Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten 2013
8. Jahrgangsstufe (VERA-8)
Mathematik – Didaktische Handreichung
Modul B

Didaktische Erläuterung

Darstellungen verwenden

Inhaltsverzeichnis

1. Allgemeine Erläuterungen zu VERA-8 im Fach Mathematik

In VERA-8 Mathematik werden im Jahr 2013 alle Leitideen getestet. Daher werden die wesentlichen Komponenten der Bildungsstandards Mathematik sowie die hierzu empirisch konstruierten Kompetenzstufen kurz dargestellt. Danach wird eine der mathematischen Kompetenzen, das Verwenden von mathematischen Darstellungen, anhand von typischen Aufgaben ausführlich erläutert und Hinweise zur unterrichtlichen Behandlung gegeben. Schließlich werden einige allgemeine Überlegungen skizziert, wie das Fach Mathematik so unterrichtet werden kann, dass gute Chancen auf die Erreichung der durch die Standards vorgegebenen Ziele bestehen.

2. Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards

2.1 Die Bildungsstandards Mathematik

Die Bildungsstandards beschreiben die fachbezogenen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler[1] bis zu gewissen Zeitpunkten ihrer Schullaufbahn erworben haben sollen. Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die nur in aktiver Auseinandersetzung mit substantiellen Fachinhalten erworben werden können. Illustriert und konkretisiert werden solche Kompetenzen durch Aufgaben, zu deren Lösung diese Kompetenzen benötigt werden. Das wesentliche Ziel von Bildungsstandards ist es, die Qualität des Unterrichts zu steigern und dadurch die Leistungen und fachbezogenen Einstellungen aller SuS zu verbessern. Daneben sollen die Standards eine Orientierung über verbindliche Zielerwartungen bieten ebenso wie Möglichkeiten zur Überprüfung, inwieweit diese Ziele bis zu definierten Punkten in Bildungsgängen erreicht worden sind. Konkret werden bei den Bildungsstandards Mathematik für den mittleren Schulabschluss drei „Dimensionen“ unterschieden, die man als „Prozess-“, „Inhalts-“ und „Anspruchsdimension“ bezeichnen kann:

Die „Prozessdimension“ besteht aus den allgemeinen mathematischen Kompetenzen, deren Erwerb im Mittelpunkt des Unterrichts stehen soll; im Einzelnen sind dies[2]:

- Mathematisch argumentieren (K1),
- Probleme mathematisch lösen (K2),
- Mathematisch modellieren (K3),
- Mathematische Darstellungen verwenden (K4),
- Mit symbolischen/formalen/technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5),
- Mathematisch kommunizieren (K6).

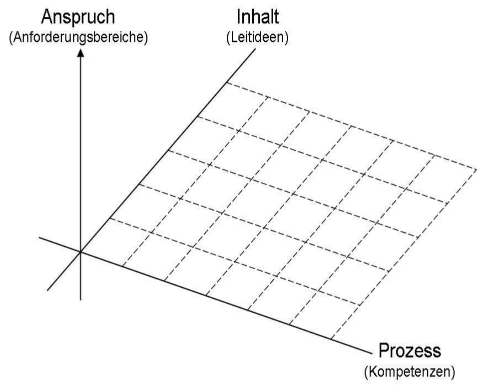


Abbildung. 1: Kompetenzmodell

Diese Aufschlüsselung von „mathematischer Kompetenz“ in einzelne Kompetenzen soll eine gezielte Entwicklung dieser Fähigkeiten und Fertigkeiten ermöglichen. Dabei ist es weder möglich noch beabsichtigt, die einzelnen Kompetenzen scharf voneinander abzugrenzen. Vielmehr ist es geradezu typisch für

[1]Im Folgenden als SuS abgekürzt.
[2] Genauer werden die Kompetenzen im Buch „Bildungsstandards Mathematik: konkret“ (Hrsg. W. Blum u.a., Cornelsen-Scriptor 2006) beschrieben.

mathematisches Arbeiten, dass mehrere Kompetenzen im Verbund benötigt werden und sich die verschiedenen Kompetenzen gegenseitig durchdringen. Parallel zum Erwerb von Kompetenzen sind im Unterricht auch mathematisches Grundwissen sowie Grundvorstellungen von mathematischen Begriffen und Methoden langfristig aufzubauen.

Die „Inhaltsdimension“ wird bestimmt von den inhaltsbezogenen Leitideen, anhand derer die Kompetenzen erworben werden sollen; im Einzelnen sind dies:

- Leitidee Zahl (L1),
- Leitidee Messen (L2),
- Leitidee Raum und Form (L3),
- Leitidee funktionaler Zusammenhang (L4),
- Leitidee Daten und Zufall (L5).

Innerhalb dieser Leitideen gibt es konkrete Inhalte, die sogenannten inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen, die typischerweise zum mathematischen Schulcurriculum gehören und mit deren Hilfe die allgemeinen mathematischen Kompetenzen erworben werden sollen. Die – eher „phänomenologisch“ orientierten – Leitideen sind nicht identisch mit den klassischen Stoffgebieten der Schulmathematik (Zahlen und Größen, Geometrie, Algebra, Stochastik), es gibt aber offensichtliche enge Beziehungen zwischen Leitideen und Stoffgebieten. Die Strukturierung der Inhalte nach Leitideen soll stärker als bisher die Verbindungen zwischen den verschiedenen Stoffgebieten betonen (z. B. funktionale Beziehungen im geometrischen Kontext).

Die „Anspruchsdimension“ ergibt sich aus den Anforderungsbereichen, die den kognitiven Anspruch kompetenzbezogener mathematischer Tätigkeiten – vor allem beim Bearbeiten von Aufgaben – auf theoretischer Ebene beschreiben sollen. Bei den Mathematik-Standards unterscheidet man pragmatisch drei solche Anforderungsbereiche (d. h. Anspruchsniveaus), die kurz mit

- Reproduzieren (AB I),
- Zusammenhänge herstellen (AB II),
- Verallgemeinern und reflektieren (AB III)

überschrieben sind. Natürlich sind die Übergänge zwischen diesen Bereichen fließend. Je nachdem, wie viele Kompetenzen auf welchen dieser Anspruchsniveaus gefordert sind, werden Aufgaben einem der drei Anforderungsbereiche zugeordnet[3] Dieses theoretische Anspruchsniveau einer Aufgabe darf keinesfalls mit der empirischen Schwierigkeit der Aufgabe verwechselt werden (wobei kognitiv anspruchsvollere Aufgaben natürlich tendenziell auch schwieriger sind; mehr dazu im folgenden Abschnitt).

Bildungstheoretische Grundlage dieses dreidimensionalen „Kompetenzmodells“ ist der Allgemeinbildungsauftrag des Unterrichtsfachs Mathematik, wie er prägnant von Heinrich Winter beschrieben worden ist (Winter 2003). Hierauf beziehen sich die von der KMK verabschiedeten Bildungsstandards Mathematik in ihrer Präambel ausdrücklich: SuS sollen im Mathematikunterricht drei Grunderfahrungen kennenlernen, nämlich Mathematik als Werkzeug, um Erscheinungen der Welt um uns in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen, als geistige Schöpfung und Welt eigener Art, sowie als Hilfsmittel zum Erwerb fachbezogener und fachübergreifender Fähigkeiten.

[3] Siehe die Tabelle am Anfang der didaktischen Handreichung.

Selbstverständlich kann und soll Bildung nicht auf fachbezogene kognitive Leistungen eingeschränkt werden; vielmehr schließt eine umfassende schulische Bildung u.a. auch soziale Kompetenzen sowie motivationale und emotionale Faktoren mit ein. Dies wird im nächsten Abschnitt exemplarisch deutlich, wenn es um die Förderung von Problemlösekompetenz geht.

2.2 Kompetenzstufen im Fach Mathematik

Die im Abschnitt dargestellte Konzeption der Bildungsstandards Mathematik ist theoretischer Natur. Interessant ist nun natürlich zu wissen, wie schwierig einzelne Aufgaben tatsächlich sind und was SuS verschiedener Altersstufen und verschiedener Bildungsgänge in Bezug auf diese Aufgaben tatsächlich „können"; hierfür braucht man empirische Daten. Damit kann man dann sowohl die Aufgaben – nach Schwierigkeit – als auch die SuS – nach Leistungsfähigkeit – gewissen „Stufen" zuordnen, was allen Beteiligten hilfreiche Orientierungen geben kann.

Der VERA-8-Test ist aus Aufgaben zusammengesetzt, die an einer repräsentativen Stichprobe von annähernd 3000 SuS der achten Klasse erprobt worden sind. Die Ergebnisse sind dann mithilfe gängiger statistischer Verfahren auf eine Skala mit Mittelwert 500 und Standardabweichung 100 transformiert worden[4]. Jeder Aufgabe ist hierdurch also ein solcher Kennwert, der ein Maß für die relative Schwierigkeit der Aufgaben ist, zugeordnet. Leichte Aufgaben haben somit auf dieser Skala Kennwerte von 400 und darunter, schwierige Aufgaben Kennwerte von 600 und darüber. Selbstverständlich stellt das, was als „leicht" oder „schwer" eingestuft wird, nur eine Momentaufnahme dar, die zu einem späteren Zeitpunkt – je nach unterrichtlichen Schwerpunktsetzungen – auch anders ausfallen kann.

Wie ebenfalls in Modul A ausgeführt, kann man die mathematische Kompetenz von SuS in direkte Beziehung zur Schwierigkeit von Aufgaben setzen und auf derselben Skala abbilden[5]. Auf diese Weise ist eine inhaltliche Beschreibung von bestimmten Intervallen auf dieser Skala, Kompetenzstufen genannt[6] und damit auch eine Setzung von Standards aufgrund inhaltlicher Kriterien möglich.

Ursprünglich ist diese Skala sowohl für den Mittleren Schulabschluss als auch für den Hauptschulabschluss – jeweils abschlussspezifisch – in je fünf solche Intervalle eingeteilt worden (jeweils „Kompetenzstufen 1 bis 5" genannt). Ein neu entwickeltes integriertes Kompetenzstufenmodell für den Haupt- und den Mittleren Schulabschluss, das sechs Stufen hat, ersetzt nun diese zunächst getrennt erarbeiteten Modelle. Dieses Vorgehen trägt der schulstrukturellen Entwicklung in vielen Ländern der Bundesrepublik Deutschland in den letzten Jahren Rechnung. Hierzu zählen die generelle Tendenz zu zweigliedrigen Schulsystemen sowie die Tendenz, den Mittleren Schulabschluss als den Regelabschluss der Sekundarstufe I anzusehen. Dies ist verbunden mit einer erhöhten Durchlässigkeit für SuS in Bildungsgängen, die regulär zum Hauptschulabschluss führen, d. h. mit der

[4] Diese Transformation ist im Grunde willkürlich und wurde in Anlehnung an die PISA-Studie gewählt.
[5] Genauer wurde die Skala der Bildungsstandards so normiert, dass SuS mit einem bestimmten Personen- (Fähigkeits-)Kennwert eine Aufgabe mit demselben Aufgaben- (Schwierigkeits-) Kennwert mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa zwei Drittel lösen kann.
[6] Dieser Begriff könnte insofern missverständlich sein, als Stufen der mathematischen Kompetenz von SuS gemeint sind, nicht Stufungen der einzelnen Kompetenzen. Man könnte vielleicht besser – bezogen auf die Aufgaben – von „Schwierigkeitsstufen" sprechen. Genauere Erläuterungen und detaillierte Beschreibungen zu den Kompetenzstufen für den Mittleren Schulabschluss einschließlich vieler illustrierender Beispiele finden sich im Buch „Bildungsstandards: Kompetenzen überprüfen. Mathematik Sekundarstufe I" (Hrsg. M. Katzenbach u.a., Cornelsen-Scriptor 2009, Kap. 3.4, S. 15ff).

Möglichkeit, nachträglich den Mittleren Schulabschluss zu erwerben. Die Kompetenzstufen in diesem neuen integrierten Modell tragen die Bezeichnungen 1A, 1B, 2, 3, 4 und 5. Dabei haben z. B. SuS aus Bildungsgängen, die zum Hauptschulabschluss führen, auf Stufe 1B (d. h. der zweiten der sechs Stufen) den Regelstandard erreicht, SuS, die mindestens einen Mittleren Schulabschluss anstreben, erst auf Stufe 2,und analog auch für Regel- und Maximalstandards.[7]

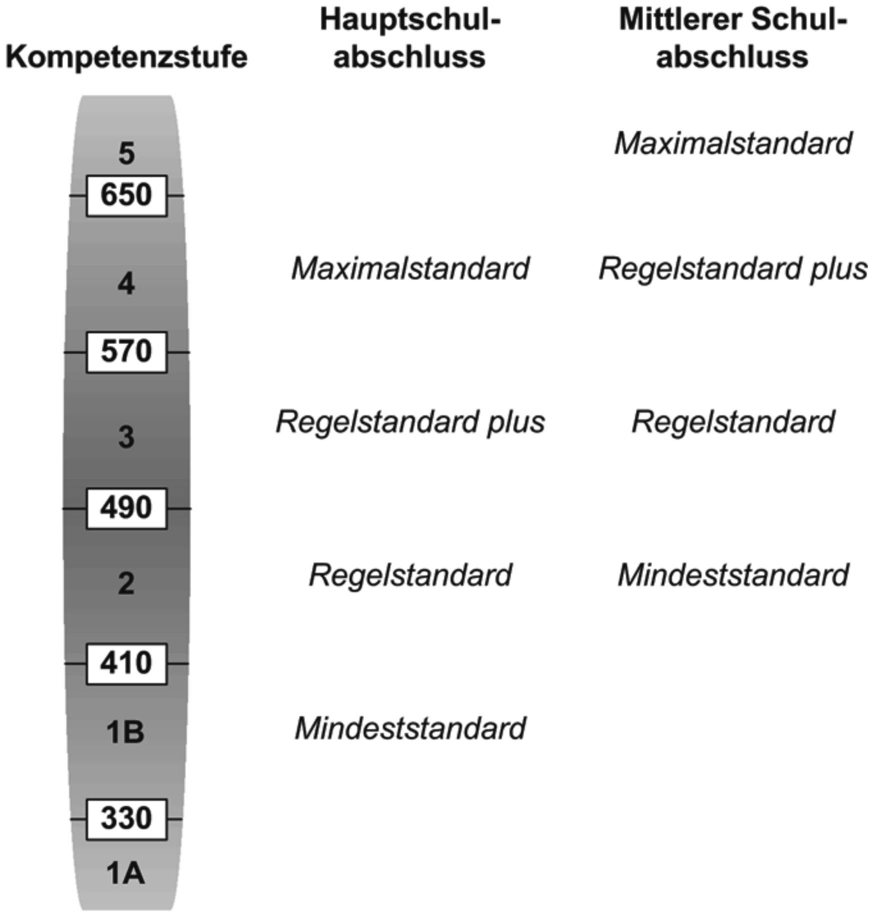


Abbildung 2: Lage von Mindest- und Regelstandards für die HSA- bzw. MSA-Population auf dem integrierten Kompetenzstufenmodell Mathematik

[7] Der Begriff „Maximalstandards“ wurde inzwischen durch den Begriff „Optimalstandards“ ersetzt.

In der folgenden Abbildung sind Beispielaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit den einzelnen Stufen zugeordnet worden.

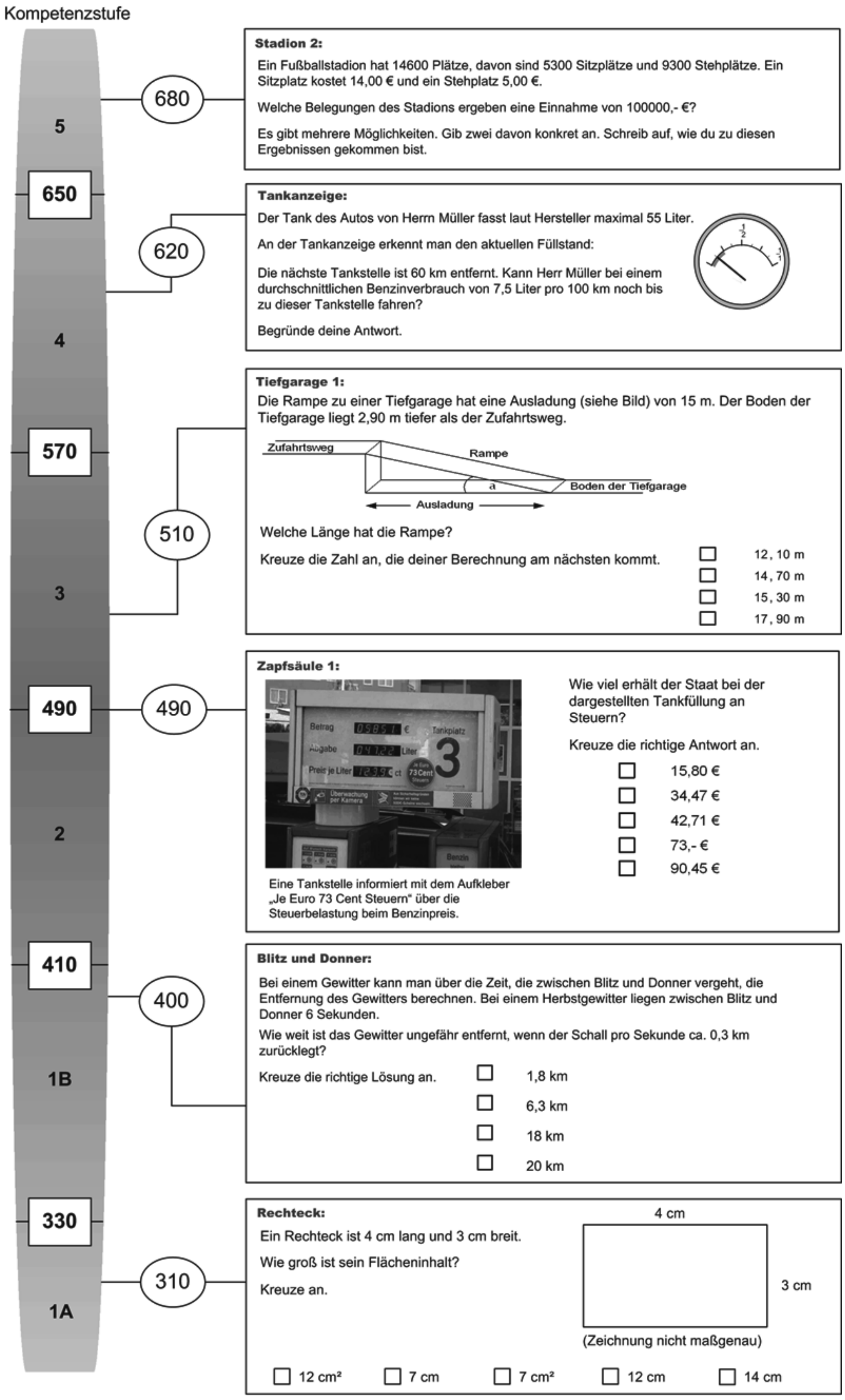


Abbildung 3: Illustration der Kompetenzstufen mithilfe von zugehörigen Beispielaufgaben.

Die unterste Kompetenzstufe (Kompetenzstufe 1A) wurde nach oben hin bei 330 Punkten begrenzt. Auf Stufe 1A (d. h. unterhalb von 330 Punkten) werden Kompetenzstände erreicht, die das Verfehlen der Mindestanforderungen für HSA-SuS indizieren. Kompetenzstufe 1B (ab 410 bis 490 Punkten) umfasst Kompetenzen, die typischerweise zu Beginn eines Hauptschulbildungsganges erreicht werden sollten. Dies bedeutet, dass auf Kompetenzstufe 1B basale Bereiche der Hauptschulmathematik beherrscht werden. Man kann hier von einem Mindeststandard für den Hauptschulbildungsgang sprechen. Es muss die Anstrengung aller Länder sein, alle SuS der Hauptschulbildungsgänge in absehbarer Zeit zumindest auf dieses Kompetenzniveau zu heben. Langfristig sollten aber alle Bestrebungen dahin gehen, das Bildungsminimum auch für diese SuS bei Kompetenzstufe 2 und damit analog zum Mindeststandard für die zum MSA führenden Bildungsgänge anzusetzen. Andernfalls besteht weiterhin die Gefahr, dass diese SuS selbst in einfachen mathematikhaltigen schulischen, alltäglichen oder beruflichen Situationen nicht ohne Hilfe zurechtkommen.

Der Regelstandard, den SuS zumindest im Durchschnitt erfüllen sollen, ist demgemäß für die SuS des Hauptschulbildungsgangs zurzeit auf der Kompetenzstufe 2 anzusetzen, während er für dien Mittleren Schaulabschluss auf Kompetenzstufe 3 (ab 490 Punkten) liegt. Wer den Regelstandard für den Mittleren Schulabschluss erfüllt, soll über „Sekundarstufe I-typische" mathematische Kompetenzen verfügen, die sowohl einen Beitrag dazu leisten, in Alltag und Beruf als „mündiger Bürger" zu handeln, als auch eine mathematische Grundbildung konstituieren, die u. a. elementare Begründungen, basale Begriffsbildungen und Standardmodellierungen mit einschließt. Dieser Regelstandard kann in der Kompetenzstufe 3 als erfüllt angesehen werden. Mit hinreichender Sicherheit können allerdings nur diejenigen SuS dem Regelstandard entsprechende Aufgaben lösen, die in der oberen Hälfte dieser Kompetenzstufe liegen.

Mit Erreichung der Kompetenzstufe 4 (ab 570 Punkten) werden bereits die Regelstandards für den Mittleren Schulabschluss überschritten. SuS in diesem Bereich verfügen über mathematische Kompetenzen, die über die grundlegenden Zielsetzungen der Bildungsstandards hinausgehen und ein Kompetenzniveau abbilden, das auf der Basis curricularer Vorgaben Ziel schulischen Unterrichts sein sollte. Will man ein Label für diese Stufe verwenden, so könnte man von Regelstandards plus für die MSA-Population sprechen. SuS aus Hauptschulbildungsgängen, die Leistungen auf Kompetenzstufe 4 zeigen, haben dagegen bereits das erwartbare Maximum in diesem Bildungsgang erzielt und erfüllen daher bereits auf dieser Stufe den HSA-Optimalstandard.

Deutlich anspruchsvollere Aufgaben liegen in Kompetenzstufe 5, die bei 650 Punkten beginnt. SuS die auch diese Aufgaben hinreichend sicher lösen können, bilden die Spitzengruppe und erreichen Optimalstandards, die wesentlich über die grundlegenden Ziele der Sekundarstufe I hinausgehen und höchstens unter optimalen Lehr-Lernbedingungen erreicht werden.

Das Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss und den Mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik finden Sie auf der Homepage des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) Berlin.

3. Beschreibung der zu testenden Kompetenzbereiche

In den VERA-8 Tests Mathematik werden **alle** oben beschriebenen allgemeinen mathematischen Kompetenzen und alle inhaltsbezogenen Leitideen getestet. Dabei wird bei VERA-8 Mathematik jedes Jahr eine der allgemeinen Kompetenzen besonders ausführlich in den Blick genommen. Im Mittelpunkt steht in diesem Jahr die Kompetenz **„Mathematische Darstellungen verwenden" (K4),** die im Folgenden kurz mit

„Darstellungen verwenden“ bezeichnet wird. Im ersten Abschnitt wird die Kompetenz „Darstellungen verwenden“ näher umschrieben. Zunächst wird sie am Beispiel konkreter Aufgaben und mit Bezug zu den drei in den Bildungsstandards Mathematik formulierten Anforderungsbereichen erläutert. Eine tabellarische Übersicht zeigt, welche Aufgaben in Mathematik VERA-8 2013 einzelne Teilkompetenzen von „Darstellungen verwenden“ erfordern (vgl. Abschnitt „Teilkompetenzen in den Aufgaben in VERA-8 Mathematik 2013“) und ein Bezug zum Kompetenzstufenmodell wird hergestellt (vgl. Abschnitt „Teilkompetenzen und ihre Zugehörigkeit zu Kompetenzstufen“).

Der zweite Abschnitt gibt einen Überblick über verschiedene Darstellungsarten. Dabei wird näher auf den Begriff der Darstellung eingegangen (vgl. Abschnitt „Was ist eine Darstellung? Einige Vorbemerkungen“), und es werden Beispiele gezeigt, die (keine) mathematischen Darstellungen sind (vgl. Abschnitt „Was ist gemäß Bildungsstandards (k)eine Darstellung?“). Im Weiteren werden statische und dynamische Darstellungen thematisiert, ebenso wie die Rolle digitaler Werkzeuge (vgl. Abschnitt „Statische und dynamische Darstellungen und die Rolle digitaler Werkzeuge“) und der Wechsel zwischen Darstellungen (vgl. Abschnitt „Darstellungswechsel“).

Im dritten Abschnitt werden einige typische Schwierigkeiten im Umgang mit Darstellungen benannt, die ihre Verwendung als Lernhilfe und Lerninhalt betreffen (vgl. Abschnitt „Darstellungen als Lernhilfe und Lerninhalt“), die Bedeutung von Konventionen und Manipulationen (vgl. Abschnitt „(Nicht-)Beachten von Konventionen sowie Manipulationen“), den sogenannten Graph-als-Bild-Fehler (vgl. Abschnitt „Graph-als-Bild-Fehler“) und die Frage nach dem Verbinden der Punkte eines Funktionsgraphen (vgl. Abschnitt „Verbinden der Punkte eines Graphen“).

Der vierte Abschnitt enthält ausgewählte Anregungen zum unterrichtlichen Umgang mit Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit „Darstellungen verwenden“ auftreten können. Detailliertere unterrichtliche Anregungen sowie spezifische Übungen sind den aufgabenspezifischen didaktischen Kommentaren zu entnehmen.

Am Ende folgt ein kommentiertes Literaturverzeichnis (vgl. Abschnitt „Zitierte Literatur“), ein Überblick über Artikel in themenbezogenen Zeitschriften (vgl. Abschnitt „Themenbezogene Fachzeitschriften“) und eine Übersicht über weiterführende Literatur (vgl. Abschnitt „Weiterführende Literatur“).

3.1 Die Kompetenz „Darstellungen verwenden“

3.1.1 Beschreibung der Kompetenz „Darstellungen verwenden“ in den Bildungsstandards

Zur Kompetenz „Darstellungen verwenden“ gehört „sowohl das Auswählen oder Erzeugen mathematischer Darstellungen als auch das Umgehen mit gegebenen Darstellungen. Hierzu zählen Diagramme, Graphen und Tabellen ebenso wie Formeln. Das Spektrum reicht von Standarddarstellungen wie Wertetabellen bis zur zweckgerichteten Erzeugung oder Beurteilung neuartiger Darstellungen. Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz können wie folgt beschrieben werden:

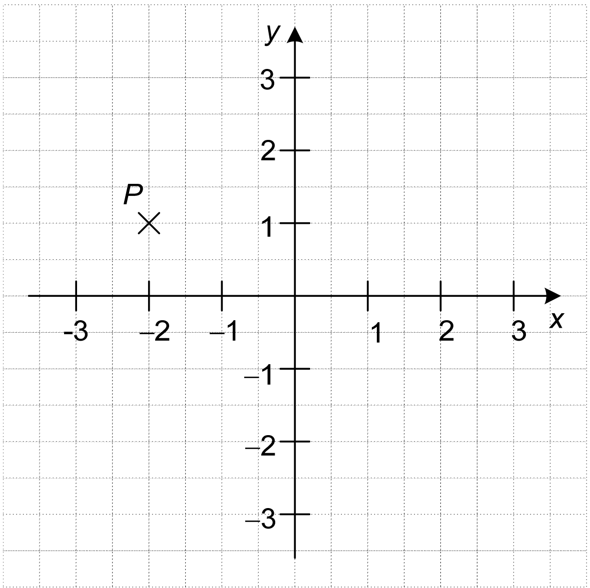
Anforderungsbereich I: Standarddarstellungen von mathematischen Objekten und Situationen anfertigen und nutzen.

Anforderungsbereich II: Gegebene Darstellungen verständig interpretieren oder verändern; zwischen zwei Darstellungen wechseln.

Anforderungsbereich III: Unvertraute Darstellungen verstehen und anwenden; eigene Darstellungsformen problemadäquat entwickeln; verschiedene Formen der Darstellung zweckgerichtet beurteilen.“[8]

Die folgenden vier Aufgaben (Abbildung 4 bis Abbildung 7) illustrieren für jeden der drei Anforderungsbereiche zentrale Aspekte dieser Kompetenz. In ihrer Abfolge machen diese Aufgaben zudem deutlich, wie das kognitive Anspruchsniveau von einem Anforderungsbereich zum nächsten ansteigt.

Punktgenau



Teilaufgabe 1

Welche Koordinaten hat der Punkt *P*?

Kreuze an.

☐ *P* (1 | –2)

☐ *P* (2 | 1)

☐ *P* (–2 | 1)

☐ *P* (–1 | 2)

Abbildung 4: Teilaufgabe 1 „Punktgenau“, VERA-8 Mathematik 2013.

In der Aufgabe „Punktgenau“ (vgl. Abbildung. 4) wird eine Standarddarstellung einer mathematischen Situation genutzt. Dies ist eine Teilkompetenz der Kompetenz „Darstellungen verwenden“, die in typischer Weise das kognitive Anspruchsniveau des Anforderungsbereichs I kennzeichnet. Im vorliegenden Beispiel sind die Koordinaten eines Punktes unmittelbar aus der gegebenen Darstellung abzulesen. Bei der Auswahl der richtigen Lösung ist zum einen zu beachten, dass dieser Punkt P im zweiten Quadranten liegt, zum anderen, in welcher Reihenfolge – gemäß Konvention – die x- und die y-Koordinate eines Punktes angegeben werden (vgl. hierzu auch Abschnitt „(Nicht-) Beachten von Konventionen sowie Manipulationen“).

Die folgende Aufgabe ist kognitiv komplexer und steht beispielhaft für eine Teilkompetenz im Anforderungsbereich II.

[8] Aus: Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss und den Mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik.

Passende Schuhe

Das Deutsche Schuhinstitut hat genauso viele Frauen wie Männer befragt, ob ihre Schuhe zu klein, passend oder zu groß sind (siehe Abbildung 1). Die Befragungsergebnisse beziehen sich jeweils auf 100 Frauen und 100 Männer.

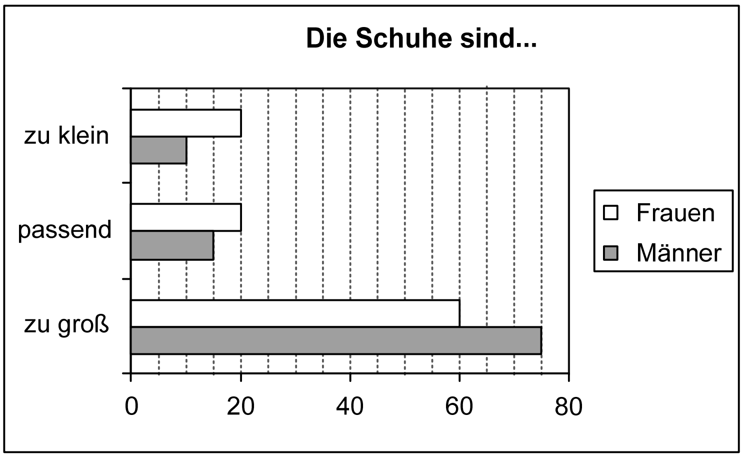


Abbildung 1

Teilaufgabe 2

Die im Balkendiagramm dargestellten Befragungsergebnisse der Frauen und Männer sollen in ein gemeinsames Kreisdiagramm übertragen werden (siehe Abbildung 2).

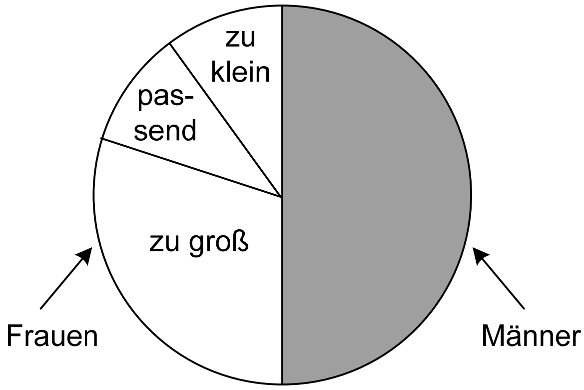


Abbildung 2

Wie viel Grad muss der Kreisausschnitt für den Anteil der Männer haben, denen die Schuhe zu groß sind?

Kreuze an.

☐	☐	☐	☐
37,5°	75°	135°	270°

Abbildung 5: Teilaufgabe 2 „Passende Schuhe“, VERA-8 Mathematik 2013.

Die Bearbeitung der Teilaufgabe 2 von „Passende Schuhe“ (vgl. Abbildung 5) erfordert den Wechsel zwischen zwei gegebenen Darstellungen. Es wurden zwei Personengruppen befragt (Frauen und Männer), und das Ergebnis dieser Befragung ist für beide in einem gemeinsamen Balkendiagramm dargestellt. In der hier gezeigten Teilaufgabe 2 soll das Befragungsergebnis in ein Kreisdiagramm übertragen werden. Dabei ist nicht dessen vollständige Übertragung gefordert, sondern es ist lediglich die Winkelgröße eines Kreisausschnittes gefragt. Ein solcher Wechsel zwischen zwei Darstellungen – hier: zwischen einem Balken- und einem Kreisdiagramm – bildet eine typische Teilkompetenz der Kompetenz „Darstellungen verwenden“, die den Anforderungsbereich II kennzeichnet.

Die folgenden zwei Aufgaben illustrieren Teilkompetenzen auf dem höchsten kognitiven Anspruchsniveau, dem Anforderungsbereich III. Die hier gezeigte Teilaufgabe 3 von „Tee wiegen“ (vgl. Abbildung 6) wird wegen der Unvertrautheit der Darstellung in diesen Anforderungsbereich eingeordnet.

Tee wiegen

Elvira und Sheila machen ein Berufspraktikum in einer Apotheke. Sie sollen eine größere Menge Kräutertee in Tüten abfüllen. In jeder Tüte sollen genau 75 g sein. Als sie fertig sind, wiegt die Apothekerin bei beiden jeweils 15 abgefüllte Tüten nach.

Hier sind die jeweils gewogenen Füllmengen (in Gramm), schon der Größe nach geordnet:

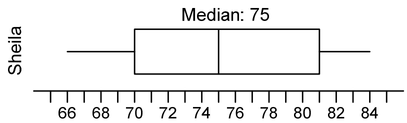
Elvira: 72, 72, 73, 74, 74, 74, 75, 75, 76, 76, 76, 77, 77, 78, 79

Sheila: 66, 67, 70, 70, 71, 73, 74, 75, 77, 78, 80, 81, 82, 83, 84

Teilaufgabe 3

Um Abweichungen graphisch darzustellen, benutzt man Boxplots. Hier siehst du noch einmal Sheilas Füllmengen (in Gramm), darunter den zugehörigen Boxplot.

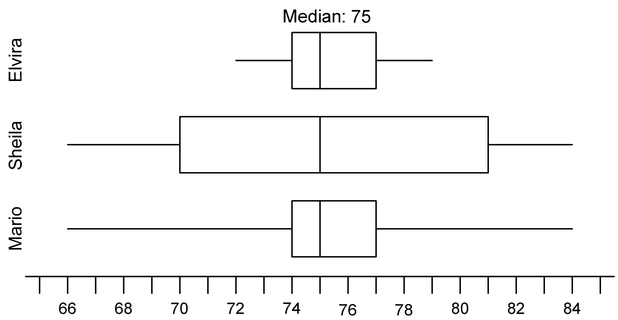
Sheila:	66	67	70	70	71	73	74	75	77	78	80	81	82	83	84



Als „Box“ bezeichnet man das Rechteck, als „Antennen“ die beiden waagerechten Striche links und rechts der Box.
Der Median [Zentralwert] (75) teilt die Datenliste in zwei gleich große Teillisten. Der Median der linken Teilliste (70) ist der linke Rand der Box, der Median der rechten Teilliste (81) ist der rechte Rand der Box. Die Antennen reichen bis zum kleinsten bzw. größten Wert der Datenliste (66 bzw. 84).

Mario hat auch noch 15 Tüten Tee abgefüllt.

Die Füllmengen der drei Jugendlichen werden hier zum Vergleich als Boxplots dargestellt.



Hier findest du einige Aussagen darüber, wie genau die Jugendlichen den Tee in die Tüten abgefüllt haben.

Kreuze bei jeder Aussage an, ob sie wahr oder falsch ist.

	wahr	falsch
Bei allen drei Jugendlichen entspricht jeweils der Median der Füllmengen der Sollmenge von 75 g.	☐	☐
Sheila und Mario haben gleich genau abgefüllt, weil ihre Antennen gleich lang sind.	☐	☐
Elvira und Mario haben gleich genau abgefüllt, weil ihre Boxen gleich breit sind.	☐	☐
Elvira hat sehr genau abgefüllt: Ihre Box ist schmal und die Antennen sind kurz.	☐	☐
Die Hälfte von Marios Tüten wiegt 74 g, 75 g, 76 g oder 77 g.	☐	☐

Abbildung 6: Teilaufgabe 3 „Tee wiegen“, VERA-8 Mathematik 2013.

Um Teilaufgabe 3 bearbeiten zu können, ist in einem ersten Schritt die Beschreibung einer (eher) unvertrauten Darstellung zu verstehen; dies ist der lesende Teil der Kompetenz „Mathematisches Kommunizieren“ (K6). Diese Beschreibung ist dann (bzw. während des Lesens) auf den Boxplot anzuwenden, was zur Kompetenz „Darstellungen verwenden“

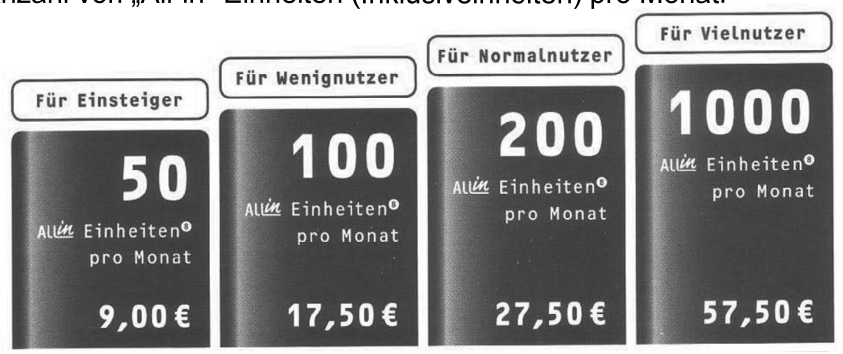
gehört. Dieses (wechselseitige) „Übersetzen“ zwischen einer beschreibenden Darstellung (Text und Rangliste) und einer bildlichen Darstellung (Boxplot) fällt aus kognitiver Sicht im Allgemeinen in den Anforderungsbereich II. Da es sich bei einem Boxplot jedoch um eine (noch) weitgehend unvertraute Darstellung handelt, kann diese Teilaufgabe bereits dem Anforderungsbereich III zugeordnet werden.

Einen anderen typischen Aspekt der Kompetenz „Darstellungen verwenden“ im höchsten Anforderungsbereich illustrieren schließlich die beiden folgenden Teilaufgaben der Aufgabe „Tarifvergleich“ aus VERA-8 Mathematik 2011 (vgl. Abbildung 7).

Tarifvergleich

Die folgende Grafik stammt aus einer Anzeige eines Mobilfunkanbieters.

Jeder Tarif hat eine bestimmte monatliche Grundgebühr und bietet dafür eine bestimmte Anzahl von „All-in“-Einheiten (Inklusiveinheiten) pro Monat.



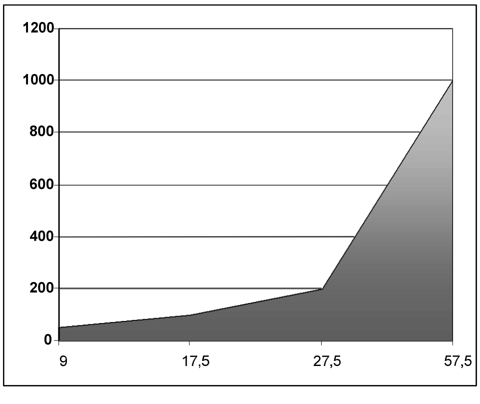
Teilaufgabe 1

Verena meint: „Die Höhen der Säulen in der Anzeige stimmen nicht."

Erläutere, was sie damit meint.

Teilaufgabe 3

Verena hat eine dritte Grafik entworfen.



Grafik 3

Grafik 3 vermittelt einen sachlich nicht ganz richtigen Eindruck.

Erläutere, woran das liegt.

Abbildung 7: Teilaufgabe 1 und 3 „Tarifvergleich“, VERA-8 Mathematik 2011.

Beide Teilaufgaben 1 und 3 verlangen Bewertungen graphischer Darstellungen, was typisch für Anforderungsbereich III ist. In Teilaufgabe 1 ist die Passung der Grafik, d. h. der Höhen der Säulen, zum Verhältnis der Anzahl der Freiminuten und der Höhe der Grundgebühr zu bewerten. Bei einer Bewertung der Darstellung in Teilaufgabe 3, in welcher der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Freiminuten und der Höhe der Grundgebühr bei den vier gegebenen Tarifen dargestellt werden soll, sollten zwei Aspekte auffallen. Zum einen sind die vier Datenpunkte miteinander verbunden, wodurch der Eindruck entsteht, es würde auch „Zwischentarife“ geben (vgl. hierzu die Abschnitte „(Nicht-)Beachten von Konventionen sowie Manipulationen“ und „Verbinden der Punkte eines Graphen“), zum anderen ist die horizontale Achse nicht äquidistant eingeteilt. Beide Teilaufgaben erfordern also kritische Auseinandersetzungen mit der Richtigkeit bzw. der Wirkung der abgebildeten Grafiken und illustrieren daher charakteristische Merkmale des Anforderungsbereichs III.

Die vorstehenden vier Aufgaben illustrieren je unterschiedliche Teilkompetenzen der Kompetenz „Darstellungen verwenden“. Sie machen in der Gesamtschau zudem deutlich, wie mit jedem höheren Anforderungsbereich die kognitive Komplexität der (Teil-)Kompetenzen, und damit meist auch die Schwierigkeit einer Aufgabe, die wiederum an ihrer Zugehörigkeit zu einer bestimmten Kompetenzstufe (vgl. Abschnitt „Teilkompetenzen und ihre Zugehörigkeit zu Kompetenzstufen“) erkennbar ist, zunimmt.

3.1.2 Teilkompetenzen in den Aufgaben in VERA-8 Mathematik 2013

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Teilkompetenzen der Kompetenz „Darstellungen verwenden“ mit Bezug zu den drei Anforderungsbereichen. In der dritten Spalte ist aufgeführt, welche Aufgaben aus VERA-8 Mathematik 2013 u. a. diese Teilkompetenzen bei ihrer Bearbeitung erfordern.

Anforderungs-bereiche	Teilkompetenzen	Aufgabenname
Anforderungs-bereich I	Standarddarstellungen von mathematischen Objekten und Situationen anfertigen und nutzen	Zwei Thermometeranzeigen Dreieckszahlen Flächeninhalt Winkel messen Akrobatik Deckungsgleiche Parallelogramme Punktgenau Quadrat im Koordinatensystem Schneekristalle Ecken an Pyramiden Geschwindigkeitsüberschreitung Güterverkehr Schokoladenpreis Säulenhöhe
Anforderungs-bereich II	Gegebene Darstellungen verständig interpretieren oder verändern	Passende Schuhe Unfertiger Würfel Lage der Würfel Treppenmaße

		Würfeln mit Quader
	Zwischen zwei Darstellungen wechseln	Passende Schuhe Dreieckszahlen Treppenmaße Im Kreis laufen Ampelkarte Würfeln mit Quader
Anforderungs-bereich III	Unvertraute Darstellungen verstehen und anwenden	Tee wiegen
	Eigene Darstellungsformen problemadäquat entwickeln	
	Verschiedene Formen der Darstellung zweckgerichtet beurteilen	

Tabelle 1:Teilkompetenzen von „Darstellungen verwenden“ in den drei Anforderungsbereichen.

3.1.3 Teilkompetenzen und ihre Zugehörigkeit zu Kompetenzstufen

Wie für die fünf anderen prozessbezogenen Kompetenzen lassen sich auch für „Darstellungen verwenden“ sogenannte Kompetenzerwartungen formulieren, die die bildungspolitischen Erwartungen aufzeigen und gleichzeitig pädagogischen Erfordernissen entsprechen (KMK 2011).

Innerhalb eines „Kompetenzstufenmodells“ sind Leistungserwartungen in gewissen (hier: sechs) Stufen beschrieben. Im Unterschied zu den theoriegeleitet beschriebenen Anforderungsbereichen einer Kompetenz (vgl. hierzu die Abschnitte „Beschreibung der Kompetenz „Darstellungen verwenden“ in den Bildungsstandards“ und „Teilkompetenzen in den Aufgaben in VERA-8 Mathematik 2013“) werden diese Kompetenzstufen aufgrund tatsächlicher empirischer Schwierigkeiten beschrieben. Die zugrunde gelegten empirischen Daten wurden mittels einer repräsentativen Stichprobe von SuS erhoben, die entsprechende Testaufgaben bearbeitet haben. Auf der untersten Kompetenzstufe (1A) befinden sich Aufgaben, die sehr viele SuS lösen konnten. Schwierige, nur von ganz wenigen richtig gelöste Aufgaben bilden die sechste Kompetenzstufe (5). Speziell für die Kompetenz „Darstellungen verwenden“ können diese sechs Stufen ganz grob folgendermaßen beschrieben werden:

Kompetenzstufe 1A: einfachste bekannte Darstellungen verwenden,

Kompetenzstufe 1B: bekannte Darstellungen verwenden,

Kompetenzstufe 2: einfache Darstellungen verwenden und Beziehungen zwischen zwei solchen herstellen,

Kompetenzstufe 3: Beziehungen zwischen unterschiedlichen Darstellungen herstellen,

Kompetenzstufe 4: eigene Darstellungen erstellen,

Kompetenzstufe 5: komplexe Darstellungen anfertigen bzw. Darstellungen kritisch beurteilen.

3.2 Verschiedene Darstellungsarten und der Umgang damit

3.2.1 Was ist eine Darstellung? Einige Vorbemerkungen

Darstellungen werden benötigt, um mathematische Objekte, die oft abstrakt sind, überhaupt fassbar und kommunizierbar zu machen. In diesem Abschnitt werden überblicksartig verschiedene Auffassungen von Darstellungen dargelegt.

Nach J. S. Bruner lassen sich drei Ebenen der Darstellung unterscheiden – die enaktive, die ikonische und die symbolische –, die alle drei gemäß Alter der SuS beim Lernen anzusprechen sind und sich durch einen zunehmenden Abstraktionsgrad auszeichnen. Auf der enaktiven Ebene werden mathematische Inhalte handelnd dargestellt, auf der ikonischen Ebene werden sie bildlich wiedergegeben, und auf der symbolischen Ebene werden sie durch Sprache oder durch Symbole ausgedrückt. Eine Beachtung der enaktiven, der ikonischen und der symbolischen Ebene kann genau in dieser Stufung oder durch den bewussten Wechsel zwischen diesen Darstellungsebenen erfolgen, denn gerade der Wechsel zwischen diesen ist zentraler Teil des Lernprozesses.

Allerdings unterscheidet sich diese Differenzierung in drei Ebenen davon, wie Darstellungen in den Bildungsstandards beschrieben werden, und es gibt einen definitorischen Unterschied zwischen der symbolischen Darstellungsebene im Sinne Bruners und einer symbolischen Darstellung im Sinne der Bildungsstandards. Symbolische Darstellungen, wie beispielsweise ein Funktionsterm oder eine Formel, werden in den Bildungsstandards eher durch die Kompetenz „Symbolisch/technisch/formal arbeiten“ (K5) erfasst. Wird hingegen eine Übersetzung zwischen einer symbolischen und einer nicht-symbolischen Darstellung vorgenommen, so gehört diese Tätigkeit zur Kompetenz „Darstellungen verwenden“ (K4).

Eine sehr weite Auffassung des Begriffes Diagramm vertritt Dörfler (2006), der sich mit der Rolle von Diagrammen im Mathematikunterricht auseinandersetzt. In seinen Ausführungen zitiert er die häufig zu lesende Charakterisierung, dass Mathematik abstrakt sei. Um nun aber über abstrakte mathematische Objekte reden zu können, bedürfe es, so Dörfler, einer sogenannten „Vermittlungsinstanz“ (ebd. 2006: 204). Zu dieser gehören „Repräsentationen, Darstellungen, Verkörperungen, Visualisierungen, Vergegenständlichungen, Materialisierungen“, aber auch, so Dörfler weiter, anschauliche Modelle der abstrakten Gegenstände (ebd. 2006: 204). Derartige Repräsentationen werden, so Dörfler, von Experten entworfen, die die mathematischen Objekte bereits gut kennen. Repräsentationen sollen in ihrer Funktion als (Hilfs-)Mittel den Zugang zu den mathematischen Objekten erläutern oder ihn überhaupt erst ermöglichen; gleichzeitig drücken sie nur etwas Abstraktes in mehr oder weniger geeigneter Weise aus, und sie sind „diesem Abstrakten nachgeordnet und sekundär“ (ebd. 2006: 204). Deshalb sei, so Dörfler weiter, deutlich erkennbar zwischen einer Darstellung und einem dargestellten abstrakten Objekt zu trennen. Dass genau diese Trennung SuS nicht immer gelingt, ist eine der Ursachen für Schwierigkeiten, die beim Umgehen mit Darstellungen entstehen (vgl. hierzu auch Abschnitt „Schwierigkeiten im Umgang mit Darstellungen“).

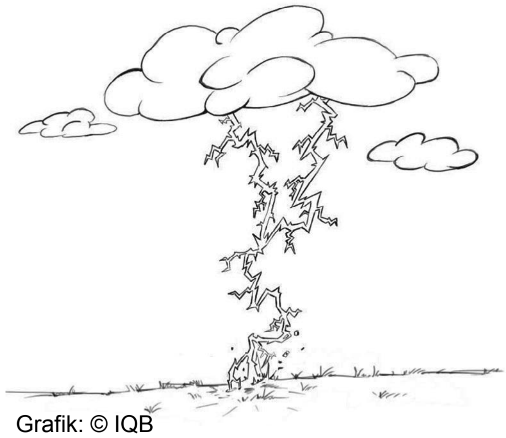
Von dieser grundlegenden Unterscheidung zwischen einer Darstellung und einem dargestellten Objekt ausgehend wird im folgenden Abschnitt ausgeführt, was im Sinne der Bildungsstandards (k)eine Darstellung ist.

3.2.2 Was ist gemäß Bildungsstandards (k)eine Darstellung?

Nicht jede Darstellung ist eine *mathematische* Darstellung im eben besprochenen Sinne (vgl. Abschnitt „Was ist eine Darstellung? Einige Vorbemerkungen“). Von letzteren abzugrenzen sind insbesondere jene, die lediglich illustrierende Funktion haben, und auch solche, aus denen nur lesend Informationen zu entnehmen sind. Dies zeigen die beiden folgenden Aufgaben exemplarisch. In der ersten Aufgabe „Gewitter“ (vgl. Abbildung 8) lassen sich die einzelnen Teilaufgaben, von denen hier nur die erste gezeigt wird, auch ohne die rein illustrierende Abbildung im einleitenden Impulstext bearbeiten, da an dieser keinerlei mathematikhaltige Aktivitäten ausgeführt werden.

Gewitter

Bei einem Gewitter sieht man den Blitz sofort und hört den dazugehörigen Donner erst später. Der Schall des Donners braucht etwa drei Sekunden, um einen Kilometer zurückzulegen.



Grafik: © IQB

Teilaufgabe 1

Ein Blitz ist zu sehen. Den Donner hört man nach 4,5 Sekunden.

Gib an, wie weit der Blitz ungefähr entfernt ist.

Der Blitz ist ungefähr _______ km entfernt.

Abbildung 8: Teilaufgabe 1 und 3 „Gewitter“, VERA-8 Mathematik 2013.

Ähnlich ist es bei der nachfolgenden Aufgabe „Gewerbezone“ (vgl. Abbildung 9), in der das Foto eines Schildes zu sehen ist, aus dem diverse Größenangaben zu entnehmen sind. Diese Angaben sind ebenfalls lediglich zu lesen, was eine Teilkompetenz von „Mathematisches Kommunizieren“ ist.

Foto: © IQB

Neben einer Bundesstraße wird mit diesem Plakat für eine neue Gewerbezone geworben.

Hinweis: 1 ha = 10 000 m^2

Abbildung 9: Abbildung aus Aufgabe „Gewerbezone“, VERA-8 Mathematik 2013.

Neben solchen allgemeinen Darstellungen, deren Bearbeitung keine mathematikhaltigen Aktivitäten erfordert, lassen sich quer über alle fünf Leitideen der Bildungsstandards zahlreiche Beispiele für Darstellungen finden, deren Bearbeitung mathematikhaltige Aktivitäten erfordert. Letztlich kann man erst dann davon ausgehen, dass ein Schüler bzw. eine Schülerin über die Kompetenz „Darstellungen verwenden“ wirklich verfügt, wenn er bzw. sie diese auf *alle* Inhalte anwenden kann. Dies stellt stets, auch bezogen auf die übrigen prozessbezogenen Kompetenzen, einen äußerst hohen Anspruch dar.

Im Folgenden werden einige Beispiele vorgestellt, die zeigen, dass die Kompetenz „Darstellungen verwenden“ quer über alle fünf mathematischen Leitideen realisierbar – und natürlich auch zusammen mit allen anderen prozessbezogenen Kompetenzen kombinierbar – ist. So ist diese Kompetenz im Rahmen der Leitidee Zahl (L1) erforderlich, wenn z. B. Zahlen in ikonischer Form dargestellt sind, wie etwa bei der Aufgabe „Dreieckszahlen“, und an solchen bildlichen Zahldarstellungen Zählungen auszuführen sind. Auch ein Zahlenstrahl oder ein Thermometer – wie z. B. in der Aufgabe „Zwei Thermometeranzeigen“ (vgl. Abbildung 10) – sind typische Beispiele für mathematische Darstellungen.

Zwei Thermometeranzeigen

Das linke Thermometer zeigt die Temperatur, die morgens gemessen wurde. Das rechte Thermometer zeigt die Temperatur, die mittags gemessen wurde.

Gib den Temperaturunterschied an.

Der Temperaturunterschied beträgt __________°C.

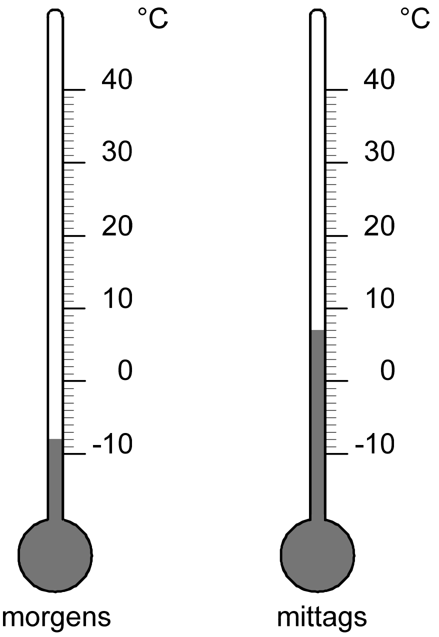
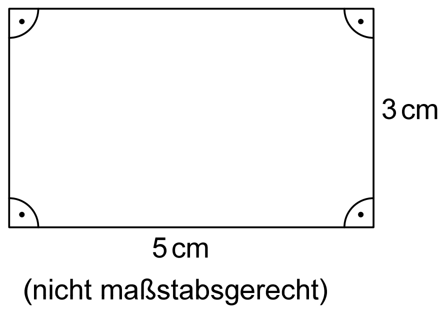


Abbildung 10: Aufgabe „Zwei Thermometeranzeigen“, VERA-8 Mathematik 2013

Innerhalb der Leitidee Messen (L2) sind Darstellungen typisch, aus denen Größenangaben zu entnehmen sind, teils auch durch konkretes Messen, mit denen im Weiteren dann rechnerisch umzugehen ist. Beispiele hierfür sind Abbildungen von Landkartenausschnitten, anhand derer Entfernungen oder ein Maßstab zu ermitteln sind. Auch Darstellungen ebener oder räumlicher Objekte kommen typischerweise innerhalb dieser Leitidee vor, wie etwa in der Aufgabe „Flächeninhalt“.

Flächeninhalt

Gib den Flächeninhalt dieser Figur an.



Der Flächeninhalt beträgt __________ cm^2.

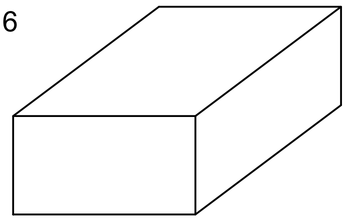
Abbildung 11: Aufgabe „Flächeninhalt“, VERA-8 Mathematik 2013.

Dagegen geht es bei Darstellungen, die innerhalb der Leitidee Raum und Form (L3) vorkommen, eher darum, mit den dargestellten ebenen bzw. räumlichen Objekten (gedanklich) zu operieren oder auch solche Darstellungen selber herzustellen. Beispiele hierfür sind u. a. das Einzeichnen von Figuren in ein Koordinatensystem, die Untersuchung ebener Objekte auf Symmetrien oder die Erkundung der Eigenschaften von Körpern (wie die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten von Polyedern), z. B. in gegebenen Schrägbildern.

Auch innerhalb der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ (L4) finden sich zahlreiche Darstellungen, die für diese Leitidee typisch sind. Hierzu gehören in erster Linie Graphen von Funktionen oder Relationen (vgl. hierzu auch die Aufgabe „Im Kreis laufen“ in Abbildung 18). Schließlich finden sich auch innerhalb der Leitidee „Daten und Zufall“ (L5) typische mathematikhaltige Darstellungen. Hierzu gehören u. a. Diagramme und Grafiken, die Ergebnisse einer Datenerhebung darstellen, wie etwa in Strichlisten, aber auch solche, die Ausfälle und Abläufe von Zufallsexperimenten darstellen, wie etwa Baumdiagramme oder Häufigkeitstabellen; ein solches Beispiel findet sich im einleitenden Text zur Aufgabe „Würfeln mit Quader“ in der folgenden Abbildung 12.

Würfeln mit Quader

Auf die Seitenflächen eines Quaders werden die Augenzahlen 1 bis 6 geschrieben. Nach 1000-fachem Werfen des Quaders ergab sich folgende Häufigkeitstabelle für die oben liegenden Augenzahlen:



Augenzahl	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit	242	75	179	161	87	256

Tabelle 1

Abbildung 12: Aufgabe „Würfeln mit Quadern“ , VERA-8 Mathematik 2013

Einige der vorgenannten mathematikhaltigen Darstellungen können statischer Natur sein, sie können aber auch dynamischer Natur sein. Auf Merkmale statischer und dynamischer Darstellungen gehen die folgenden Ausführungen ein.

3.2.3 Statische und dynamische Darstellungen und die Rolle digitaler Werkzeuge

Im Kontext von Mathematikaufgaben gibt es zahlreiche Darstellungen, die SuS in unveränderlicher Form begegnen – meist in Schulbüchern – und somit statisch sind. Daneben gibt es aber auch dynamische Darstellungen, die sich dadurch auszeichnen, dass sie veränderbar sind und man gezielt mit ihnen interagieren kann. Solche dynamischen Darstellungen können mit beweglichen „analogen“ Modellen erzeugt werden, oft werden sie aber auch mithilfe digitaler Werkzeuge erstellt. Auf letztere wird in diesem Abschnitt kurz und überblicksartig eingegangen. Dynamische Darstellungen in der Form beweglicher Modelle werden hier nicht weiter betrachtet.

Digitale Werkzeuge können die Erstellung unterschiedlicher Darstellungen – Tabelle, Bild, Graph, Formel – unterstützen und den flexiblen und je nach Bedarf nötigen Wechsel zwischen diesen erleichtern. Am ehesten für die achte Jahrgangsstufe geeignete digitale Werkzeuge sind wohl Tabellenkalkulationsprogramme, dynamische Geometriesoftware und Funktionenplotter bzw. solche digitalen Werkzeuge, die diese und weitere Funktionalitäten vereinen (wie z. B. das kostenfrei erhältliche Programm GeoGebra). Ein Tabellenkalkulationsprogramm gestattet es, Tabellen zunächst zu erstellen, dann mit ihrem Inhalt zu rechnen und diesen auch grafisch darzustellen sowie Wechselbeziehung-en zwischen diesen Darstellungen zu untersuchen. Einen deutlich anderen Schwerpunkt der Verwendung hat eine Dynamische Geometriesoftware. Mit dieser lassen sich geometrische Konstruktionen zwei- und dreidimensionaler Objekte erstellen, und diese Konstruktionen lassen sich dann, etwa durch „Ziehen“ an Objekten, gezielt variieren (vgl. hierzu auch Schmidt/Barzel 2008). Mit Funktionenplottern können vor allem Funktionsgraphen dargestellt werden. Diese verschiedenen digitalen Werkzeuge ermöglichen neben einer zeitökonomischen Erstellung grafischer Darstellungen insbesondere deren gezielte Variation sowie einen zügigen Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen (vgl. Barzel /Weigand 2008). Letzteres ist gerade auch ein Vorteil gegenüber der händischen Erstellung verschiedener Darstellungen und dem Wechsel zwischen diesen; keinesfalls jedoch kann diese händische Tätigkeit durch den Einsatz digitaler Werkzeuge ersetzt werden, da das eigenständige Erstellen von Darstellungen für sich genommen auch ein Lerninhalt ist.

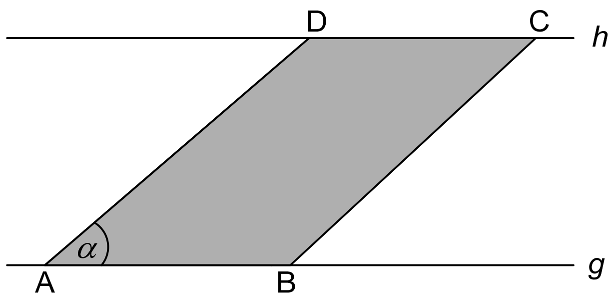
Nachfolgend werden zwei Beispiele gezeigt, die deutlich machen, dass Testaufgaben, wie die in VERA-8 Mathematik enthaltenen Aufgaben, sich mitunter an einer Schnittstelle zwischen einer statischen und einer dynamischen Darstellung befinden.

Die Aufgabe „Winkel im Parallelogramm“ aus VERA-8 Mathematik 2011 (vgl. Abbildung 13) zeigt eine Darstellung, die in ihrer abgedruckten Form unveränderlich und somit statisch ist. Die Fragestellung ist jedoch so formuliert, dass SuS bei der Bearbeitung zumindest auf gedanklicher Ebene dynamisch mit dieser Darstellung umgehen müssen.

Winkel im Parallelogramm

Das dargestellte Viereck ABCD ist ein Parallelogramm.

Die Seite $\overline{CD}$ dieses Parallelogramms wird gedanklich auf der Geraden *h* hin und her verschoben. Dabei bleibt die Seite $\overline{CD}$ immer auf der Geraden *h*. Die Lage der Seite $\overline{AB}$ verändert sich nicht.



Gib an, für welche Winkelgröße α der Umfang des Parallelogramms am kleinsten ist.

Der Umfang des Parallelogramms ist für α = ________ am kleinsten.

Begründe deine Antwort.

Abbildung 13: Aufgabe „Winkel im Parallelogramm“, VERA-8 Mathematik 2011.

Die Dynamisierung dieses Parallelogramms erlaubt es in besonderer Weise, die funktionale Abhängigkeit der Länge des Umfangs von der Winkelgröße α zu untersuchen. Dabei kann auch eine extreme Lage der Seite AB betrachtet werden, um zu ermitteln, für welchen Winkel α der Umfang am kleinsten ist.

Derartige Vierecke – bzw. Vielecke allgemein – begegnen SuS sonst üblicherweise in statischer Form, sei es in Schulbüchern oder beim Anfertigen und/oder Analysieren von Konstruktionen. Der Einsatz von Hilfsmitteln, auch von digitalen, erleichtert die Auseinandersetzung mit der Fragestellung und kann den konstruktiven Umgang mit Fehlvorstellungen begünstigen. Hilfsmittel wie ein Geobrett oder eine Dynamische Geometriesoftware ermöglichen es, mit wenig Aufwand in kurzer Zeit mehrere Vielecke nach vorgegebenen Kriterien zu erzeugen und so dynamisch mit diesen Figuren zu operieren. In der vorliegenden Aufgabe können beispielsweise mit Gummibändern auf Geobrettern fünf oder sechs Parallelogramme gespannt werden, die stellvertretend verschiedene Fälle für die Größe von α veranschaulichen. Mit Bezug zur Anschauung kann der konkrete Vergleich dieser einzelnen Parallelogramme die Argumentation unterstützen, für welche Größe von α der Umfang des Parallelogramms am kleinsten ist. Beim Einsatz einer Dynamischen Geometriesoftware können Messoptionen innerhalb des Programms genutzt werden. Dies ermöglicht es, während des Schiebens der Parallelogrammseite zu beobachten, wie sich Umfang und/oder Flächeninhalt des Parallelogramms in Abhängigkeit von der Winkelgröße α verändern.

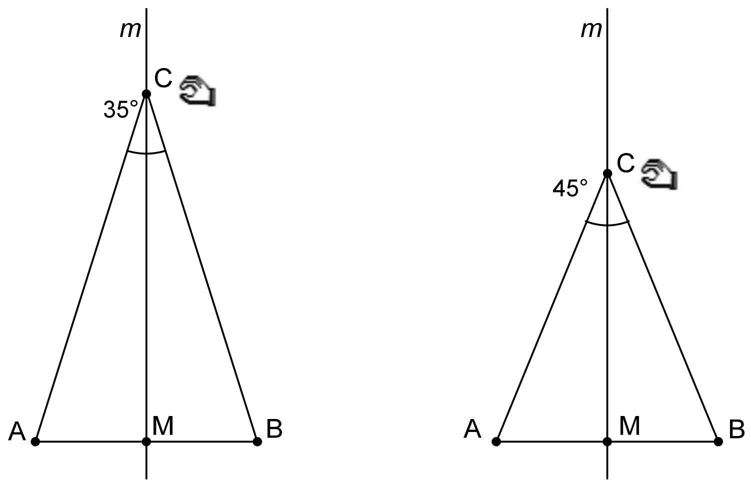
Die nächste Aufgabe „Bewege C“ ist ebenfalls aus VERA-8 Mathematik 2011 entnommen. Auch diese Aufgabe ist „statisch“ gegeben, jedoch bereits mit Blick auf den unterrichtlichen Einsatz digitaler Werkzeuge mit deren technischen Optionen zur Dynamisierung von Figuren formuliert. In einem Papier-und-Bleistift-Test, wie es bei VERA-8 ist, kann dieser dynamische Umgang mit einer Darstellung allerdings nur simuliert werden.

Bewege C

Mit einer Geometrie-Software wurde Folgendes konstruiert:

eine Strecke $\overline{AB}$, dazu die Mittelsenkrechte *m* und ein Punkt C **auf** *m*. C wird mit A und B verbunden, um das Dreieck ABC zu erhalten.

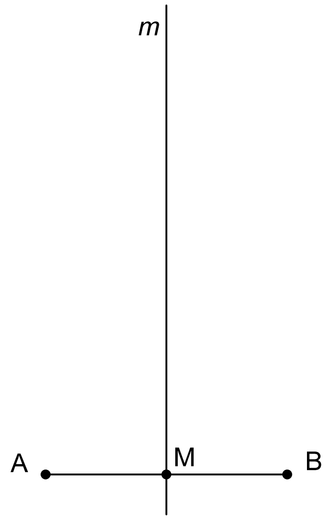
Der Punkt C wird auf der Mittelsenkrechten *m* nach unten bewegt. In der Zeichnung siehst du zwei Beispiele mit verschiedenen Positionen von C:



Teilaufgabe 1

C soll so weit nach unten bewegt werden, dass ein gleichseitiges Dreieck ABC entsteht.

Konstruiere dieses Dreieck in Figur 1.

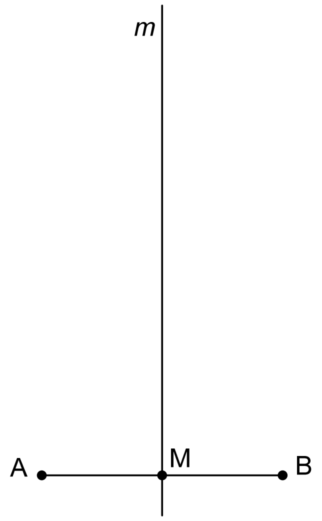


Figur 1

Teilaufgabe 2

C soll so weit bewegt werden, dass der Winkel bei C (∢ ACB) 132° groß ist.

Konstruiere dieses Dreieck in Figur 2.



Figur 2

Abbildung 14: Aufgabe „Bewege C“, VERA-8 Mathematik 2011

Wird diese Aufgabe mit einer Dynamischen Geometriesoftware bearbeitet, kann schon der einleitende Aufgabentext in seiner Bedeutung umfassend nachvollzogen werden, anders als dies in der rein gedanklichen Vorstellung möglich ist. Würde man Teilaufgabe 1 statisch „denken“, so wäre schlicht ein gleichseitiges Dreieck gesucht, dessen Ecke C auf der gegebenen Mittelsenkrechten liegt. Im dynamischen Umgang mit dieser Darstellung ist – dies legt der Aufgabentext nahe – aus den vielzähligen, durch Verschieben des Punktes C auf der Mittelsenkrechten m entstehenden gleichschenkligen Dreiecken dasjenige auszuwählen, das zugleich gleichseitig ist. Auch Teilaufgabe 02 wäre statisch lösbar; dabei würde dann jedoch dasjenige gleichschenklige Dreieck unter Anwendung des Winkelsummensatzes konstruiert, dessen Winkel gegenüber der Basis 132° beträgt. Beim dynamischen Umgang mit dieser Aufgabe kann bei Verwendung einer Dynamischen Geometriesoftware dessen Messoption genutzt werden, die während des Verschiebens des Punktes C auf der Mittelsenkrechten m fortlaufend anzeigt, wie groß der in C entstehende Winkel jeweils ist. So werden im statischen bzw. im dynamischen Umgang mit dieser Aufgabe auch unterschiedliche Lösungsprozesse deutlich.

Neben dem reinen Umgehen mit Darstellungen ist, wie bereits mehrfach deutlich geworden ist, gerade auch der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen von besonderem Interesse. Dies ist Gegenstand des nächsten Abschnitts.

3.2.4 Darstellungswechsel

Der bewusste Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen kann Einsichten vertiefen und das flexible Umgehen mit einem Inhalt fördern. Nicht erst beim Wechsel zwischen Darstellungen, sondern schon zu einem früheren Zeitpunkt, nämlich bei der (bewussten) Wahl einer Darstellung stellt sich immer auch die Frage, welche Darstellung „geeignet“ ist; auf den Aspekt der Eignung einer Darstellung wird auch in der Beschreibung der Kompetenz „Darstellungen verwenden“ in den Bildungsstandards Bezug genommen. Sicherlich lässt sich diese Frage nicht allgemeingültig beantworten, und eine Antwort hängt letztlich immer vom Kenntnistand der SuS ab, von den Präferenzen einer Lehrkraft, aber insbesondere auch vom Zweck, den eine Darstellung erfüllen soll.

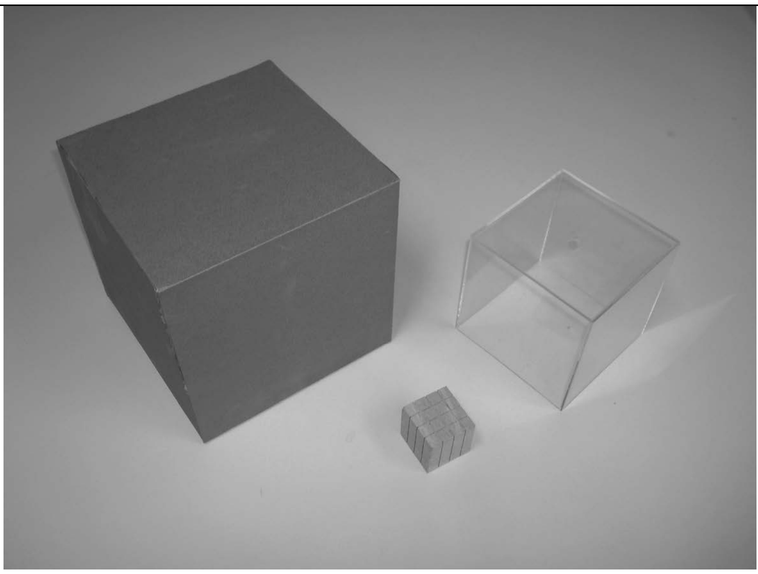
Das Arbeiten mit einer einmal gewählten Darstellung, aber auch das Wechseln zwischen verschiedenen Darstellungen, induziert weiterhin die Frage, was SuS im Einzelnen dabei tun müssen. Sträßer (2003) legt die Ergebnisse einer Untersuchung von Fischer & Malle (1995) dar, die zeigen konnten, dass das Darstellen eines Sachverhaltes, das Operieren innerhalb bzw. mit einer Darstellung und das Interpretieren einer Darstellung drei Tätigkeiten sind, die nicht im gleichen Maße im Unterricht umgesetzt werden. Es überrascht nicht, dass das Operieren etwa zweieinhalbmal so oft vorkommt wie das Interpretieren bzw. das Darstellen selbst, hier also offenkundig eine gewisse Unausgewogenheit herrscht, während die drei genannten Tätigkeiten im Sinne der Bildungsstandards in ausgewogener Weise im Unterricht Berücksichtigung finden sollten.

Den Wechsel zwischen Darstellungen erfahren SuS der achten Jahrgangsstufe besonders oft im Kontext inhaltsbezogener Kompetenzen, die der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ (L4) angehören. Ein in dieser Jahrgangsstufe prominentes Beispiel sind Funktionen, bei denen sich Übersetzungen zwischen grafischen, tabellarischen, symbolischen und sprachlichen Darstellungen der Zusammenhänge unmittelbar anbieten. Abhängig von einer gewählten Darstellung sind Eigenschaften von Funktionen, Veränderungen von Funktionen sowie dazugehörige Zusammenhänge unterschiedlich gut erkennbar („Eignung“). Hußmann & Laakmann (2011: 7) stellen für das Themengebiet „Lineare Funktionen“ in einer Übersicht dar, welche Tätigkeiten innerhalb einzelner Darstellungen bzw. beim Wechsel zwischen diesen auszuführen sind (vgl. Tabelle 2). Siller & Fuchs (2009) benennen mit dem Übersetzen alltagssprachlicher Formulierungen in mathematische Darstellungen noch eine weitere charakteristische Tätigkeit für das Umgehen mit Darstellungen.

Wechsel von/nach	verbal	grafisch	tabellarisch	symbolisch
verbal	Umformulieren	anhand von Punkten und/oder der Steigung einen Graphen skizzieren	Werte finden	Steigung und y-Achsenabschnitt entnehmen oder algebraisch ermitteln
grafisch	Interpretieren	Verschieben oder Drehen	Punkte systematisch ablesen und in eine Tabelle eintragen	y-Achsenabschnitt und Steigung oder zwei Punkte ablesen, dann einen Funktionsterm aufstellen
tabellarisch	Zahlenwerte hinsichtlich charakteristischer Eigenschaften interpretieren	zwei Punkte einzeichnen und eine Gerade hindurchlegen	weitere Tabellenzeilen erzeugen (mithilfe von Differenzen- oder Quotientengleichheit)	aus Punkten die Steigung m ermitteln oder an Einer-Schritten ablesen; y-Achsenabschnitt ermitteln oder anhand des Funktionswertes zu $x = 0$ ablesen
symbolisch	Bedeutung der Steigung m und des y-Achsenabschnitts interpretieren	Kenngrößen als y-Achsenabschnitt und Steigung einzeichnen, dann die Gerade zeichnen	Wertepaare systematisch berechnen	Terme umformen

Tabelle 2: Tätigkeiten beim Wechseln zwischen Darstellungsarten zu linearen Funktionen (aus: Hußmann & Laakmann, 2011, S. 7).

Auch innerhalb der Leitideen „Messen“ (L2) sowie „Raum und Form“ (L3) bieten sich schon in früheren Jahrgangsstufen vielfältige Gelegenheiten für einen Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen an, wie im Folgenden exemplarisch für den Kontext „Würfelvolumen“ verdeutlicht wird (vgl. Tabelle 3). Die hier wiedergegebenen Darstellungen haben allerdings nur illustrierenden Charakter. Unterrichtliche Anregungen zum Umgehen mit Darstellungswechseln, die etwa am Beispiel „Würfelvolumen“ ansetzen, werden im Abschnitt „Unterrichtliche Anregungen zur Entwicklung der Kompetenz „Darstellungen verwenden““ ausgeführt und sollten an real im Klassenraum zur Verfügung stehenden Beispielen ansetzen.

Reales Objekt	

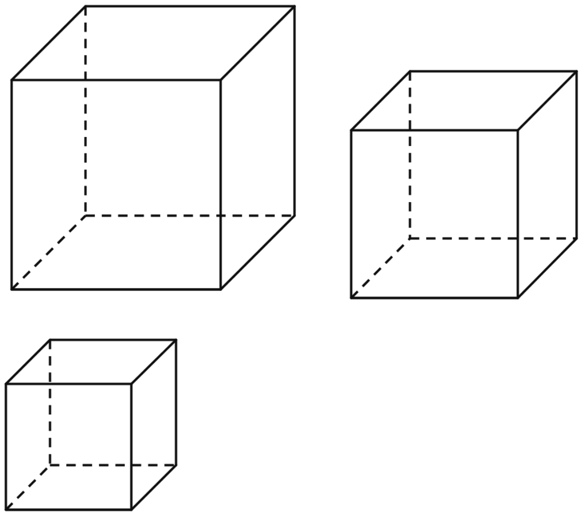
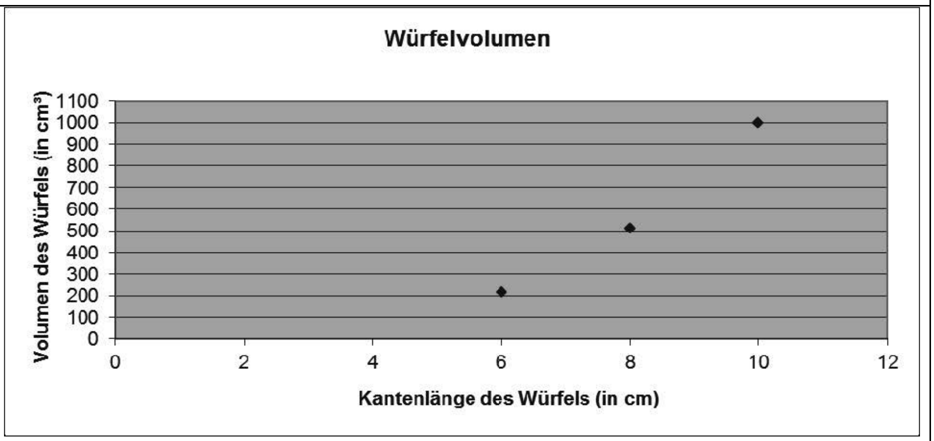
<table>
<tr><td>Bildliche Darstellung</td><td></td></tr>
<tr><td>Tabellarische Darstellung</td><td>
<table>
<tr><th>Kantenlänge a (in cm)</th><th>Volumen V (in cm³)</th></tr>
<tr><td>6</td><td>216</td></tr>
<tr><td>8</td><td>512</td></tr>
<tr><td>10</td><td>1000</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Graphische Darstellung</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Symbolische Darstellung</td><td>$V = a^3$</td></tr>
</table>

Tabelle 3: Verschiedene Darstellungen am Beispiel des Würfelvolumens.

Vergleicht man die fünf in Tabelle 3 wiedergegebenen Darstellungen, so wird deutlich, dass der Abstraktionsgrad der einzelnen Darstellungen vom realen Objekt bis hin zur symbolischen Darstellung immer weiter zunimmt, was wiederum an die in Abschnitt „Was ist eine Darstellung? Einige Vorbemerkungen“ ausgeführten drei Darstellungsebenen nach Bruner – enaktiv, ikonisch und symbolisch – anknüpft.

Kennen SuS unterschiedliche Darstellungen, nutzen sie diese, um einen Sachverhalt darzustellen, mit diesem zu operieren oder diesen zu interpretieren (die drei oben genannten Tätigkeiten), und wechseln sie flexibel zwischen Darstellungen, so kann man davon ausgehen, dass das Bilden von Begriffen erfolgreich stattfindet. Dabei kann die Fähigkeit der SuS selbstständig und flexibel zwischen verschiedenen Darstellungen zu wechseln, auch ein Indikator für konzeptuelles Wissen sein, weshalb dem Wechsel zwischen Darstellungen auch Potential in Bezug auf den Erwerb konzeptuellen Wissens beigemessen wird.

3.3 Schwierigkeiten im Umgang mit Darstellungen

3.3.1 Darstellungen als Lernhilfe und Lerninhalt

Eine grundlegende Schwierigkeit im Umgang mit Darstellungen ist, dass Darstellungen auch ein Lerninhalt an sich sind oder, je nach Kenntnisstand der SuS dies zumindest sein können. Dieser Umstand birgt ein gewisses Dilemma, da eine Darstellung gleichzeitig oft auch als Lernhilfe dient (vgl. Dörfler 2006). Diese Schwierigkeit tritt bei allen Arten von Darstellungen auf, und sie wird hier exemplarisch am Beispiel von Baumdiagrammen erläutert. Baumdiagramme sollen mehrstufige Zufallsversuche mit ihren Ausfällen und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten übersichtlich darstellen. Das benannte Dilemma wird an den ersten beiden Teilaufgaben der Aufgabe „Bälle ziehen“ aus VERA-8 Mathematik 2010 und den hier gezeigten Schülerlösungen deutlich. In dieser Aufgabe ist im einleitenden Text die Durchführung eines Zufallsexperiments beschrieben: ergänzende Informationen, die erforderlich sind, um die in Teilaufgabe 01 gestellte Frage zu beantworten, sind im Baumdiagramm enthalten, das anfangs noch nicht vollständig beschriftet ist (vgl. Abbildung 15).

Bälle ziehen

In einem Stoffbeutel befinden sich nur weiße und gelbe Bälle. Evelyn nimmt nacheinander ohne hinzusehen zwei Bälle heraus.

Das folgende Baumdiagramm beschreibt dieses Zufallsexperiment „Bälle ziehen“:

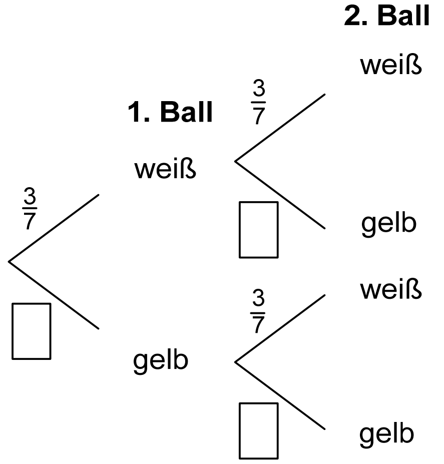


Abbildung 15: Aufgabe „Bälle ziehen“, VERA-8 Mathematik 2010.

Teilaufgabe 1

Finde heraus, ob Evelyn den ersten gezogenen Ball wieder zurücklegt oder nicht.

Kreuze an.

☐ Evelyn legt den ersten gezogenen Ball wieder zurück.

☐ Evelyn legt den ersten gezogenen Ball nicht zurück.

Erkläre, woran du dies erkannt hast.

Teilaufgabe 2

Trage die drei fehlenden Wahrscheinlichkeiten in das Baumdiagramm ein.

Die erste Schülerlösung (vgl. Abbildung 16) macht deutlich, dass es hier Probleme bereitet, die im Text gegebenen Informationen auf das Baumdiagramm zu beziehen, „weil man nicht sieht ob der Ball zurück in den Sack kommt“. Offenkundig gelingt es nicht, die an den Ästen des Baumdiagramms notierten Brüche im Hinblick auf die Fragestellung zu deuten.

Die zweite Schülerlösung (vgl. Abbildung 17) zeigt dagegen, wie es erfolgreich gelingt, das Baumdiagramm als bildliche Darstellung der in Worten beschriebenen Realsituation zu nutzen, die erforderlichen Informationen daraus zu entnehmen und schließlich Teilaufgabe 1 und auch Teilaufgabe 2 richtig zu bearbeiten.

Teilaufgabe 1: Bälle ziehen

Finde heraus, ob Evelyn den ersten gezogenen Ball wieder zurücklegt oder nicht.

Kreuze an.

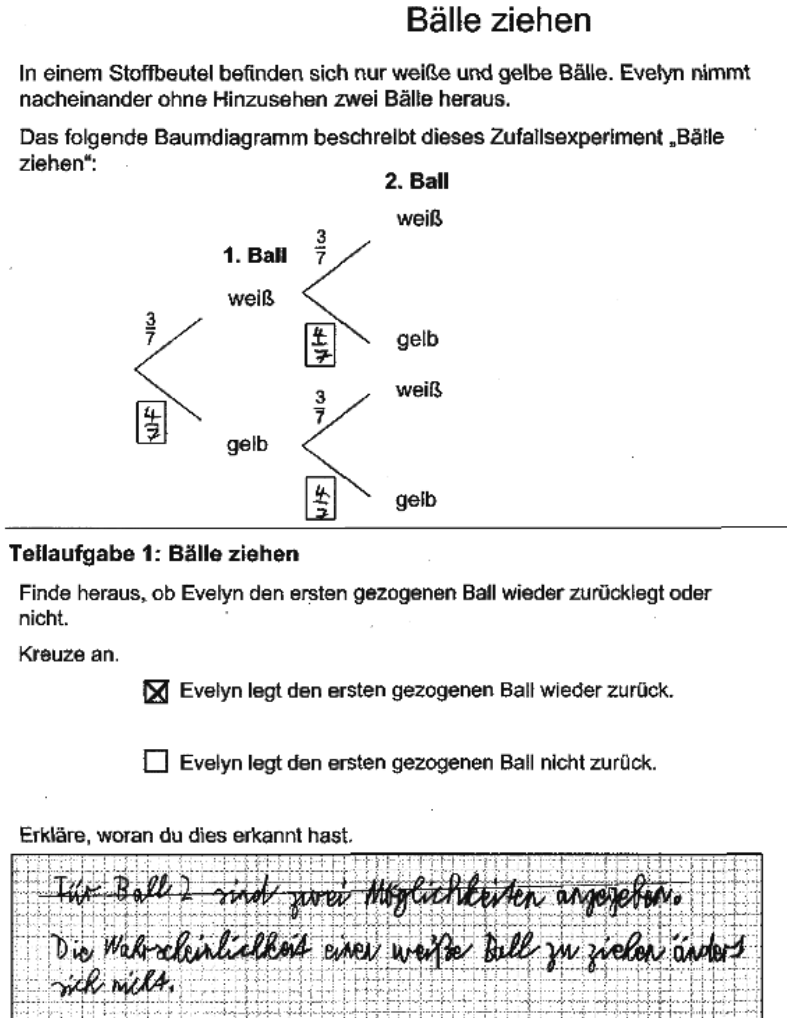
☐ Evelyn legt den ersten gezogenen Ball wieder zurück.

☒ Evelyn legt den ersten gezogenen Ball nicht zurück.

Erkläre, woran du dies erkannt hast.

weil man nicht sieht ob der Ball
zurück in den Sack kommt

Abbildung 16: Aufgabe „Bälle ziehen“, VERA-8 Mathematik 2010, Schülerantwort 1.



Bälle ziehen

In einem Stoffbeutel befinden sich nur weiße und gelbe Bälle. Evelyn nimmt nacheinander ohne Hinzusehen zwei Bälle heraus.

Das folgende Baumdiagramm beschreibt dieses Zufallsexperiment „Bälle ziehen“:

Teilaufgabe 1: Bälle ziehen

Finde heraus, ob Evelyn den ersten gezogenen Ball wieder zurücklegt oder nicht.

Kreuze an.

☒ Evelyn legt den ersten gezogenen Ball wieder zurück.

☐ Evelyn legt den ersten gezogenen Ball nicht zurück.

Erkläre, woran du dies erkannt hast.

~~Für Ball 2 sind zwei Möglichkeiten angegeben.~~
Die Wahrscheinlichkeit einen weiße Ball zu ziehen ändert sich nicht.

Abbildung 17: Aufgabe „Bälle ziehen“, VERA-8 Mathematik 2010, Schülerantwort 2.

3.3.2 (Nicht-)Beachten von Konventionen sowie Manipulationen

Durchaus basale, dennoch häufig auftretende Schwierigkeiten betreffen Konventionen, die beim Lesen, Nutzen oder Erstellen von Darstellungen zu beachten sind. Ein besonders typisches Beispiel hierfür ist das Vertauschen von Punktkoordinaten. Das Verwechseln der Achsen eines Koordinatensystems ist ein Fehler, der ebenfalls auf dem Missachten von Konventionen beruht. Auch beim Zeichnen von Schrägbildern tritt diese Schwierigkeit häufig auf. Übliche Konventionen sind hier, schräg nach hinten verlaufende Linien mit dem Faktor 0,5 verkürzt darzustellen und diese Linien in einem gewissen Winkel verlaufend – meist sind dies 45° – darzustellen. Eine weitere übliche Konvention beim Zeichnen von Schrägbildern ist es, nicht sichtbare Kanten gestrichelt darzustellen. Generell gilt jedoch für alle Konventionen, dass diese das Ergebnis von Aushandlungen sind und es durchaus Abweichungen von den hier dargelegten Vereinbarungen geben kann.

Konventionen sind auch im Zusammenhang mit der Manipulation von Diagrammen zu sehen, deren Erkennen für SuS nicht immer einfach ist. Ohne genauer hinzusehen, werden oft automatisch äquidistante Unterteilungen der Achsen unterstellt; ebenso wird häufig übersehen, dass Teile von Achsen, oft aus Platzgründen, nicht bzw. nur verkürzt dargestellt werden. Mitunter lässt sich jedoch ohne Kenntnis weiterer Informationen nicht eindeutig entscheiden, ob nun bei der Erstellung eines Diagramms, etwa mit verkürzten Achsen, gegen Konventionen verstoßen wurde oder ob eine gezielte Manipulation vorgenommen wurde oder ob eine derartige „Manipulation“ Platzgründen geschuldet ist und damit keine Steuerung der Wahrnehmung intendiert ist.

Auch eine ungenügende Zeichengenauigkeit – d. h. beim Zeichnen von Winkeln üblicherweise mehr als 1° Abweichung, beim Zeichen von Längen üblicherweise mehr als 1 mm – stellt eine Verletzung von Konventionen dar. Auf diese Schwierigkeit wird hier jedoch nicht weiter eingegangen.

3.3.3 Graph-als-Bild-Fehler

Eine ganz andere typische Schwierigkeit deutet Dörfler (2006) an, wenn er betont, dass SuS die Unterscheidung zwischen einer Darstellung und einem dargestellten abstrakten Objekt Schwierigkeiten bereitet (vgl. auch Abschnitt „Was ist eine Darstellung? Einige Vorbemerkungen“). Dies wird gerade bei jenen Aufgaben deutlich, bei denen der sogenannte Graph-als-Bild-Fehler auftritt. Tritt dieser Fehler auf, gelingt offenkundig die Übersetzung zwischen einer Realsituation und einem Bild einer Realsituation nicht. Diesen Fehler findet man oft im Kontext von Bewegungsgraphen, wenn zum Beispiel die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Streckenentfernung graphisch dargestellt ist und ein Bild einer passenden Autorennstrecke auszuwählen ist (vgl. Hußmann/Laakmann 2011, Oberthür/Biehler 2012). Ein anderes Beispiel eines solchen Graph-als-Bild-Fehlers kennzeichnet die zweite falsche Antwortalternative der Aufgabe „Im Kreis laufen“ in Abbildung 18. Wird diese angekreuzt, wird der kreisrunde Weg um das Iglu herum mit der sich verändernden Entfernung des Läufers vom Startpunkt verwechselt.

Im Kreis laufen

Paul läuft im Abstand von ungefähr einem Meter um ein kreisrundes Iglu herum.

Welcher Graph passt am besten, um diese Bewegung darzustellen?

Kreuze an.

d: Entfernung zum Startpunkt (Luftlinie)

t: benötigte Zeit

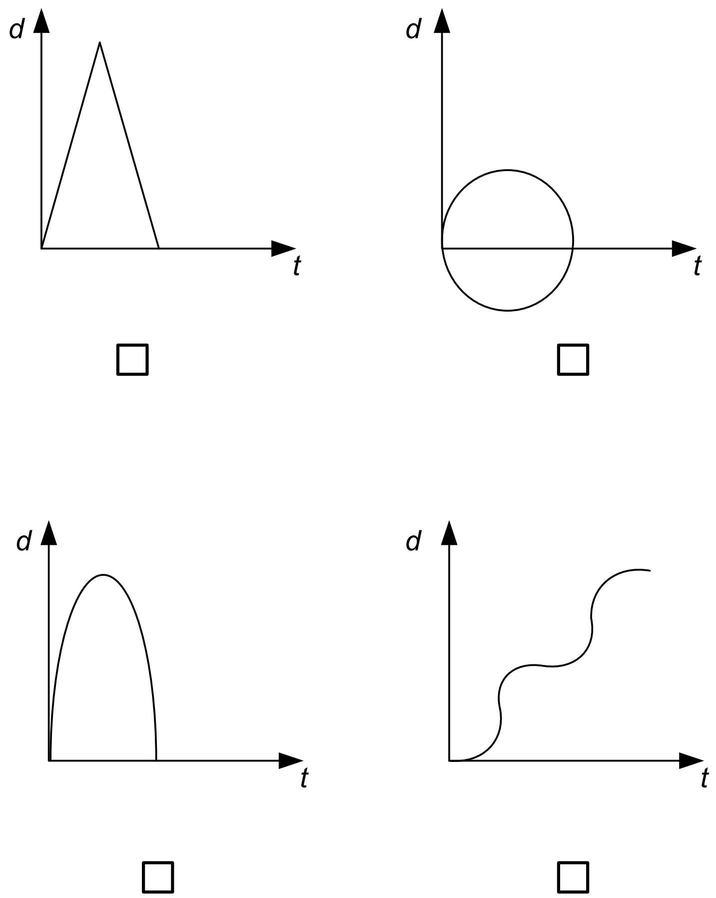


Abbildung 18: Aufgabe „Im Kreis laufen“, VERA-8 Mathematik 2013.

3.3.4 Verbinden der Punkte eines Graphen

Schließlich wird hier eine letzte typische Schwierigkeit betrachtet, die im Zusammenhang mit Aufgaben zur Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ (L4) auftritt, nämlich dann, wenn Graphen funktionaler Zusammenhänge betrachtet werden und zu entscheiden ist, ob die zugehörigen Punkte miteinander verbunden werden dürfen. Diese Frage ist Kern der Teilaufgabe 2 der Aufgabe „Tarifvergleich“, die bereits im Abschnitt „Beschreibung der Kompetenz „Darstellungen verwenden“ in den Bildungsstandards“ in Abbildung 7 gezeigt wurde. In diesem Beispiel werden Werte eines diskreten Größenbereichs einem „stetigen“ Größenbereich zugeordnet, was in der Darstellung zur Folge hat, dass der Funktionsgraph nur aus einzelnen Punkten bestehen dürfte, die nicht miteinander verbunden sind. Gerade beim Erzeugen von Darstellungen derartiger funktionaler Zusammenhänge mit digitalen Werkzeugen ist die Überlegung, ob ein Graph aus diskreten Punkten besteht oder durchgezeichnet werden darf, von den Nutzerinnen und Nutzern der Werkzeuge selbst anzustellen, unterbleibt jedoch oft unkritisch.

3.4 Unterrichtliche Anregungen zur Entwicklung der Kompetenz „Darstellungen verwenden“

Natürlich gibt es nicht „den“ Weg, um die Kompetenz „Darstellungen verwenden“ bei den SuS gezielt aufzubauen. Wie bei allen anderen Kompetenzen auch, gilt es, vielfältig zu arbeiten, in angemessener Weise, gezielt und bewusst mit verschiedenen Darstellungen umzugehen und auch bewusst zwischen diesen zu wechseln, verschiedene Teilkompetenzen in allen drei Anforderungsbereichen aufzugreifen sowie die drei Darstellungsebenen nach Bruner zu berücksichtigen. Die hier gegebenen Anregungen knüpfen an die im Abschnitt „Schwierigkeiten im Umgang mit Darstellungen“ dargelegten, typischen Schwierigkeiten im Umgang mit Darstellungen an. Einzelne Anregungen, die an den vorstehend benannten Schwierigkeiten ansetzen, werden nachfolgend gegeben.

Beachten SuS übliche Konventionen beim Verwenden von Darstellungen nicht, so können diese im Prinzip nur immer wieder explizit und bewusst gemacht werden. Letztlich ist auch die Mathematik eine Sprache eigener Art, deren Syntax und eigenen Regeln – und zu diesen gehören die Konventionen beim Umgehen mit Darstellungen – hervorzuheben sind. Dabei kann auch angesprochen werden, dass solche Konventionen nicht unveränderlich sind. Dass beispielsweise die beiden Achsen eines Koordinatensystems im rechten Winkel zueinander stehen, ist eine ebensolche Konvention. Diese in ihrer Bedeutung bewusst zu machen, kann interessante weiterführende mathematische Betrachtungen nach sich ziehen. Was es bedeutet, diese Konvention zu ändern – also eine *andere gemeinsame* Vereinbarung zu treffen – kann ausgehend von der folgenden Aufgabe „Quadrat im Koordinatensystem“ (vgl. Abbildung 19) untersucht werden.

Hierzu kann man zwei verschiedene Koordinatensysteme zeichnen bzw. vorgeben und darin jeweils das über die Koordinaten seiner Eckpunkte festgelegte Quadrat einzeichnen lassen. Für das erste Koordinatensystem wählt man die übliche Darstellung, für das zweite kann man beide Achsen beispielsweise im 45°-Winkel zueinander darstellen. Ein Vergleich beider Darstellungen legt unmittelbar die Frage nahe, welche Auswirkungen die Veränderung des „konventionellen“ Koordinatensystems auf das dargestellte Viereck hat. Die „neue“ Darstellung führt nahezu automatisch zu der Frage, ob das Dargestellte überhaupt ein Quadrat ist, und wenn ja, warum. Eine solche veränderte Konvention kann sicherlich auch die Einsicht in die Sinnhaftigkeit bestehender Konventionen erhöhen. Auch ist der Übergang von solchen geänderten Konventionen zu Manipulationen von Darstellungen bzw. Diagrammen nahezu fließend.

Quadrat im Koordinatensystem

In einem Koordinatensystem liegt ein Quadrat *ABCD*.
Die Punkte *B*, *C* und *D* haben die Koordinaten *B (* 4 | -2 *)*, *C (* 4 | 3 *)* und *D (* - 1 | 3 *)*.

Welches sind die Koordinaten des Punktes *A*?

Kreuze an.

☐	☐	☐	☐
A (-1 | -3 *)*	*A (* -1 | -2 *)*	*A (* -2 | -1 *)*	*A (* -1 | 4 *)*

Abbildung 19: Aufgabe „Quadrat im Koordinatensystem“, VERA-8 Mathematik 2013.

Weitere Möglichkeiten, bewusster mit Konventionen umzugehen und deren Beachtung zu fördern, bestehen darin, mit den SuS „Checklisten“ zu erarbeiten, mittels derer sie überprüfen können, ob eine Darstellung den üblichen Konventionen entspricht.

Auch, um das Bewusstsein für die Angemessenheit von Darstellungen zu schärfen bzw. ein Bewusstsein für potentielle Manipulationen zu erhöhen, können „Checklisten“ genutzt werden. Darin enthaltene Aspekte können sein:

- Einteilung der Achsen ist (üblicherweise) gleichmäßig
- Beschriftung der Achsen der Grafik ist korrekt
- Höhe der Säulen/Größe der Kreissegmente etc. ist korrekt
- Wertepaare sind korrekt eingetragen
- Vorgegebene Daten „passen“ zur Grafik

Diese und weitere Aspekte können dabei unterstützen, selbst erstellte oder fertige Darstellungen auf Richtigkeit bzw. Angemessenheit hin zu beurteilen, um so auch zu entscheiden, ob Konventionen eingehalten oder ggfs. sogar zielgerichtete Manipulationen vorgenommen wurden.

Im Weiteren werden Anregungen zum unterrichtlichen Umgang mit Schwierigkeiten beim Wechsel zwischen Darstellungen gegeben und diese am Beispiel „Würfelvolumen“ (vgl. Abschnitt 2.4, Tab. 3) konkretisiert. Beim Wechsel in eine andere Darstellung können die folgenden Fragen handlungsleitend sein:

- Welche Informationen kann man aus der gegebenen Darstellung entnehmen?
- Welche (zusätzlichen) Informationen benötigt man, um die andere Darstellung zu erstellen?
- Welche Informationen kann man aus der anderen Darstellung zusätzlich entnehmen?
- Welche Informationen kann man aus der anderen Darstellung nicht mehr entnehmen?

SuS erkennen nicht immer, dass unterschiedliche Darstellungen Unterschiedliches „sichtbar“ machen und in diesem Sinne unterschiedlich gut zur Beantwortung einer Fragestellung geeignet sind. Gerade deshalb stellt ein Wechsel und damit ein Übergang von konkrete(re)n Darstellungen, die das reale Objekt (noch) erkennen lassen (z. B. Foto oder Schrägbild), hin zu abstrakteren Darstellungen (Tabelle, Graph oder Formel) deutliche Anforderungen an das Abstraktionsvermögen der SuS. Dabei müssen sie sich zunehmend von der konkreten Anschauung lösen und immer mehr auf die Eigenschaften dessen, was dargestellt ist – hier die Kantenlänge und das Volumen von Würfeln – fokussieren. Daher ist Abstrahieren eine wesentliche und auch komplexe Tätigkeit, die SuS bei diesen Darstellungswechseln ausführen müssen. Diesen Prozess der zunehmenden Abstraktion und Loslösung vom realen Objekt kann man unter Beachtung der obigen Fragen bewusst zusammen mit den SuS gehen, um dabei auch zu thematisieren, was in der jeweiligen Darstellung (nicht) zu sehen ist bzw. welche Information hinzu kommt oder wegfällt.

Betrachtet man zunächst die Fotos und dann die Schrägbilder der Würfel – beide sind bildliche Darstellungen dieser Objekte –, so lassen sich aus diesen unmittelbar objektbezogene Eigenschaften entnehmen, wie z. B. die Anzahlen der Flächen, Ecken und Kanten. Schwieriger ist es, aus diesen Darstellungen einen direkten bzw. quantifizierbaren Bezug zum Volumen der Würfel zu entnehmen. Um beispielsweise aus den Fotos in ein Schrägbild mit vorgegebenem Maßstab zu wechseln, sind Messungen erforderlich, die die Kantenlängen der Würfel liefern. Dementsprechend können dann aus den Schrägbildern, wenn Maßstab und Konventionen der Darstellung bekannt sind, durch Messen auch andere Angaben entnommen werden. Im Sinne der Fragestellung nach dem Volumen eines Würfels und dessen Abhängigkeit von der Kantenlänge *kann* ein

Schrägbild somit eine erste zweckdienliche Darstellung sein. „Mehr“ ist aus den deutlich abstrakteren Darstellungen, hier ist zunächst die Tabelle zu nennen, zu entnehmen. Um vom Schrägbild in die Tabelle zu wechseln, ist zunächst zu entscheiden, welche Größe in die linke und welche in die rechte Spalte der Tabelle einzutragen ist. Üblich ist es – dies betrifft wieder die vorstehend angesprochenen Konventionen – die Ausgangsgröße (unabhängige Größe) in der linken und die zugeordnete (abhängige) Größe in der rechten Tabellenspalte darzustellen. Um in der Tabelle die Spalte für das Volumen ausfüllen zu können, können zuvor Messungen des Volumens der einzelnen Würfel erforderlich sein. Innerhalb der tabellarischen Darstellung können nun Rechnungen mit den einzelnen Datenpaaren ausgeführt werden, um Vermutungen darüber aufzustellen, welcher funktionale Zusammenhang zwischen diesen besteht. Gleichzeitig sind nach dem Übergang in diese tabellarische Darstellung unmittelbare Informationen über das zugrundeliegende Objekt, also die Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken, nicht mehr erkennbar. In einem weiteren Abstraktionsschritt kann aus diesen Datenpaaren ein Wechsel in die graphische Darstellung erfolgen. Dies erfordert erneut die Beachtung von Konventionen, denn üblicherweise wird die Ausgangsgröße auf der x- und die zugeordnete Größe auf der y-Achse eines Koordinatensystems dargestellt. In dieses Koordinatensystem können die aus den konkreten Objekten abgeleiteten Datenpaare (Kantenlänge und Volumen der gegebenen Würfel) als Punkte eingetragen werden. Dies erfordert einen weiteren Abstraktionsschritt, denn im Koordinatensystem stehen nun diskrete Punkte für diese Datenpaare, d. h. für konkrete Würfel mit deren Kantenlänge und Volumen. Ein weiterer Abstraktionsschritt kann dann auf die Frage führen, ob die diskreten Punkte des Graphen zu einem durchgehenden Graphen verbunden werden können. Diese Zwischenpunkte stehen dann für weitere Datenpaare, die ihrerseits jedoch nun nicht mehr für konkret in der Situation vorhandene Würfel stehen.

Das Arbeiten *innerhalb* der tabellarischen bzw. der grafischen Darstellung, also das wechselseitige Betrachten von Kantenlänge und zugehörigem Volumen in der Tabelle oder am Graph, liefert Hinweise auf den kubischen Zusammenhang zwischen beiden Größen. Auch erkennt man in beiden – weniger formal ausgedrückt –, dass mit „etwas“ zunehmender Kantenlänge das Volumen „stark“ ansteigt. Dieser zunächst eher qualitativ erkennbare Zusammenhang lässt sich durch genauere Betrachtung der verschiedenen Darstellungen besser fassen. Insbesondere ein Wechsel zwischen der tabellarischen und der grafischen Darstellung liefert den kubischen Zusammenhang, der schließlich auch in der symbolischen Darstellung – der Volumenformel – durch weitere Abstraktion in allgemeiner Form zusammengefasst ist. Diese Darstellung ist schließlich gänzlich vom konkreten Objekt losgelöst.

Die hier vorgestellten theoretischen Überlegungen und unterrichtlichen Anregungen sollen auch bei der Kompetenz „Darstellungen verwenden“ zum bewussten und reflektierten Umgehen mit einzelnen Teilkompetenzen beitragen, um Schwierigkeiten bei der Aufgabenbearbeitung besser zu erkennen und schließlich reduzieren zu können. Der Aufbau der Teilkompetenzen kann allerdings – wie bei allen anderen Kompetenzen auch – nur langfristig erfolgen. Es erfordert deren gezieltes Üben und Festigen in einem qualitätsvollen Unterricht, der u. a. im Hinblick auf die fortwährende Entwicklung inhalts- und prozessbezogener Kompetenzen fachlich gehaltvoll gestaltet ist und die SuS kognitiv aktiviert (vgl. Blum 2006). Die in den vorangegangenen Abschnitten gegebenen Hinweise sollen Unterstützung bei der Unterrichtsgestaltung bieten, erheben aber natürlich keinesfalls einen Anspruch auf Vollständigkeit.

4. Anregungen für den Unterricht

Aufgaben wie die im VERA-Test enthaltenen können nicht nur zur Feststellung von Leistungsständen, sondern auch zur unterrichtlichen Förderung von Kompetenzen dienen. Dabei sei betont, dass nicht die Aufgaben per se bei den SuS zur Ausformung, Festigung und Weiterentwicklung der zu ihrer Lösung benötigten Kompetenzen führen, sondern nur eine den Schülerfähigkeiten angepasste Auswahl von Aufgaben und deren adäquate Behandlung im Unterricht. Die Lernenden müssen – so sagen alle empirischen Untersuchungen – ausreichend viele Gelegenheiten haben, die entsprechenden kompetenzbezogenen Tätigkeiten (wie Argumentieren oder Modellieren) selbst zu vollziehen, mehr noch, über diese Tätigkeiten zu reflektieren, Lösungswege zu begründen, verschiedene Wege zu vergleichen, Ergebnisse kritisch zu diskutieren und vieles andere mehr. Die Ergebnisse von nationalen und internationalen Leistungsvergleichen weisen darauf hin, dass im Mathematikunterricht noch bewusster und noch konsequenter als bislang die umfassende Kompetenzentwicklung der SuS im Mittelpunkt der Arbeit stehen sollte. In einem so verstandenen „kompetenzorientierten Unterricht" achtet die Lehrkraft noch mehr als bisher auf die individuellen Kompetenzstände der SuS und macht Aufgabenangebote für verschiedene Leistungsniveaus. Viele weitere Vorschläge für kompetenzorientiertes Unterrichten sind enthalten z. B. in Bruder/Leuders (2008) oder in Blum u.a. (2006).

Die eben stichwortartig genannten Aspekte sind kennzeichnend für „Unterrichtsqualität" im Fach Mathematik. Etwas systematischer kann man dabei drei Komponenten unterscheiden[9] Eine fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung, die SuS immer wieder vielfältige Gelegenheiten zu kompetenzbezogenen Tätigkeiten bietet (zum mathematischen Modellieren, zum Argumentieren, zum Kommunizieren, usw.) und bei der auch immer vielfältige Vernetzungen hergestellt werden sowohl innerhalb der Mathematik als auch zwischen Mathematik und Realität. Eine konsequente kognitive Aktivierung der Lernenden, wo der Unterricht geistige Schülertätigkeiten herausfordert, selbständiges Lernen und Arbeiten ermöglicht und ermutigt, lernstrategisches Verhalten (heuristische Aktivitäten) fördert und ein stetes Nachdenken über das eigene Lernen und Arbeiten (metakognitive Aktivitäten) stimuliert. Eine effektive und schülerorientierte Unterrichtsführung, bei der verschiedene Formen und Methoden flexibel variiert werden, Stunden klar strukturiert sind, eine störungspräventive und fehleroffene Lernatmosphäre geschaffen wird, Lernen und Beurteilen erkennbar getrennt sind, und anderes mehr.

Es gibt sicher keinen universellen Königsweg zum Unterrichtserfolg. Man weiß aber aus vielen empirischen Untersuchungen, dass Unterricht nur dann positive Effekte haben kann, wenn hinreichend viele dieser Qualitätskriterien erfüllt sind (vgl. u a. Helmke (2003), Baumert u. a. (2004)). Ein naheliegender Weg zur Realisierung eines solchen Unterrichts im Fach Mathematik ist die Verwendung eines breiten Spektrums kompetenzorientierter Aufgaben, darunter auch „selbstdifferenzierende" (d. h. Aufgaben, die Zugänge auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen und dadurch für stärkere wie schwächere SuS gleichermaßen geeignet sind). Gerade offenere Aufgabenvarianten sind hier besonders gut geeignet, indem sie SuS ermöglichen, entsprechend ihren Fähigkeiten eigene Wege zu gehen und selbständig Lösungen zu finden. Die Lehrkraft kann dabei versuchen, möglichst viele dieser Lösungswege zu beobachten und im Bedarfsfall unterstützend einzugreifen, und sie kann nach der Bearbeitung unterschiedliche Schülerlösungen präsentieren und diskutieren lassen.

---

[9] Man vgl. dazu das einleitende Kapitel in Blum u. a. (2006).

5. Literaturverzeichnis

Barzel, B. & Weigand, H.-G. 2008: Medien vernetzen (Heft 146). Seelze: Friedrich Verlag.

Blum, W. 2006: Die Bildungsstandards Mathematik. Einführung. In: W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen (S. 14-32). Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Dörfler, W. 2006: Diagramme und Mathematikunterricht. In: Journal für Mathematik-didaktik, 27/2006, S. 200-219.

Fischer, R. & Malle, G. 1985: Mensch und Mathematik – B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim.

Hußmann, S. & Laakmann, H. 2011: Eine Funktion - viele Gesichter. Darstellen und Darstellungen wechseln (Heft 38). Hallbergmoos: Auslis Verlag.

KMK 2003: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss Darmstadt: Luchterhand.

KMK 2004: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss Darmstadt: Luchterhand.

KMK 2011: Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards für den Hauptschul-abschluss und den Mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik.

Oberthür, M. & Biehler, R. 2012: Bewegungsdaten automatisch erfassen und mit Funktionen modellieren als Bestandteil von Lernumgebungen mit Schülerexperimenten. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Bd. 2, S. 637-340.

Schmidt, U. & Barzel, B. 2008: Den Rechner clever nutzen. Einstieg in die Arbeit mit neuen Medien. In: mathematik welt, 146/2008. Seelze: Friedrich Verlag.

Siller, H.-S. & Fuchs, K. J. 2009: Darstellen, Modellbilden. In: Mathematik im Unterricht, S. 66-84.

Sträßer, R. 2003: Darstellen und Interpretieren, 117/2003. Seelze: Friedrich Verlag.

Themenbezogene Fachzeitschriften

Barzel, B., Holzäpfel, L. & Streit, C. 2011: Wetter und Klima. Der punktuelle und der umfassende Blick auf Diagramme und Funktionen. Praxis der Mathematik in der Schule. Sekundarstufen I und II, 53/2011, S. 35-39. (Es wird eine Lernumgebung vorgestellt (6. Klasse), anhand derer charakteristische Eigenschaften von Diagrammen erarbeitet und in der funktionale Zusammenhänge im Kontext gedeutet werden.)

Barzel, B. & Hußmann, S. 2008: Rechtecke im Einheitsquadrat. Experimente auf verschiedenen Darstellungsebenen. In: mathematik lehren, 146/2008, S. 14-16. Seelze: Friedrich Verlag. (In einer dynamischen Geometrieaufgabe (8.-10- Klasse) werden mit DGS grafische, tabellarische und algebraische Darstellungen verknüpft und mathematische Zusammenhänge erkundet.)

Danckwerts, R. & Vogel, D. 2003: Dynamisches Visualisieren und Mathematikunterricht. Ein Ausloten der Chancen an zwei Beispielen. In: mathematik lehren, 117/2003, S. 19-39. Seelze: Friedrich Verlag. (Das heuristische Potential dynamischer Visualisierungen wird genutzt, um den Satz des Pythagoras sowie Binomische Formeln zu erkunden.)

Fischer, A. 2010: Zeichnungen als Denkwerkzeuge. In: Der Mathematikunterricht, 56/2010, S. 23-33. (Es wird eine Unterrichtsreihe vorgestellt, in der zeichnerische Darstellungen auf arithmetische Terme angewendet und als Werkzeug zum Denken genutzt werden, Schwerpunkt: Klasse 5).

Herget, W., Malitte, E., & Richter, K. 2008: Die Skalierung bringt's! Grafische Darstellungen besser verstehen. In: mathematik lehren, 146/2008, S. 11-13. Seelze:

Friedrich Verlag. (Am Beispiel linearer Funktionen untersuchen Schülerinnen und Schüler den Einfluss unterschiedlicher Achsenskalierungen.)
Leuders, T. & Naccarella, D. 2011: „Zeichne, was du denkst - erkläre, was du zeichnest". Mit Graphen und Fragen zur Diagnose funktionalen Denkens. In: Praxis der Mathematik in der Schule. Sekundarstufen I und II, 53/2011, S. 20-26. Seelze: Friedrich Verlag. (Mittels spezieller Aufgaben wird beobachtet, welche Fähigkeiten Schülerinnen und Schüler beim Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungsarten von Funktionen zeigen.)
Lorenz, J. H. 2003: Der leere Zahlenstrahl. Eine Hilfe für das Rechnen in der Grundschule. In: mathematik lehren, 117/2003, S. 14-18. Seelze: Friedrich Verlag. (Es wird gezeigt, wie der (leere) Zahlenstrahl speziell in der Grundschule genutzt werden kann, um Zahlbeziehungen sowie Denkwege und Strategien darzustellen.)
Pinkernell, G. 2012: Einführung des Bruchbegriffs mittels Tabellenkalkulation. In: Praxis der Mathematik in der Schule. Sekundarstufen I und II, 54/2012, S. 10-13. (In einer Lernumgebung wird eine Tabellenkalkulation verwendet, um bei der Einführung des Bruchbegriffs zwischen Tabelle und Kreisdiagramm zu wechseln.)
Roth, J. 2008: Systematische Variation. Eine Lernumgebung vernetzt Geometrie und Algebra. In: mathematik lehren, 146/2008, S. 17-21. Seelze: Friedrich Verlag. (Durch Variation einzelner Größen werden Trapeze und die Größen ihrer Flächeninhalte untersucht. Darstellungswechsel erfolgen zwischen der Figur selbst, Term, Tabelle und Graph.)
Schmidt-Thieme, B. 2010: Wort, Bild und Aktion. Repräsentationsformen mathematischen Wissens und das Lernen von Mathematik. In: Der Mathematikunterricht, 56/2010, S. 2-11. (Verschiedene Teilkompetenzen von „Darstellungen verwenden“ werden mit Bezug zu Bruners Darstellungsebenen an verschiedenen Sachkontexten für die Sekundarstufe I konkretisiert.)
Stanja, J. 2010: Die Würfel sind gefallen. Repräsentationen im Stochastikunterricht. In: Der Mathematikunterricht, 56/2010, S. 12-22. (Mit besonderem Augenmerk auf Würfeln werden diese zur Repräsentation stochastischer Konzepte verwendet; Tabellen und Diagramme dienen als visuelle Repräsentationen.)
Wollring, B. 2003: Pläne machen. Zweckbestimmte Zeichnungen zu Bauwerken, die Zylinder enthalten. In: mathematik lehren, 117/2003, S. 8-12. Seelze: Friedrich Verlag. (Zu Bauwerken aus Zylindern und Quadern fertigen Schülerinnen und Schüler Zeichnungen an, die die Rolle von Konventionen beim Sprechen über diese deutlich machen, 4./5. Klasse.)

Weiterführende Literatur

Bayrhuber, M., Leuders, T., Bruder, R. & Wirtz, M. 2010: Repräsentationswechsel beim Umgang mit Funktionen – Identifikation von Kompetenzprofilen auf der Basis eines Kompetenzstrukturmodells. Projekt HEUREKO. In: Klieme, E., Leutner, D. & Kenk, M. (Hrsg.): Kompetenzmodellierung. Zwischenbilanz des DFG-Schwerpunktprogramms und Perspektiven des Forschungsansatzes. In: Zeitschrift für Pädagogik; Beiheft, S. 29-38. (Speziell zu „Wachstum und Veränderung“ werden im Projekt bevorzugte Repräsentationsformen (Tabelle, Graph und Situation) und Wechsel zwischen diesen untersucht.)
Kadunz, G. 2000: Visualisierung, Bild und Metapher. Die vermittelnde Tätigkeit der Visualisierung beim Lernen von Mathematik. In: Journal der Mathematikdidaktik, 21/2000, S. 280-302. (Aus verschiedenen theoretischen Ansätzen wird der Visualisierungsbegriff betrachtet. Bei Visualisierungen verwendete Zeichen werden als Bild und als Symbol diskutiert.)