



Institut zur Qualitätsentwicklung  
im Bildungswesen

---

## Didaktische Erläuterung zum Bereich Mathematik Raum und Form in den Vergleichsarbeiten in der 3. Jahrgangsstufe (VERA-3)

---



## Inhaltsverzeichnis

1. Allgemeine Erläuterungen zum Fach Mathematik .....	3
2. Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards .....	3
2.1 Die Bildungsstandards Mathematik .....	3
2.2 Kompetenzstufen im Fach Mathematik .....	4
3. Beschreibung der zu testenden Kompetenzbereiche .....	5
3.1 Der Kompetenzbereich „Raum und Form“ in den Bildungsstandards .....	5
3.1.1 Sich im Raum orientieren .....	5
3.1.2 Geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen .....	6
3.1.3 Einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen .....	6
3.1.4 Flächeninhalte und Rauminhalte vergleichen und messen .....	6
4. Anregungen für den Unterricht .....	6
5. Literaturverzeichnis .....	8

# 1. Allgemeine Erläuterungen zum Fach Mathematik

Im Folgenden werden wesentliche Komponenten der Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich sowie die hierzu empirisch konstruierten Kompetenzstufen kurz dargestellt. Ferner wird die mathematischen Kompetenzbereiche *Raum und Form* erläutert. Schließlich werden einige allgemeine Überlegungen zu einem Mathematikunterricht skizziert, der gute Voraussetzungen für das Erreichen der durch die Standards vorgegebenen Ziele bietet. Detailliertere unterrichtliche Anregungen sowie spezifische Aufgaben sind in den aufgabenspezifischen didaktischen Kommentaren zu finden.

## 2. Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards

### 2.1 Die Bildungsstandards Mathematik

Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich beschreiben die fachbezogenen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis zum Ende der vierten Jahrgangsstufe erworben haben sollen. Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die in aktiver Auseinandersetzung mit substantiellen Fachinhalten erworben werden können. Dabei wird zwischen allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen unterschieden.

Das wesentliche Ziel der Bildungsstandards ist es, die Qualität des Unterrichts zu steigern und dadurch die Leistungen und fachbezogenen Einstellungen aller Schülerinnen und Schüler zu verbessern. Entsprechend sollen die Standards eine Orientierung über verbindliche Zielerwartungen bieten. Verbunden mit den Bildungsstandards in der Primarstufe sind Möglichkeiten zur Überprüfung, inwieweit diese Ziele am Ende der Klassenstufe 4 erreicht worden sind.

Die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* umfassen fachliche Fähigkeiten, die in allen Inhaltsbereichen der Mathematik bedeutsam sind. Im Einzelnen sind dies:

- Technische Grundfertigkeiten,<sup>1</sup>
- Problemlösen,
- Kommunizieren,
- Argumentieren,
- Darstellen,
- Modellieren.

---

<sup>1</sup> In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject>) ist die allgemeine mathematische Kompetenz „Technische Grundfertigkeiten“ noch nicht enthalten. Eine inhaltlich ähnlich beschriebene allgemeine mathematische Kompetenz findet sich allerdings bereits bei den Bildungsstandards für den Sekundarbereich („Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“). Mittlerweile wurden im Zuge der Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen in Mathematik auch für den Primarbereich die allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch die sechste Dimension der „Technischen Grundfertigkeiten“ ergänzt, weil diese Dimension in den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht hinreichend abgedeckt schien (vgl. Winkelmann/Robitzsch 2009). Ferner hat sich gezeigt, dass diese Dimension vor allem zur differenzierten Beschreibung der Aufgaben im unteren Leistungsbereich hilfreich ist. Die Ergänzung findet sich auf Seite 5 des „Kompetenzstufenmodells zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ in der Fassung vom 11.02.2013 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>.

Die für die Primarstufe beschriebenen inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen beziehen sich auf *fünf mathematische Leitideen*:

- Zahlen und Operationen,
- Raum und Form,
- Muster und Strukturen,
- Größen und Messen,
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.

Diese Leitideen sollen den Schülerinnen und Schülern helfen, zentrale mathematische Konzepte kennenzulernen und zu verstehen sowie den vernetzten Charakter der Mathematik zu erkunden. Zu den Leitideen werden inhaltsbezogene Kompetenzen unterschiedlichen Abstraktionsgrades formuliert (s. Kultusministerkonferenz 2005).

## 2.2 Kompetenzstufen im Fach Mathematik

Die oben kurz dargestellte Konzeption der Bildungsstandards Mathematik bildet einen theoretischen Rahmen zur Konzeption guten Mathematikunterrichts. Im Sinne der „Output-Orientierung“ ist von Interesse, was Schülerinnen und Schüler verschiedener Altersstufen und verschiedener Bildungsgänge „tatsächlich können“.

Auf der Grundlage empirischer Daten lassen sich sowohl Aufgaben – nach Schwierigkeit –, als auch die Schülerinnen und Schüler – nach Leistungsfähigkeit – verschiedenen „Kompetenzstufen“ zuordnen, was allen für die Unterrichtskonzeption Verantwortlichen hilfreiche Orientierungen geben kann.

Mit Hilfe entsprechender Daten wurde ein Kompetenzstufenmodell erarbeitet, das fünf hierarchisch angeordnete Kompetenzstufen enthält, die bei der Beschreibung von mathematischen Basiskompetenzen beginnen und bis zur Identifizierung eines elaborierten und souveränen Umgangs mit Mathematik in der Primarstufe gehen (vgl. Reiss, Roppelt, Haag, Pant & Köller 2012; Reiss & Winkelmann 2008; 2009). Das Modell umfasst alle in den Bildungsstandards ausgewiesenen mathematischen Leitideen. Es ermöglicht auf breiter Basis die Interpretation der mathematischen Kompetenz von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe.

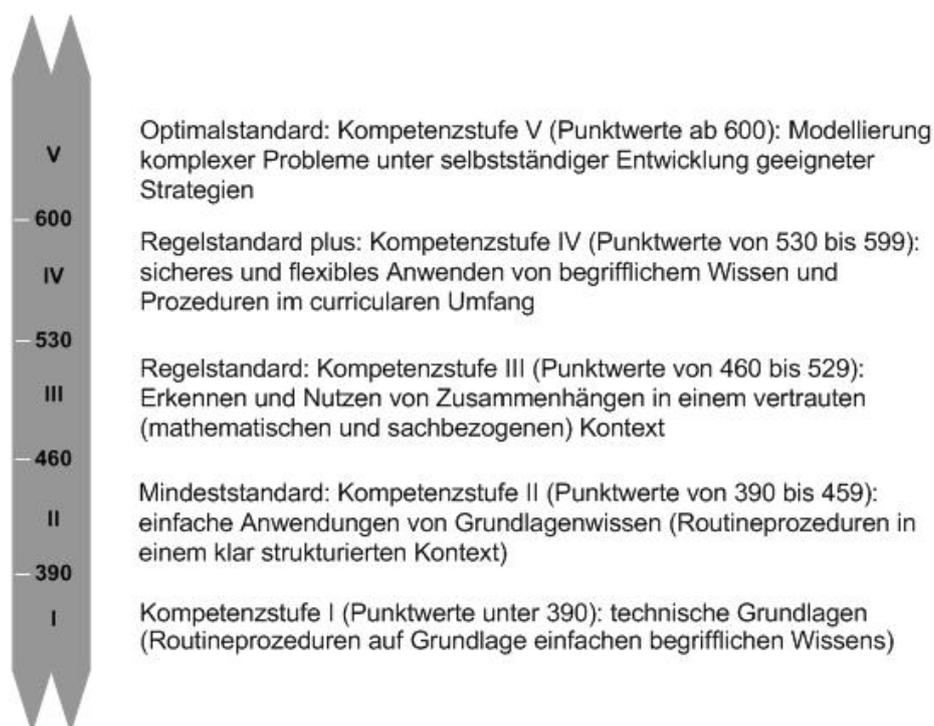


Abbildung 1: Übersicht der Kompetenzstufen aus dem Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule

*Mindeststandard.* Als Ausgangswert für die Stufeneinteilungen wurde jeweils das obere Ende von Kompetenzstufe I gewählt, und zwar so, dass alle Aufgaben mit Kennwerten unterhalb dieses Schwellenwerts nur solche Anforderungen stellen, deren einigermaßen sichere Erfüllung von *allen* Schülerinnen und Schülern des jeweiligen Bildungsgangs erwartet werden muss; man spricht hier vom *Mindeststandard* des Bildungsgangs. Schülerinnen und Schüler, die zum Ende der vierten Jahrgangsstufe die Kompetenzstufe II nicht erreichen und somit diesen Mindeststandard von 390 Punkten nicht erfüllen, haben einen besonderen *Förderbedarf*.

*Regelstandard.* Der *Regelstandard*, den die Schülerinnen und Schüler zum Ende der vierten Jahrgangsstufe zumindest *im Durchschnitt* erfüllen sollen, ist höher angesetzt. Schülerinnen und Schüler, die mindestens 460 Punkte und damit die Kompetenzstufe III oder eine höhere erreicht haben, erfüllen die in den Bildungsstandards beschriebenen Erwartungen und erreichen den von der KMK festgelegten Regelstandard.

Die oberste Stufe des hier vorgestellten Kompetenzmodells ist nach oben offen, d. h. es sind prinzipiell noch schwierigere Items und noch höhere Leistungen möglich, als in der zugrunde liegenden Erhebung vorkamen. Dementsprechend ist die niedrigste Stufe nach unten offen, d. h. es sind noch leichtere Items denkbar, die auch noch von sehr schwachen Schülerinnen und Schülern gelöst werden können.

### 3. Beschreibung der zu testenden Kompetenzbereiche

In den VERA-3 zur Mathematik werden pro Jahr jeweils *zwei* der fünf *inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche* umlaufend geprüft. Zu der Domäne *Raum und Form* werden im Folgenden einzelne Aspekte des Kompetenzbereiches differenziert dargestellt. Die Ausführungen stützen sich im Wesentlichen auf die Beschreibungen von Walther et al. (2012).

#### 3.1 Der Kompetenzbereich „Raum und Form“ in den Bildungsstandards

Zum inhaltlichen Kompetenzbereich Raum und Form gehören neben den klassischen Gebieten der Geometrie, wie dem Beschreiben, Zeichnen und Messen von Figuren und Körpern, auch zentrale Kompetenzen, die für die Weiterentwicklung geometrischen Denkens wichtig sind. Folgende Kompetenzen sollen in diesem Bereich aufgebaut werden:

- Sich im Raum orientieren
- Geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen
- Einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen
- Flächeninhalte und Rauminhalte vergleichen und messen.<sup>2</sup>

##### 3.1.1 Sich im Raum orientieren

Die Anforderungen an die inhaltliche Kompetenz „sich im Raum orientieren“ beinhalten beispielsweise gedanklich mit Körpern im dreidimensionalen Raum zu operieren. Zur zweidimensionalen Ansicht von oben sollen die entsprechenden Körper in dreidimensionaler Darstellung gefunden werden. Dazu ist es notwendig, *räumliches Vorstellungsvermögen* zu aktivieren, zu *erkennen*, wie die Ansicht von oben zu den jeweiligen Körpern aussieht und letztlich die vorgegebene *zweidimensionale Ansicht* mit der entsprechenden *dreidimensionalen Ansicht in Beziehung zu setzen*.

Der Aufbau dieser Kompetenz kann im Besonderen durch das Arbeiten mit konkreten Gegenständen (z. B. Würfeln) im zwei- oder dreidimensionalen Raum unterstützt werden. Das

---

<sup>2</sup> siehe Kultusministerkonferenz 2005, S. 10-11 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject>.

Dokumentieren räumlicher Beziehungen in Form von Plänen oder Ansichten kann die Orientierung im Raum unterstützen.

### 3.1.2 Geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen

Aspekte der Kompetenz „geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen“ werden beispielsweise deutlich, wenn anhand ausgewählter ebener Figuren die Gesamtzahl der Ecken bestimmt werden soll. Dabei ist es nötig, die *Fachbegriffe* und die *Eigenschaften der ebenen Figuren zu kennen* – in diesem Fall konkret die Anzahl der Ecken der jeweiligen Figuren. Der Bereich umfasst generell auch das *Sortieren nach bestimmten Eigenschaften* und damit einhergehend das *Beschreiben geometrischer Eigenschaften*, sowie das begründete Entscheiden, ob eine Figur zu einem Begriff gehört oder nicht. Er ist daher geeignet allgemeine Kompetenzen wie das Kommunizieren und Argumentieren zu fördern. Weiterführend soll mit den Figuren auch operiert werden und es sollen Zusammenhänge zwischen ihnen gefunden werden. Dabei können nicht nur ebene Figuren, sondern auch *räumliche Körper* angesprochen werden.

Die inhaltliche Kompetenz *geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen* umfasst zusätzlich zum Arbeiten mit Modellen von Körpern und ebenen Figuren auch das eigene Anfertigen von Zeichnungen – mit Hilfsmitteln sowie freihändig.

### 3.1.3 Einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen

Der Kompetenzbereich „einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen“ umfasst insgesamt die beiden Abbildungsarten *Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen*. Dabei steht besonders die *Beschreibung und Nutzung von Eigenschaften der Achsensymmetrie* im Mittelpunkt. Zur Lösung solcher Aufgaben müssen die *Eigenschaften der Achsensymmetrie* bekannt sein und entsprechend genutzt werden. Die quadratischen Kästchengitter bieten hier eine sinnvolle Hilfestellung beim Zeichnen eines Spiegelbildes.

Weitere Teilkompetenzen, die in diesen Bereich fallen, sind das *Fortsetzen und Entwickeln symmetrischer Muster*.

In Bezug auf Ähnlichkeitsabbildungen kann insbesondere das Vergrößern und Verkleinern von ebenen Figuren thematisiert werden. Eine wichtige Hilfestellung sind auch hier Kästchengitter, die gegebenenfalls sogar selbst durch Falten eines Papiers hergestellt werden können. So ist es beispielsweise möglich, die Ähnlichkeit der Papierbögen nach der DIN-Norm direkt zu nutzen.

### 3.1.4 Flächeninhalte und Rauminhalte vergleichen und messen

Die letzte angesprochene Kompetenz, das „Vergleichen und Messen von Flächen- und Rauminhalten“, beinhaltet beispielsweise den *Flächeninhalt* einzelner Figuren durch das *Auslegen mit Einheitsdreiecken* und *-quadraten* zu bestimmen, um anschließend die ermittelten *Flächeninhalte miteinander zu vergleichen*. Zu diesem Bereich gehört neben der Untersuchung des Flächeninhalts auch die des *Umfangs*. Darüber hinaus soll nicht nur in der Ebene operiert werden, sondern es sollen auch *Rauminhalte* unter Zuhilfenahme von Einheitswürfeln *bestimmt und verglichen* werden. Im Vordergrund steht demnach insgesamt der Prozess des Messens, wobei besonders die Invarianz des Inhalts und das Messen als Vergleichen betont werden.

## 4. Anregungen für den Unterricht

Aufgaben wie die in VERA-3 können nicht nur zur Feststellung des Leistungsstandes, sondern auch zur unterrichtlichen Förderung von Kompetenzen dienen. Dabei sei betont, dass

nicht die Aufgaben per se bei den Schülerinnen und Schülern zur Ausformung, Festigung und Weiterentwicklung der zu ihrer Lösung benötigten Kompetenzen führen, sondern nur eine den Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler angepasste Auswahl kompetenzorientierter Aufgaben und deren adäquate Behandlung im Unterricht. Die Lernenden müssen – so belegen viele empirische Untersuchungen – ausreichend Gelegenheiten haben, die entsprechenden kompetenzbezogenen Tätigkeiten (wie Argumentieren oder Modellieren) selbst zu vollziehen, mehr noch, über diese Tätigkeiten zu reflektieren, Lösungswege zu begründen, verschiedene Wege zu vergleichen, Ergebnisse kritisch zu diskutieren und vieles andere mehr. Die Ergebnisse nationaler und internationaler Leistungsvergleiche weisen darauf hin, dass im Mathematikunterricht noch bewusster und noch konsequenter als bislang die umfassende Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler im Mittelpunkt der Arbeit stehen sollte. In einem so verstandenen „kompetenzorientierten Unterricht“ achtet die Lehrkraft noch mehr als bisher auf die individuellen Kompetenzstände der Kinder und macht Aufgabenangebote für verschiedene Leistungsniveaus.

Im Kompetenzbereich *Raum und Form* kommt der Sprachbildung besondere Bedeutung zu, da im Gegensatz zur Arithmetik keine formalen Darstellungen entwickelt werden. Bereichsbezogen geht es zuerst darum, sich im umgebenden Raum oder in einem gegebenen Raum aus der eigenen Perspektive zu orientieren, und dies mit einem sicher gehandhabten Wortschatz kennzeichnen zu können, sowohl in Ortsbezeichnungen als auch in Richtungsbezeichnungen, sowohl aus der eigenen Perspektive als auch aus der von anderen. Dieser Wortschatz ist für die Mathematik wie für die Lebenswelt unerlässlich: „oben, unten, nach vorn, nach rechts, neben, unter“, etc. Elementare ebene und räumliche Figuren und ihre Eigenschaften sollen nicht nur als solche erkannt und beschrieben („gerade“, „rund“, „Rechteck“, „Kreis“, „Quadrat“, „Quader“ etc.), sondern auch als Attribute von Gegenständen der Lebenswelt gesehen und verwendet werden („runde Dose“, „gerader Stab“ etc.). Entscheidend ist darüber hinaus schließlich, an Formen und Figuren nicht nur konkret, sondern auch mental Änderungen vornehmen zu können, sowohl erfahrungsbasierte: „Ich stell mir vor, ich dreh‘ das rechtsrum.“, als auch solche, die über reale Erfahrung hinausgehen: „Ich stell mir vor, das Auto ist in Wirklichkeit viel größer.“ Dies ist der Kern des integrierenden Konzepts der *Raumvorstellung*, das nicht nur – im engeren Sinne – geometrische Gestalten betrifft, sondern auch eine Voraussetzung für das Verstehen veranschaulichender Formen in der Arithmetik und für das Schätzen und Messen von Größen ist.

Viele weitere Vorschläge für kompetenzorientiertes Unterrichten sind z. B. in Bruder/Büchter/Leuders (2008), Blum et al. (2006) oder Walther et al. (2012) enthalten.

Die hier stichwortartig genannten Aspekte sind kennzeichnend für „Unterrichtsqualität“ im Fach Mathematik. Etwas systematischer kann man dabei drei Komponenten unterscheiden<sup>3</sup>.

- Eine *fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung*, die den Kindern immer wieder vielfältige Gelegenheiten zu kompetenzbezogenen Tätigkeiten bietet (zum mathematischen Modellieren, zum Argumentieren, zum Kommunizieren usw.) und bei der vielfältige Vernetzungen sowohl innerhalb der Mathematik als auch zwischen Mathematik und Realität hergestellt werden.
- Eine *konsequente kognitive Aktivierung der Lernenden* in einem Unterricht, der geistige Schülertätigkeiten herausfordert, selbständiges Lernen und Arbeiten ermöglicht und ermutigt, lernstrategisches Verhalten (heuristische Aktivitäten) fördert und ein stetes Nachdenken über das eigene Lernen und Arbeiten (metakognitive Aktivitäten) stimuliert.
- Eine *effektive und schülerorientierte Unterrichtsführung*, bei der verschiedene Formen und Methoden flexibel variiert werden, Stunden klar strukturiert sind, eine störungspräventive und fehleroffene Lernatmosphäre geschaffen wird und Lernen und Beurteilen erkennbar getrennt sind.

---

<sup>3</sup> Man vgl. dazu das einleitende Kapitel in Blum et al. (2006).

Es gibt sicher keinen universellen Königsweg zum Unterrichtserfolg. Man weiß aber aus vielen empirischen Untersuchungen, dass Unterricht nur dann positive Effekte haben kann, wenn hinreichend viele dieser Qualitätskriterien erfüllt sind (vgl. u. a. Helmke 2006).

Ein naheliegender Weg zur Realisierung eines solchen Unterrichts im Fach Mathematik ist die Verwendung eines breiten Spektrums kompetenzorientierter Aufgaben, darunter auch „selbstdifferenzierende“ (d. h. Aufgaben, die Zugänge auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen und dadurch für stärkere wie schwächere Schülerinnen und Schüler gleichermaßen geeignet sind).

Gerade offenere Aufgabenvarianten sind hier besonders gut geeignet, da sie Schülerinnen und Schülern ermöglichen, entsprechend ihrer Fähigkeiten eigene Wege zu gehen und selbständig Lösungen zu finden. Die Lehrkraft kann dabei versuchen, möglichst viele dieser Lösungswege zu beobachten und im Bedarfsfall unterstützend einzugreifen, und sie kann nach der Bearbeitung unterschiedliche Schülerlösungen präsentieren und diskutieren lassen.

## 5. Literaturverzeichnis

Blum, Werner 2006: Die Bildungsstandards Mathematik. Einführung. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 14-32); Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Bruder, Regina / Büchter, Andreas / Leuders, Timo (Hrsg.) 2008: *Mathematikunterricht entwickeln*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Helmke, Andreas 2006: Was wissen wir über guten Unterricht? *Pädagogik*, 2, 42-45.

Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen 2013: Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ in der Fassung vom 11.02.2013. (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>)

Kultusministerkonferenz 2005: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). Beschluss vom 15.10.2004. (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject> und <http://www.kmk.org/bildung-schule/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards/ueberblick.html>)

Reiss, Kristina / Roppelt, Alexander/ Haag, Nicole/ Pant, Hans Anand/ Köller, Olaf 2012: Kompetenzstufenmodelle im Fach Mathematik. In P. Stanat, H. A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik* (S.72-84); Münster: Waxmann.

Reiss, Kristina / Winkelmann, Henrik 2008: Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. *Grundschule*, 40 (10), 34-37.

Reiss, Kristina / Winkelmann, Henrik 2009: Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik im Primarbereich. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 120-141); Weinheim: Beltz.

Walther, Gerd / van den Heuvel-Panhuizen, Marja / Granzer, Dietlinde / Köller, Olaf (Hrsg.) 2012: *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*; Berlin: Cornelsen.

Winkelmann, Henrik / Robitzsch, Alexander 2009: Modelle mathematischer Kompetenzen: Empirische Befunde zur Dimensionalität. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 169-196); Weinheim: Beltz.