



Institut zur Qualitätsentwicklung  
im Bildungswesen

---

## Didaktische Erläuterung zum Bereich Mathematik Zahlen und Operationen in den Vergleichsarbeiten in der 3. Jahrgangsstufe (VERA-3)

---



## Inhaltsverzeichnis

1. Allgemeine Erläuterungen zum Fach Mathematik .....	3
2. Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards .....	3
2.1 Die Bildungsstandards Mathematik .....	3
2.2 Kompetenzstufen im Fach Mathematik .....	4
3. Beschreibung der zu testenden Kompetenzbereiche .....	5
3.1 Der Kompetenzbereich „Zahlen und Operationen“ in den Bildungsstandards.....	5
3.1.1 Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen .....	5
3.1.2 Rechenoperationen verstehen und beherrschen.....	6
3.1.3 In Kontexten rechnen .....	6
4. Anregungen für den Unterricht .....	6
5. Literaturverzeichnis .....	7

# 1. Allgemeine Erläuterungen zum Fach Mathematik

Im Folgenden werden wesentliche Komponenten der Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich sowie die hierzu empirisch konstruierten Kompetenzstufen kurz dargestellt. Ferner wird der mathematische Kompetenzbereich *Zahlen und Operationen* erläutert. Schließlich werden einige allgemeine Überlegungen zu einem Mathematikunterricht skizziert, der gute Voraussetzungen für das Erreichen der durch die Standards vorgegebenen Ziele bietet. Detailliertere unterrichtliche Anregungen sowie spezifische Übungen sind in den aufgabenspezifischen didaktischen Kommentaren zu finden.

## 2. Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards

### 2.1 Die Bildungsstandards Mathematik

Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich beschreiben die fachbezogenen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis zum Ende der vierten Jahrgangsstufe erworben haben sollen. Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die in aktiver Auseinandersetzung mit substantiellen Fachinhalten erworben werden können. Dabei wird zwischen allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen unterschieden.

Das wesentliche Ziel der Bildungsstandards ist es, die Qualität des Unterrichts zu steigern und dadurch die Leistungen und fachbezogenen Einstellungen aller Schülerinnen und Schüler zu verbessern. Entsprechend sollen die Standards eine Orientierung über verbindliche Zielerwartungen bieten. Verbunden mit den Bildungsstandards in der Primarstufe sind Möglichkeiten zur Überprüfung, inwieweit diese Ziele am Ende der Klassenstufe 4 erreicht worden sind.

Die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* umfassen fachliche Fähigkeiten, die in allen Inhaltsbereichen der Mathematik bedeutsam sind. Im Einzelnen sind dies:

- Technische Grundfertigkeiten,<sup>1</sup>
- Problemlösen,
- Kommunizieren,
- Argumentieren,
- Darstellen,
- Modellieren.

---

<sup>1</sup> In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject>) ist die allgemeine mathematische Kompetenz „Technische Grundfertigkeiten“ noch nicht enthalten. Eine inhaltlich ähnlich beschriebene allgemeine mathematische Kompetenz findet sich allerdings bereits bei den Bildungsstandards für den Sekundarbereich („Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“). Mittlerweile wurden im Zuge der Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen in Mathematik auch für den Primarbereich die allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch die sechste Dimension der „Technischen Grundfertigkeiten“ ergänzt, weil diese Dimension in den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht hinreichend abgedeckt schien (vgl. Winkelmann/Robitzsch 2009). Ferner hat sich gezeigt, dass diese Dimension vor allem zur differenzierten Beschreibung der Aufgaben im unteren Leistungsbereich hilfreich ist. Die Ergänzung findet sich auf Seite 5 des „Kompetenzstufenmodells zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ in der Fassung vom 11.02.2013 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>.

Die für die Primarstufe beschriebenen inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen beziehen sich auf *fünf mathematische Leitideen*:

- Zahlen und Operationen,
- Raum und Form,
- Muster und Strukturen,
- Größen und Messen,
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.

Diese Leitideen sollen den Schülerinnen und Schülern helfen, zentrale mathematische Konzepte kennenzulernen und zu verstehen sowie den vernetzten Charakter der Mathematik zu erkunden. Zu den Leitideen werden inhaltsbezogene Kompetenzen unterschiedlichen Abstraktionsgrades formuliert (s. Kultusministerkonferenz 2005).

## 2.2 Kompetenzstufen im Fach Mathematik

Die oben kurz dargestellte Konzeption der Bildungsstandards Mathematik bildet einen theoretischen Rahmen zur Konzeption guten Mathematikunterrichts. Im Sinne der „Output-Orientierung“ ist von Interesse, was Schülerinnen und Schüler verschiedener Altersstufen und verschiedener Bildungsgänge „tatsächlich können“.

Auf der Grundlage empirischer Daten lassen sich sowohl Aufgaben – nach Schwierigkeit –, als auch die Schülerinnen und Schüler – nach Leistungsfähigkeit – verschiedenen „Kompetenzstufen“ zuordnen, was allen für die Unterrichtskonzeption Verantwortlichen hilfreiche Orientierungen geben kann.

Mit Hilfe entsprechender Daten wurde ein Kompetenzstufenmodell erarbeitet, das fünf hierarchisch angeordnete Kompetenzstufen enthält, die bei der Beschreibung von mathematischen Basiskompetenzen beginnen und bis zur Identifizierung eines elaborierten und souveränen Umgangs mit Mathematik in der Primarstufe gehen (vgl. Reiss, Roppelt, Haag, Pant & Köller 2012; Reiss & Winkelmann 2008; 2009). Das Modell umfasst alle in den Bildungsstandards ausgewiesenen mathematischen Leitideen. Es ermöglicht auf breiter Basis die Interpretation der mathematischen Kompetenz von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe.

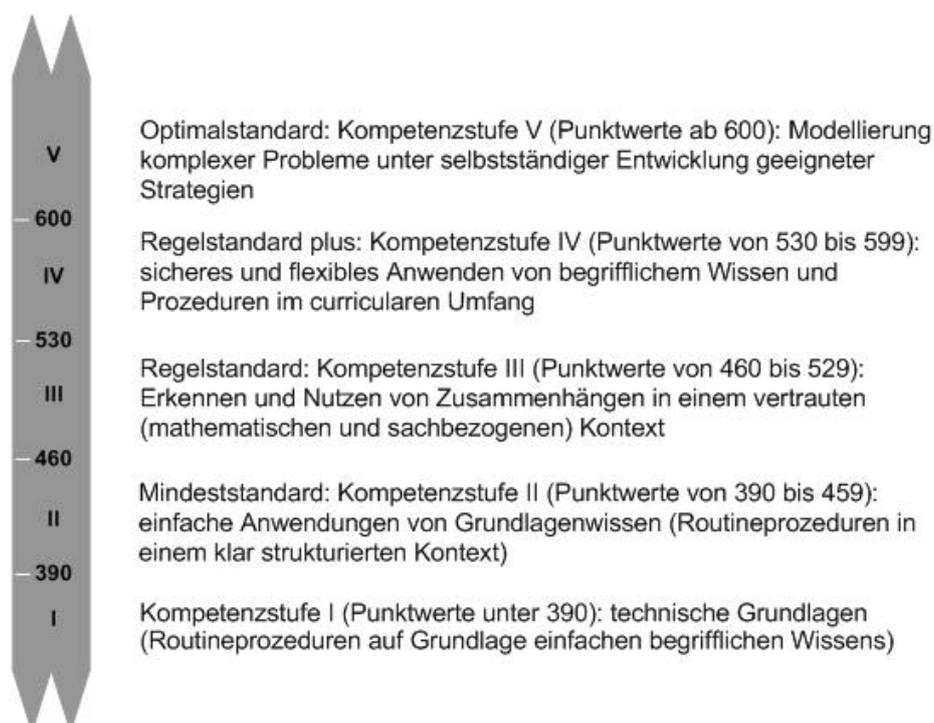


Abbildung 1: Übersicht der Kompetenzstufen aus dem Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule

*Mindeststandard.* Als Ausgangswert für die Stufeneinteilungen wurde jeweils das obere Ende von Kompetenzstufe I gewählt, und zwar so, dass alle Aufgaben mit Kennwerten unterhalb dieses Schwellenwerts nur solche Anforderungen stellen, deren einigermaßen sichere Erfüllung von *allen* Schülerinnen und Schülern des jeweiligen Bildungsgangs erwartet werden muss; man spricht hier vom *Mindeststandard* des Bildungsgangs. Schülerinnen und Schüler, die zum Ende der vierten Jahrgangsstufe die Kompetenzstufe II nicht erreichen und somit diesen Mindeststandard von 390 Punkten nicht erfüllen, haben einen besonderen *Förderbedarf*.

*Regelstandard.* Der *Regelstandard*, den die Schülerinnen und Schüler zum Ende der vierten Jahrgangsstufe zumindest *im Durchschnitt* erfüllen sollen, ist höher angesetzt. Schülerinnen und Schüler, die mindestens 460 Punkte und damit die Kompetenzstufe III oder eine höhere erreicht haben, erfüllen die in den Bildungsstandards beschriebenen Erwartungen und erreichen den von der KMK festgelegten Regelstandard.

Die oberste Stufe des hier vorgestellten Kompetenzmodells ist nach oben offen, d. h. es sind prinzipiell noch schwierigere Items und noch höhere Leistungen möglich, als in der zugrunde liegenden Erhebung vorkamen. Dementsprechend ist die niedrigste Stufe nach unten offen, d. h. es sind noch leichtere Items denkbar, die auch noch von sehr schwachen Schülerinnen und Schülern gelöst werden können.

### 3. Beschreibung der zu testenden Kompetenzbereiche

In den VERA-3 zur Mathematik werden pro Jahr jeweils *zwei* der fünf *inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche* umlaufend geprüft. Zu der Domäne *Zahlen und Operationen* werden im Folgenden einzelne Aspekte des Kompetenzbereiches differenziert dargestellt. Die Ausführungen stützen sich im Wesentlichen auf die Beschreibungen von Walther et al. (2012).

#### 3.1 Der Kompetenzbereich „Zahlen und Operationen“ in den Bildungsstandards

Der inhaltsbezogene Kompetenzbereich *Zahlen und Operationen* bildet (zusammen mit Raum und Form) den inhaltlichen Kern des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Das explizite Erwähnen der Operationen ist dahingehend zu verstehen, dass diese über Fertigkeiten hinaus als *Strategien* zu entwickeln sind. Über den Aufbau von Vorstellungen zu den natürlichen Zahlen und den Rechenoperationen hinaus umfasst er das Anwenden der Kompetenzen in verschiedenen Zusammenhängen. Explizit sollen folgende Kompetenzen in diesem Bereich aufgebaut werden:

- Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen
- Rechenoperationen verstehen und beherrschen
- in Kontexten rechnen<sup>2</sup>

##### 3.1.1 Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen

Dieser Kompetenzbereich bildet sowohl die Grundlage für die weiteren Bereiche der Kompetenz *Zahlen und Operationen* als auch für die weiteren Kompetenzbereiche der Bildungsstandards insgesamt. Es ist daher besonders wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler adäquate Vorstellungen zum dekadischen Stellenwertsystem aufbauen und ein Bewusstsein für Analogien im Aufbau von Zehnern, Hundertern usw. entwickeln. Sie sollen verschiedene Darstellungsformen von Zahlen kennen und diese zueinander in Beziehung setzen. Zu die-

---

<sup>2</sup> siehe Kultusministerkonferenz 2005, S. 9 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject>.

ser Kompetenz gehört auch die Orientierung im Zahlenraum sowie das Ordnen und Beschreiben von Zahlen.

### **3.1.2 Rechenoperationen verstehen und beherrschen**

Der Bereich Rechenoperationen verstehen und beherrschen ist relativ komplex und umfasst Kopfrechnen, mündliche und halbschriftliche Strategien sowie schriftliche Verfahren. Durch die Grundkenntnisse zum Aufbau des Stellenwertsystems und automatisierte Wissensbestandteile wie das Einspluseins und Einmaleins können Strategien des Kopfrechnens auf analoge Aufgaben übertragen werden. Flexibles Rechnen ist insbesondere bei mündlichen und halbschriftlichen Verfahren von Vorteil, um Aufgaben effektiv lösen zu können. Voraussetzung hierfür ist ein umfangreiches Wissen über Zahlen und Zahlbeziehungen. Auch schriftlich dargestellte Algorithmen zur Addition, Subtraktion und Multiplikation sollen entsprechend verstanden und ausgeführt werden. Neben dem Anwenden geeigneter Verfahren spielt auch das Analysieren und Sprechen über Zahleigenschaften eine Rolle, das hier wiederum auf einem soliden Grundverständnis der Operation aufbaut. Überdies gehört zu diesem Kompetenzbereich auch das Prüfen von Lösungen durch Überschlagsrechnungen oder Umkehroperationen.

Die Schülerinnen und Schüler sollen in der Lage sein, die Äußerungen anderer zu verstehen, zu erklären und/oder zu korrigieren.

### **3.1.3 In Kontexten rechnen**

Ein vertieftes Verständnis über die Beziehungen zwischen den vier Grundrechenarten kann besonders durch eine Einbettung in verschiedene Kontexte gefördert werden. Hier bietet sich neben klassischen Sachaufgaben auch die Möglichkeit, einfache kombinatorische Aufgaben zu lösen. Beim Rechnen in Kontexten sind nicht nur die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten bedeutsam, sondern auch das Prüfen der Ergebnisse auf Plausibilität.

## **4. Anregungen für den Unterricht**

Aufgaben wie die in VERA3 können nicht nur zur Feststellung des Leistungsstandes, sondern auch zur unterrichtlichen Förderung von Kompetenzen dienen. Dabei sei betont, dass nicht die Aufgaben per se bei den Schülerinnen und Schülern zur Ausformung, Festigung und Weiterentwicklung der zu ihrer Lösung benötigten Kompetenzen führen, sondern nur eine den Schülerfähigkeiten angepasste Auswahl von Aufgaben und deren adäquate Behandlung im Unterricht. Die Lernenden müssen – so belegen viele empirische Untersuchungen – ausreichend Gelegenheiten haben, die entsprechenden kompetenzbezogenen Tätigkeiten (wie Argumentieren oder Modellieren) selbst zu vollziehen, mehr noch, über diese Tätigkeiten zu reflektieren, Lösungswege zu begründen, verschiedene Wege zu vergleichen, Ergebnisse kritisch zu diskutieren und vieles andere mehr. Die Ergebnisse von nationalen und internationalen Leistungsvergleichen weisen darauf hin, dass im Mathematikunterricht noch bewusster und noch konsequenter als bislang die umfassende Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler im Mittelpunkt der Arbeit stehen sollte. In einem so verstandenen „kompetenzorientierten Unterricht“ achtet die Lehrkraft noch mehr als bisher auf die individuellen Kompetenzstände der Kinder und macht Aufgabenangebote für verschiedene Leistungsniveaus.

So ist besonders im Bereich *Zahlen und Operationen* mit unterschiedlichen Vorerfahrungen bei den Schülerinnen und Schülern zu rechnen. Um diesen unterschiedlichen Kompetenz-

ständen gerecht zu werden, sollten Kompetenzen im Bereich *Zahlen und Operationen* nicht allein auf der symbolischen Ebene (weiter-)entwickelt werden. Diverses Anschauungsmaterial eignet sich daher, um den Aufbau des Zahlensystems und die Zahlbildung zu verdeutlichen. Darüber hinaus können feste und flexible Mengendarstellungen mit handelnden Aktivitäten verbunden und damit die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler angeregt werden.

Viele weitere Vorschläge für kompetenzorientiertes Unterrichten sind z. B. in Bruder/Büchter/Leuders (2008), Blum et al. (2006) oder Walther et al. (2012) enthalten.

Die hier stichwortartig genannten Aspekte sind kennzeichnend für „Unterrichtsqualität“ im Fach Mathematik. Etwas systematischer kann man dabei drei Komponenten unterscheiden<sup>3</sup>.

- Eine *fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung*, die den Kindern immer wieder vielfältige Gelegenheiten zu kompetenzbezogenen Tätigkeiten bietet (zum mathematischen Modellieren, zum Argumentieren, zum Kommunizieren usw.) und bei der vielfältige Vernetzungen sowohl innerhalb der Mathematik als auch zwischen Mathematik und Realität hergestellt werden.
- Eine *konsequente kognitive Aktivierung der Lernenden* in einem Unterricht, der geistige Schülertätigkeiten herausfordert, selbständiges Lernen und Arbeiten ermöglicht und ermutigt, lernstrategisches Verhalten (heuristische Aktivitäten) fördert und ein stetes Nachdenken über das eigene Lernen und Arbeiten (metakognitive Aktivitäten) stimuliert.
- Eine *effektive und schülerorientierte Unterrichtsführung*, bei der verschiedene Formen und Methoden flexibel variiert werden, Stunden klar strukturiert sind, eine störungspräventive und fehleroffene Lernatmosphäre geschaffen wird und Lernen und Beurteilen erkennbar getrennt sind.

Es gibt sicher keinen universellen Königsweg zum Unterrichtserfolg. Man weiß aber aus vielen empirischen Untersuchungen, dass Unterricht nur dann positive Effekte haben kann, wenn hinreichend viele dieser Qualitätskriterien erfüllt sind (vgl. u. a. Helmke 2006).

Ein naheliegender Weg zur Realisierung eines solchen Unterrichts im Fach Mathematik ist die Verwendung eines breiten Spektrums kompetenzorientierter Aufgaben, darunter auch „selbstdifferenzierende“ (d. h. Aufgaben, die Zugänge auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen und dadurch für stärkere wie schwächere Schülerinnen und Schüler gleichermaßen geeignet sind).

Gerade offenere Aufgabenvarianten sind hier besonders gut geeignet, da sie Schülerinnen und Schülern ermöglichen, entsprechend ihrer Fähigkeiten eigene Wege zu gehen und selbständig Lösungen zu finden. Die Lehrkraft kann dabei versuchen, möglichst viele dieser Lösungswege zu beobachten und im Bedarfsfall unterstützend einzugreifen, und sie kann nach der Bearbeitung unterschiedliche Schülerlösungen präsentieren und diskutieren lassen.

## 5. Literaturverzeichnis

Blum, Werner 2006: Die Bildungsstandards Mathematik. Einführung. In W. Blum, C. Drükere-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen* (S. 14-32); Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Bruder, Regina / Büchter, Andreas / Leuders, Timo (Hrsg.) 2008: *Mathematikunterricht entwickeln*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Helmke, Andreas 2006: Was wissen wir über guten Unterricht? *Pädagogik*, 2, 42-45.

---

<sup>3</sup> Man vgl. dazu das einleitende Kapitel in Blum et al. (2006).

- Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen 2013: Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ in der Fassung vom 11.02.2013. (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>)
- Kultusministerkonferenz 2005: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). Beschluss vom 15.10.2004. (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject> und <http://www.kmk.org/bildung-schule/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards/ueberblick.html>)
- Reiss, Kristina / Roppelt, Alexander/ Haag, Nicole/ Pant, Hans Anand/ Köller, Olaf 2012: Kompetenzstufenmodelle im Fach Mathematik. In P. Stanat, H. A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik* (S.72-84); Münster: Waxmann.
- Reiss, Kristina / Winkelmann, Henrik 2008: Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. *Grundschule*, 40 (10), 34-37.
- Reiss, Kristina / Winkelmann, Henrik 2009: Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik im Primarbereich. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 120-141); Weinheim: Beltz.
- Walther, Gerd / van den Heuvel-Panhuizen, Marja / Granzer, Dietlinde / Köller, Olaf (Hrsg.) 2012: *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*; Berlin: Cornelsen.
- Winkelmann, Henrik / Robitzsch, Alexander 2009: Modelle mathematischer Kompetenzen: Empirische Befunde zur Dimensionalität. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 169-196); Weinheim: Beltz.