts"* (Nr. 60). Bonn.

Cohors-Fresenborg, E. (1996). Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation. In W. Dörfer & R. Fischer (Eds.), *Trends und Perspektiven* (Bd. 23, S. 85-90). Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky.

Cohors-Fresenborg, E., Sjuts, J. & Sommer, N. (2004). Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000* (S. 109-144). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Drüke-Noe, C. (erscheint 2014). *Empirische Untersuchungen zur Aufgabenkultur in Klassenarbeiten neunter und zehnter Klassen im Fach Mathematik*. Wiesbaden: Springer.

Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen *Praxis der Mathematik in der Schule. Sekundarstufen I und II, 33*(52), 1-7.

Hefendehl-Hebeker, L. (2004). *Perspektiven für einen künftigen Mathematik*unterricht. Duisburg: Universität Duisburg-Essen.

Kultusministerkonferenz (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss* Darmstadt: Luchterhand.

Kultusministerkonferenz (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss* Darmstadt: Luchterhand.

Kultusministerkonferenz (2011). Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss und den Mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik.

Kunter, M., Dubberke, T., Baumert, J., Blum, W., Brunner, M., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Löwen, K., Neubrand, M., Tsai, Y.-M. (2006). Mathematikunterricht in den PISA-Klassen 2004: Rahmenbedingungen, Formen und Lehr-Lernprozesse. In P.-K. Deutschland (Hrsg.), *PISA 2003. Untersuchungen zur Kompetenzentwicklung im Verlauf eines Schulj*ahres (S. 161-194). Münster: Waxmann.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg.

Neubrand, M., Klieme, E., Lüdtke, O. & Neubrand, J. (2002). Kompetenzstufen und Schwierigkeitsmodelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung. *Unterrichtswissenschaft*, *30*(1), 100-119.

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht*. Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Sjuts, J. (2007). Kompetenzdiagnostik im Lernprozess - auf theoriegeleitete Aufgabengestaltung kommt es an. *mathematica didactica*, 30(2), 33-52.

Vollrath, H.-J. (1994). *Algebra in der Sekundarstufe*. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag.

Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 7*, 106-116.

Wittmann, E. C. (1990). Wider die Flut der "bunten Hunde" und der "grauen Päckchen": Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In E. C. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen* (S. 152-166). Stuttgart: Klett Verlag.

7.2 Themenbezogene Fachzeitschriften und unterrichtspraktische Artikel

Affolter, W. (2009). „Ist das jetzt Algebra?". *Praxis der Mathematik in der Schule. Sekundarstufen I und II, 29*(51), 14-16.
In einer Lernumgebung werden unterschiedliche Schienenteile (kurze, lange, gebogene) zu verschiedenen Schienennetzen zusammengebaut. Mit Bezug zu den einzelnen Bauteilen wird das Aufstellen, Interpretieren und Umformen von Termen geübt und Rechengesetze werden dabei angewendet.

Barzel, B. & Herget, W. (Hrsg.) (2006). *mathematik lehren*, Terme, 136, Friedrich Verlag, Velber.

Barzel, B. & Holzäpfel, L. (Hrsg.) (2011). *mathematik lehren*, Gleichungen verstehen, 169, Friedrich Verlag, Velber.

Buer, A., Klus, A., Küsgens, V., Klapp, H. & Huse, C. (2008). Term ärgere mich nicht. Spielend den Umgang mit Termen üben. *Praxis der Mathematik in der Schule. Sekundarstufen I und II, 22*(50), 14-17.
Im Übungsspiel „Term ärgere mich nicht", einer Adaption von „Mensch ärgere dich nicht", werden Zahlen gewürfelt und direkt in Terme eingesetzt. Abhängig vom Wert des Terms rückt man auf dem Spielfeld vor oder zurück.

Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (Hrsg.) (2010). Mehr als Umformen – algebraisch denken. *Praxis der Mathematik in der Schule. Sekundarstufen I und II*, 33 (52). Aulis Verlag, Hallbergmoos.

Hormann, H.-C. (2010). Jahreszahl-Terme im Wettbewerb. *mathematik lehren, 163*, 12-14.
In einer wettbewerbsähnlichen Situation werden Jahreszahlen durch Terme dargestellt, in denen nur eine einzige Ziffer verwendet werden darf. Der Vergleich wertgleicher Terme und die Anwendung von Rechengesetzen werden geübt.

Jaschke, T. (2009). Vom Bild zum Term. Geometrie hilft Algebra verstehen. *mathematik lehren, 154*, 10-11.
Mit verschiedenen Hilfsmitteln (u.a. Zahlplättchen, Holzstäbchen, Holzwürfel) werden Terme geometrisch veranschaulicht und gedeutet.

Köppen, J., & Stoye, W. (2003). Eine Kopiervorlage zum Arbeiten mit Variablen. *Praxis der Mathematik in der Schule. Sekundarstufen I und II, 1*(45), 20-22.
Es wird eine Kopiervorlage vorgestellt, anhand derer insbesondere leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler die Anwendung von Vorrangregeln beim Umgehen mit Termen üben können.

Landgraf, V. (2013). Das Boxenmodell. Ein handlungsorientierter Zugang zu linearen Gleichungen *mathematik lehren, 176*, 46-48.
Zur Einführung in die Gleichungslehre wird ein Modell aus Streichhölzern und deren Schachteln verwendet, mit dem Gleichungen und deren Umformungen anschaulich dargestellt werden.

Vernay, R. (2009). Wer ist Mr. X? Variablen, Terme, Gleichungen. *Mathematik. Unterricht - Aufgaben - Materialien, 6*. Kallmeyer bei Friedrich, Velber.

7.3 Arbeitsmaterialien für Schülerinnen und Schüler

Barzel, B., Monreal, D., & Lassek, K. (2006). Lernwerkstatt Terme. *mathematik lehren. MatheWelt. 136*.
Das Schülerarbeitsheft enthält materialgestützte Übungen, die z. B. im Stationenlernen oder in Freiarbeit bearbeitet werden können und Rätsel, Muster und Puzzles zu Termen aufgreifen.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2008). DER MATEHKOFFER. Friedrich Verlag, Seelze.
Der Mathekoffer enthält u.a. den „Teilkoffer“ „Zahlen, Terme, Gleichungen“, der zu den genannten Teilbereichen Aufgaben und konkretes Arbeitsmaterial enthält.

Jaschke, T. (2009). Terme geometrisch multiplizieren. *mathematik lehren. MatheWelt. Das Schülerarbeitsheft 154*.
Das Schülerarbeitsheft enthält aufeinander aufbauende Übungen (mit Lösungen) zum Ausmultiplizieren und Ausklammern, zum Multiplizieren von Summen sowie zu Binomischen Formeln. Geometrische und algebraische Darstellungen werden durchgängig verknüpft.

Kröger, R. & Hilgers, A. (2011). Lineare Gleichungen vielfältig üben. *mathematik lehren. MatheWelt. 169*.
In verschiedenen Übungsformaten, zu denen auch Spiele gehören, kann das Umgehen mit linearen Gleichungen geübt werden.

Vernay, R. (2009). Wer ist Mr. X? Variablen, Terme, Gleichungen. *Materialpaket. Mathematik. Unterricht - Aufgaben - Materialien, 6*. Kallmeyer bei Friedrich, Velber.
Das Materialpaket zum Heft enthält konkrete Arbeitsmaterialien (u.a. Streichhölzer, Klebepunkte, Termplättchen, Kopiervorlagen) für die Arbeit mit Variablen, Termen und Gleichungen.