



Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Didaktische Erläuterung zum Bereich Mathematik Daten, Häufigkeit und Wahrschein- lichkeit in den Vergleichsarbeiten in der 3. Jahrgangsstufe (VERA-3)



Inhaltsverzeichnis

1. Allgemeine Erläuterungen zum Fach Mathematik	3
2. Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards	3
2.1 Die Bildungsstandards Mathematik	3
2.2 Kompetenzstufen im Fach Mathematik	4
3. Beschreibung der zu testenden Kompetenzbereiche	5
3.1 Der Kompetenzbereich „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ in den Bildungsstandards	5
3.1.1 Daten erfassen und darstellen.....	5
3.1.2 Häufigkeiten	6
3.1.3 Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen	6
4. Anregungen für den Unterricht	6
5. Literaturverzeichnis	8

1. Allgemeine Erläuterungen zum Fach Mathematik

Im Folgenden werden wesentliche Komponenten der Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich sowie die hierzu empirisch konstruierten Kompetenzstufen kurz dargestellt. Ferner wird der mathematische Kompetenzbereich *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit* erläutert. Schließlich werden einige allgemeine Überlegungen zu einem Mathematikunterricht skizziert, der gute Voraussetzungen für das Erreichen der durch die Standards vorgegebenen Ziele bietet. Detailliertere unterrichtliche Anregungen sowie spezifische Aufgaben sind in den aufgabenspezifischen didaktischen Kommentaren zu finden.

2. Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards

2.1 Die Bildungsstandards Mathematik

Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich beschreiben die fachbezogenen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis zum Ende der vierten Jahrgangsstufe erworben haben sollen. Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die in aktiver Auseinandersetzung mit substantiellen Fachinhalten erworben werden können. Dabei wird zwischen allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen unterschieden.

Das wesentliche Ziel der Bildungsstandards ist es, die Qualität des Unterrichts zu steigern und dadurch die Leistungen und fachbezogenen Einstellungen aller Schülerinnen und Schüler zu verbessern. Entsprechend sollen die Standards eine Orientierung über verbindliche Zielerwartungen bieten. Verbunden mit den Bildungsstandards in der Primarstufe sind Möglichkeiten zur Überprüfung, inwieweit diese Ziele am Ende der Klassenstufe 4 erreicht worden sind.

Die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* umfassen fachliche Fähigkeiten, die in allen Inhaltsbereichen der Mathematik bedeutsam sind. Im Einzelnen sind dies:

- Technische Grundfertigkeiten,¹
- Problemlösen,
- Kommunizieren,
- Argumentieren,
- Darstellen,
- Modellieren.

¹ In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject>) ist die allgemeine mathematische Kompetenz „Technische Grundfertigkeiten“ noch nicht enthalten. Eine inhaltlich ähnlich beschriebene allgemeine mathematische Kompetenz findet sich allerdings bereits bei den Bildungsstandards für den Sekundarbereich („Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“). Mittlerweile wurden im Zuge der Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen in Mathematik auch für den Primarbereich die allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch die sechste Dimension der „Technischen Grundfertigkeiten“ ergänzt, weil diese Dimension in den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht hinreichend abgedeckt schien (vgl. Winkelmann/Robitzsch 2009). Ferner hat sich gezeigt, dass diese Dimension vor allem zur differenzierten Beschreibung der Aufgaben im unteren Leistungsbereich hilfreich ist. Die Ergänzung findet sich auf Seite 5 des „Kompetenzstufenmodells zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ in der Fassung vom 11.02.2013 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>.

Die für die Primarstufe beschriebenen inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen beziehen sich auf *fünf mathematische Leitideen*:

- Zahlen und Operationen,
- Raum und Form,
- Muster und Strukturen,
- Größen und Messen,
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.

Diese Leitideen sollen den Schülerinnen und Schülern helfen, zentrale mathematische Konzepte kennenzulernen und zu verstehen sowie den vernetzten Charakter der Mathematik zu erkunden. Zu den Leitideen werden inhaltsbezogene Kompetenzen unterschiedlichen Abstraktionsgrades formuliert (s. Kultusministerkonferenz 2005).

2.2 Kompetenzstufen im Fach Mathematik

Die oben kurz dargestellte Konzeption der Bildungsstandards Mathematik bildet einen theoretischen Rahmen zur Konzeption guten Mathematikunterrichts. Im Sinne der „Output-Orientierung“ ist von Interesse, was Schülerinnen und Schüler verschiedener Altersstufen und verschiedener Bildungsgänge „tatsächlich können“.

Auf der Grundlage empirischer Daten lassen sich sowohl Aufgaben – nach Schwierigkeit –, als auch die Schülerinnen und Schüler – nach Leistungsfähigkeit – verschiedenen „Kompetenzstufen“ zuordnen, was allen für die Unterrichtskonzeption Verantwortlichen hilfreiche Orientierungen geben kann.

Mit Hilfe entsprechender Daten wurde ein Kompetenzstufenmodell erarbeitet, das fünf hierarchisch angeordnete Kompetenzstufen enthält, die bei der Beschreibung von mathematischen Basiskompetenzen beginnen und bis zur Identifizierung eines elaborierten und souveränen Umgangs mit Mathematik in der Primarstufe gehen (vgl. Reiss, Roppelt, Haag, Pant & Köller 2012; Reiss & Winkelmann 2008; 2009). Das Modell umfasst alle in den Bildungsstandards ausgewiesenen mathematischen Leitideen. Es ermöglicht auf breiter Basis die Interpretation der mathematischen Kompetenz von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe.

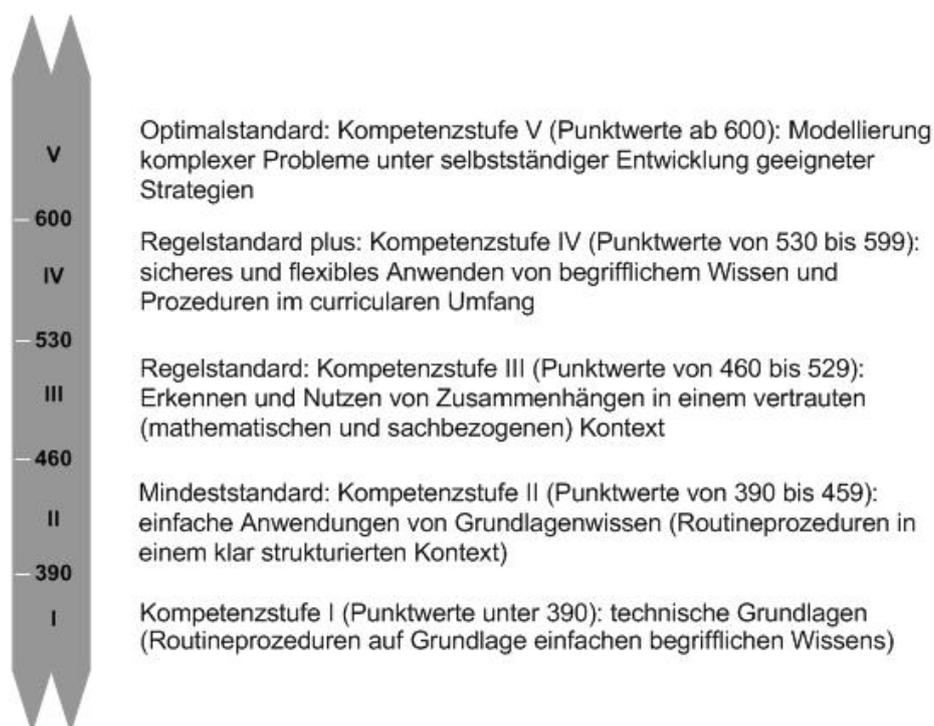


Abbildung 1: Übersicht der Kompetenzstufen aus dem Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule

Mindeststandard. Als Ausgangswert für die Stufeneinteilungen wurde jeweils das obere Ende von Kompetenzstufe I gewählt, und zwar so, dass alle Aufgaben mit Kennwerten unterhalb dieses Schwellenwerts nur solche Anforderungen stellen, deren einigermaßen sichere Erfüllung von *allen* Schülerinnen und Schülern des jeweiligen Bildungsgangs erwartet werden muss; man spricht hier vom *Mindeststandard* des Bildungsgangs. Schülerinnen und Schüler, die zum Ende der vierten Jahrgangsstufe die Kompetenzstufe II nicht erreichen und somit diesen Mindeststandard von 390 Punkten nicht erfüllen, haben einen besonderen *Förderbedarf*.

Regelstandard. Der *Regelstandard*, den die Schülerinnen und Schüler zum Ende der vierten Jahrgangsstufe zumindest *im Durchschnitt* erfüllen sollen, ist höher angesetzt. Schülerinnen und Schüler, die mindestens 460 Punkte und damit die Kompetenzstufe III oder eine höhere erreicht haben, erfüllen die in den Bildungsstandards beschriebenen Erwartungen und erreichen den von der KMK festgelegten Regelstandard.

Die oberste Stufe des hier vorgestellten Kompetenzmodells ist nach oben offen, d. h. es sind prinzipiell noch schwierigere Items und noch höhere Leistungen möglich, als in der zugrunde liegenden Erhebung vorkamen. Dementsprechend ist die niedrigste Stufe nach unten offen, d. h. es sind noch leichtere Items denkbar, die auch noch von sehr schwachen Schülerinnen und Schülern gelöst werden können.

3. Beschreibung der zu testenden Kompetenzbereiche

In den VERA-3 zur Mathematik werden pro Jahr jeweils *zwei* der fünf *inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche* umlaufend geprüft. Zu der Domäne *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit* werden im Folgenden einzelne Aspekte des Kompetenzbereiches differenziert dargestellt. Die Ausführungen stützen sich im Wesentlichen auf die Beschreibungen von Walther et al. (2012).

3.1 Der Kompetenzbereich „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ in den Bildungsstandards

Der Kompetenzbereich Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit hat höchste praktische Relevanz und eröffnet somit zahlreiche anwendungsbezogene Übungsfelder. In den Bildungsstandards umfasst die Leitidee Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit drei wesentliche zusammenhängende Aspekte mit zahlreichen mathematischen Bezügen. In der kurzen Darstellung der Bildungsstandards werden davon die folgenden Kompetenzen explizit genannt:

- Daten erfassen und darstellen
- Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen²

Demgegenüber sind Kompetenzen im Bereich *Häufigkeiten* eher implizit vorhanden. Beim Entwerfen von Aufgaben müssen allerdings alle Aspekte in den Blick genommen werden. Daher werden an dieser Stelle die unterschiedlichen Herausforderungen für alle drei Bereiche anhand entsprechender Beispiele aus VERA-3 erläutert.

3.1.1 Daten erfassen und darstellen

Der Bereich Daten umfasst zum einen das Darstellen von Daten in Schaubildern, Diagrammen und Tabellen. Dies kann vor allem im Unterricht besonders auf der Basis von Daten

² siehe Kultusministerkonferenz 2005, S. 11 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject>.

geschehen, die selbst gesammelt und strukturiert wurden. Zum anderen sollen aber auch gezielt Daten aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen entnommen werden.

Der Umgang mit Daten stellt einen wichtigen Aspekt für eine Propädeutik der Wahrscheinlichkeitsrechnung dar. Außerdem ist er geeignet, verschiedene Repräsentationsebenen anzusprechen und damit auch den Ausbau der allgemeinen Kompetenz „Mathematische Darstellungen verwenden“ zu stärken.

3.1.2 Häufigkeiten

Ein weiterer Aspekt im Hinblick auf den Umgang mit Wahrscheinlichkeiten ist das Betrachten von Möglichkeiten (etwa für das Ergebnis eines Zufallsexperiments). In der Überschrift der Leitidee wird dabei der Begriff „Häufigkeit“ gewählt. Nun ist dieser Begriff eng mit kombinatorischen Überlegungen verbunden. Gerade Aufgaben zur Kombinatorik dienen der Vorbereitung bei der Entwicklung eines tragfähigen Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Um dies auch in der Schulpraxis besser zu verankern, sollten entsprechende Aufgaben an dieser Stelle und unter dieser Leitidee in die Vergleichsarbeiten integriert werden. Davon ist unbenommen, dass entsprechend der Systematik der Bildungsstandards Aufgaben dieses Typs ggf. auch dem Inhaltsbereich „Zahlen und Operationen“ zugeordnet werden können.

3.1.3 Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen

Den inhaltlichen Schwerpunkt *Wahrscheinlichkeit* im engeren Sinne umzusetzen gestaltet sich etwas schwieriger. So gibt es hier wenige Aufgabentypen, die bereits für die Grundschule geeignet sind. Es darf nicht vergessen werden, dass wichtige Grundlagen einer systematischen Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie etwa die Bruchrechnung, in der Grundschule noch nicht behandelt sind. Es darf auch nicht vergessen werden, dass gerade in diesem Inhaltsbereich Intuition und mathematische Theorie nicht immer konform gehen. So wird etwa der Begriff „wahrscheinlich“ umgangssprachlich eher mit „guten Chancen“ verbunden, während der Begriff „unwahrscheinlich“ auf eher „schlechte Chancen“ hindeutet. In der mathematischen Umsetzung ist nur der Begriff der „Wahrscheinlichkeit“ verankert, die durch einen Wert zwischen 0 und 1 ausgedrückt wird. Dabei bezeichnet „0“ ein unmögliches Ereignis und „1“ ein sicheres Ereignis. Bei einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ tritt ein Ereignis auf lange Sicht in einem von sechs Fällen ein, so wie es etwa beim Würfeln einer „5“ der Fall ist. Bei einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ ist ungefähr die Hälfte der Fälle „günstig“, was beispielsweise für den Münzwurf oder das Würfeln einer geraden Zahl gilt. Nun aber jeweils klar zu sagen, ob ein bestimmter Wert zwischen 0 und 1 den umgangssprachlichen Begriffen „wahrscheinlich“ bzw. „unwahrscheinlich“ zuzuordnen ist, wäre wenig sinnvoll. Entsprechend sind daher Begriffe wie „wahrscheinlich“ oder „unwahrscheinlich“ für VERA nicht geeignet, könnten sie doch eher verwirrend als klärend sein – allenfalls in Vergleichen ist es sinnvoll, davon zu sprechen, dass ein Ereignis wahrscheinlicher ist als ein anderes oder weniger wahrscheinlich. Wie die Aufgabe „Aussage zuordnen“ (Abbildung 5) zeigt, bieten sich als Grundbegriffe „möglich, aber nicht sicher“, „sicher“ und „unmöglich“ an.

Neben der *Kenntnis der Grundbegriffe*, sollen die Schülerinnen und Schüler im Bereich der Wahrscheinlichkeit auch *Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten einschätzen*.

Aufgrund der Komplexität der Aufgaben ist es sicher sinnvoll, diese, wenn möglich, in einen kindgerechten Kontext einzubetten, welcher der Lebenswelt der Kinder entstammt. Hierzu zählen besonders Würfelspiele oder der Münzwurf.

4. Anregungen für den Unterricht

Aufgaben wie die in VERA-3 können nicht nur zur Feststellung des Leistungsstandes, sondern auch zur unterrichtlichen Förderung von Kompetenzen dienen. Dabei sei betont, dass

nicht die Aufgaben per se bei den Schülerinnen und Schülern zur Ausformung, Festigung und Weiterentwicklung der zu ihrer Lösung benötigten Kompetenzen führen, sondern nur eine den Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler angepasste Auswahl kompetenzorientierter Aufgaben und deren adäquate Behandlung im Unterricht. Die Lernenden müssen – so belegen viele empirische Untersuchungen – ausreichend Gelegenheiten haben, die entsprechenden kompetenzbezogenen Tätigkeiten (wie Argumentieren oder Modellieren) selbst zu vollziehen, mehr noch, über diese Tätigkeiten zu reflektieren, Lösungswege zu begründen, verschiedene Wege zu vergleichen, Ergebnisse kritisch zu diskutieren und vieles andere mehr. Die Ergebnisse nationaler und internationaler Leistungsvergleiche weisen darauf hin, dass im Mathematikunterricht noch bewusster und noch konsequenter als bislang die umfassende Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler im Mittelpunkt der Arbeit stehen sollte. In einem so verstandenen „kompetenzorientierten Unterricht“ achtet die Lehrkraft noch mehr als bisher auf die individuellen Kompetenzstände der Kinder und macht Aufgabenangebote für verschiedene Leistungsniveaus.

Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit umfasst verschiedene Aspekte. Beim Betrachten von *Daten* geht es um das Gewinnen von Übersicht: Mehrere oder viele Daten sind so darzustellen, dass man sie einerseits in ihrer Vielfalt wahrnehmen, andererseits zusammenfassend beschreiben kann – etwa durch typische „Kennwerte“. In diesem Bereich werden daher Kompetenzen zu *Größen und Messen zu Raum und Form* und zu *Zahlen und Operationen* zusammengeführt. So kommt ihm eine integrierende Funktion zu. Die betrachteten Daten sollten nicht überwiegend fiktiv, sondern authentisch aus der eigenen Lebenswelt und aus „fernen Welten“ stammen, um diese zu erschließen. Ziel ist die Kompetenz, Darstellungen zu Daten sowohl lesen als auch in gegebenem Rahmen selbst erstellen zu können. Dabei treten *Häufigkeiten* auf, einerseits als absolute Häufigkeiten, andererseits in der qualitativen Betrachtung als Anteile. Das ist ein propädeutischer Beitrag zur späteren formalisierten Betrachtung von Anteilen mit Brüchen. *Wahrscheinlichkeit* als Phänomen wird vorwiegend qualitativ betrachtet, zunächst in der Kennzeichnung „sicher, möglich aber nicht sicher, unmöglich“. Wahrscheinlichkeiten werden nicht durch explizite Werte dargestellt, das würde Bruchrechnung erfordern, vielmehr durch Wahrscheinlichkeitsvergleiche im Sinn von „gleich wahrscheinlich“ oder „wahrscheinlicher als“. Das Ziel ist hier eine erste qualitative Annäherung an rationales Argumentieren angesichts unsicherer Situationen.

Viele weitere Vorschläge für kompetenzorientiertes Unterrichten sind z. B. in Bruder/Büchter/Leuders (2008), Blum et al. (2006) oder Walther et al. (2012) enthalten.

Die hier stichwortartig genannten Aspekte sind kennzeichnend für „Unterrichtsqualität“ im Fach Mathematik. Etwas systematischer kann man dabei drei Komponenten unterscheiden³.

- Eine *fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung*, die den Kindern immer wieder vielfältige Gelegenheiten zu kompetenzbezogenen Tätigkeiten bietet (zum mathematischen Modellieren, zum Argumentieren, zum Kommunizieren usw.) und bei der vielfältige Vernetzungen sowohl innerhalb der Mathematik als auch zwischen Mathematik und Realität hergestellt werden.
- Eine *konsequente kognitive Aktivierung der Lernenden* in einem Unterricht, der geistige Schülertätigkeiten herausfordert, selbständiges Lernen und Arbeiten ermöglicht und ermutigt, lernstrategisches Verhalten (heuristische Aktivitäten) fördert und ein stetes Nachdenken über das eigene Lernen und Arbeiten (metakognitive Aktivitäten) stimuliert.
- Eine *effektive und schülerorientierte Unterrichtsführung*, bei der verschiedene Formen und Methoden flexibel variiert werden, Stunden klar strukturiert sind, eine störungspräventive und fehleroffene Lernatmosphäre geschaffen wird und Lernen und Beurteilen erkennbar getrennt sind.

³ Man vgl. dazu das einleitende Kapitel in Blum et al. (2006).

Es gibt sicher keinen universellen Königsweg zum Unterrichtserfolg. Man weiß aber aus vielen empirischen Untersuchungen, dass Unterricht nur dann positive Effekte haben kann, wenn hinreichend viele dieser Qualitätskriterien erfüllt sind (vgl. u. a. Helmke 2006).

Ein naheliegender Weg zur Realisierung eines solchen Unterrichts im Fach Mathematik ist die Verwendung eines breiten Spektrums kompetenzorientierter Aufgaben, darunter auch „selbstdifferenzierende“ (d. h. Aufgaben, die Zugänge auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen und dadurch für stärkere wie schwächere Schülerinnen und Schüler gleichermaßen geeignet sind).

Gerade offenere Aufgabenvarianten sind hier besonders gut geeignet, da sie Schülerinnen und Schülern ermöglichen, entsprechend ihrer Fähigkeiten eigene Wege zu gehen und selbständig Lösungen zu finden. Die Lehrkraft kann dabei versuchen, möglichst viele dieser Lösungswege zu beobachten und im Bedarfsfall unterstützend einzugreifen, und sie kann nach der Bearbeitung unterschiedliche Schülerlösungen präsentieren und diskutieren lassen.

5. Literaturverzeichnis

Blum, Werner 2006: Die Bildungsstandards Mathematik. Einführung. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 14-32); Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Bruder, Regina / Büchter, Andreas / Leuders, Timo (Hrsg.) 2008: *Mathematikunterricht entwickeln*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Helmke, Andreas 2006: Was wissen wir über guten Unterricht? *Pädagogik*, 2, 42-45.

Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen 2013: Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ in der Fassung vom 11.02.2013. (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>)

Kultusministerkonferenz 2005: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). Beschluss vom 15.10.2004. (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject> und <http://www.kmk.org/bildung-schule/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards/ueberblick.html>)

Reiss, Kristina / Roppelt, Alexander/ Haag, Nicole/ Pant, Hans Anand/ Köller, Olaf 2012: Kompetenzstufenmodelle im Fach Mathematik. In P. Stanat, H. A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik* (S.72-84); Münster: Waxmann.

Reiss, Kristina / Winkelmann, Henrik 2008: Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. *Grundschule*, 40 (10), 34-37.

Reiss, Kristina / Winkelmann, Henrik 2009: Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik im Primarbereich. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 120-141); Weinheim: Beltz.

Walther, Gerd / van den Heuvel-Panhuizen, Marja / Granzer, Dietlinde / Köller, Olaf (Hrsg.) 2012: *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*; Berlin: Cornelsen.

Winkelmann, Henrik / Robitzsch, Alexander 2009: Modelle mathematischer Kompetenzen: Empirische Befunde zur Dimensionalität. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 169-196); Weinheim: Beltz.