

ILLUSTRIERENDE LERNAUFGABE FÜR DIE WEITERENTWICKELTEN BILDUNGSSTANDARDS IM FACH MATHEMATIK SEKUNDARSTUFE I

Aufgabentitel	Toms Problem mit dem Zinseszins
Ziele der Aufgabe	Die Schülerinnen und Schüler nutzen und erzeugen Darstellungen mit Hilfe einer Tabellenkalkulation, um Effekte des Zinseszins auf der Ebene des Problemlösens zu entdecken.
Bildungsstufe	<input type="checkbox"/> ESA <input type="checkbox"/> MSA <input checked="" type="checkbox"/> Beide
Klassenstufe	9 - 10
Bearbeitungszeit gesamt in Minuten	25
Leitidee 1	Strukturen und funktionaler Zusammenhang
Einsatz von (digitalen) Medien	Tabellenkalkulation
Unterrichtsphase	Entdecken/Einstieg
Information	Nicht angesprochene Bereiche der Teilkompetenzen werden ausgegraut.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Strukturen und funktionaler Zusammenhang: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • erkennen und verwenden funktionale Zusammenhänge in Alltagssituationen und stellen diese in verschiedenen Repräsentationen dar (sprachlich, tabellarisch, grafisch, lineare Funktionen auch algebraisch) und können zwischen diesen Darstellungsformen wechseln, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (ESA) • erkennen und verwenden funktionale Zusammenhänge und stellen diese in verschiedenen Repräsentationen dar (sprachlich, tabellarisch, grafisch, algebraisch) und können zwischen diesen Darstellungsformen wechseln, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (MSA) • lösen realitätsnahe Probleme im Zusammenhang mit linearen, proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen, ggf. auch mit Hilfe des Dreisatzes, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (ESA, MSA)
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Probleme mathematisch lösen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • wählen geeignete Heuristiken zur Lösung entsprechender Probleme aus. (AFB II) <p>Mit Medien mathematisch arbeiten: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • nutzen analoge und digitale Mathematikwerkzeuge (z. B. Geometriesoftware, Tabellenkalkulation, Computeralgebrasystem, Stochastiktool) zum Problemlösen, Entdecken, Modellieren, Daten verarbeiten, Kontrollieren und Darstellungswechseln etc. (AFB II)



Material und Aufgabenstellung

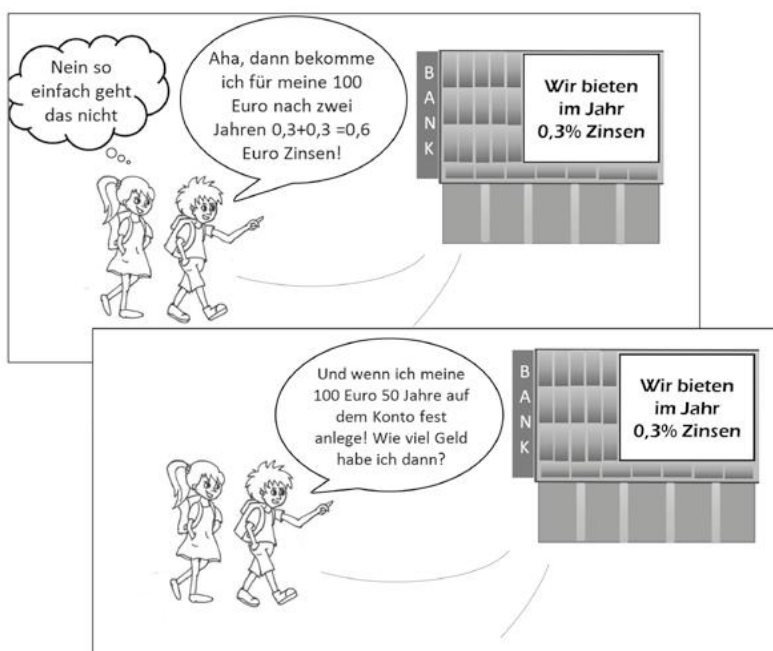


Abbildung 1

Wie viel Geld hat Tom nach 50 Jahren?

- a) Schätze, welches Kapital (Geld) Tom hat, wenn er so wie in Bild 1 weiterrechnet.
- b) Erstelle mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms folgende Tabelle und bestimme die fehlende Werte mit entsprechenden Formeln.

Gib an, welches Kapital Tom nach 50 Jahren haben wird.

	A	B	C	D
1		Startkapital:	100 Euro	
2		Zinssatz:	0,3%	
3				
4	Jahr	Kapital (Jahresanfang)	Jahreszinsen	Kapital (Jahresende)
5	2020	100,00		
6	2021			
7	2022			
8	2023			
9	2024			

Abbildung 2



Lösung

- a) individuelle Schätzungen
- b) mögliche Formel für D5: = B5 + C5
 mögliche Formel für C5: = B5 * C2
 Formel für B6: = D5

Nach 50 Jahren hat Tom ein Kapital von 116,16 Euro.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Startkapital:	100 Euro					
2		Zinssatz:	0,3%					
3								
4	Jahr	Kapital (Jahresanfang)	Jahreszinsen	Kapital (Jahresende)	linear			
41	2056	111,39	0,334	111,72	111,10			
42	2057	111,72	0,335	112,06	111,40			
43	2058	112,06	0,336	112,39	111,70			
44	2059	112,39	0,337	112,73	112,00			
45	2060	112,73	0,338	113,07	112,30			
46	2061	113,07	0,339	113,41	112,60			
47	2062	113,41	0,340	113,75	112,90			
48	2063	113,75	0,341	114,09	113,20			
49	2064	114,09	0,342	114,43	113,50			
50	2065	114,43	0,343	114,77	113,80			
51	2066	114,77	0,344	115,12	114,10			
52	2067	115,12	0,345	115,46	114,40			
53	2068	115,46	0,346	115,81	114,70			
54	2069	115,81	0,347	116,16	115,00			ohne Zinseszins
55	2070	116,16	0,348	116,51	115,30			100+50*0,3 = 115 Euro

Abbildung 3

Hinweise: Die Jahreszinsen müssten eigentlich auf Cent gerundet werden. Der Einfluss des Rundens ist hier jedoch vernachlässigbar. Das Kapital nach 50 Jahren beträgt ebenfalls 116,16 €. Je nach Vorwissen der Schülerinnen und Schüler kann das Runden erwartet oder thematisiert werden.



Ergänzende Hinweise

Die Teilaufgabe kann auch zum Üben genutzt werden.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Strukturen und funktionaler Zusammenhang: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> erkennen und verwenden funktionale Zusammenhänge in Alltagssituationen und stellen diese in verschiedenen Repräsentationen dar (sprachlich, tabellarisch, grafisch, lineare Funktionen auch algebraisch) und können zwischen diesen Darstellungsformen wechseln, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (ESA) erkennen und verwenden funktionale Zusammenhänge und stellen diese in verschiedenen Darstellungen dar (sprachlich, tabellarisch, graphisch, algebraisch) und können zwischen diesen Darstellungsformen wechseln, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (MSA)
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Probleme mathematisch lösen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> lösen anspruchsvolle, komplexe oder offen formulierte Probleme. (AFB III) reflektieren das Finden von Lösungsideen, vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege. (AFB III) <p>Mit Medien mathematisch arbeiten: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> nutzen analoge und digitale Mathematikwerkzeuge (z. B. Geometriesoftware, Tabellenkalkulation, Computeralgebrasystem, Stochastiktool) zum Problemlösen, Entdecken, Modellieren, Daten verarbeiten, Kontrollieren und Darstellungswechseln etc. (AFB II)



Material und Aufgabenstellung

Gib das Kapital an, das Tom in Bild 1 nach zwei Jahren vermutet.
Ermittle das Kapital, das nach Toms Berechnung in Bild 1 nach 50 Jahren entstanden wäre.
Vergleiche deine Lösung mit Toms Kapital nach 50 Jahren.



Lösung

Nach Toms Vermutung in Bild 1 wäre nach zwei Jahren ein Kapital von 100,60 € ($100 + 2 \cdot 0,3 = 100,60$) und nach 50 Jahren ein Kapital von 115 Euro ($100 + 50 \cdot 0,3 = 115$) entstanden.
Im Vergleich zur Berechnung mit Berücksichtigung des Zinseszinses sind das nach 50 Jahren 1,16 Euro weniger. Tom geht in jedem Jahr von dem gleichen Anfangskapital und einem jährlich festen Betrag an Zinsen aus, aber nach der Berechnung gemäß Bild 2 ist das zu verzinsende Kapital am Jahresanfang gleich dem Kapital am Ende des vorangegangenen Jahres und die Jahreszinsen nehmen von Jahr zu Jahr zu. Der Betrag mit Zinseszins nach 50 Jahren ist daher etwas höher, als wenn es eine lineare Zunahme wäre.



Ergänzende Hinweise

Je nach Kenntnisstand der Schülerinnen und Schüler kann die Teilaufgabe auch mittels einer Tabellenkalkulation gelöst werden.

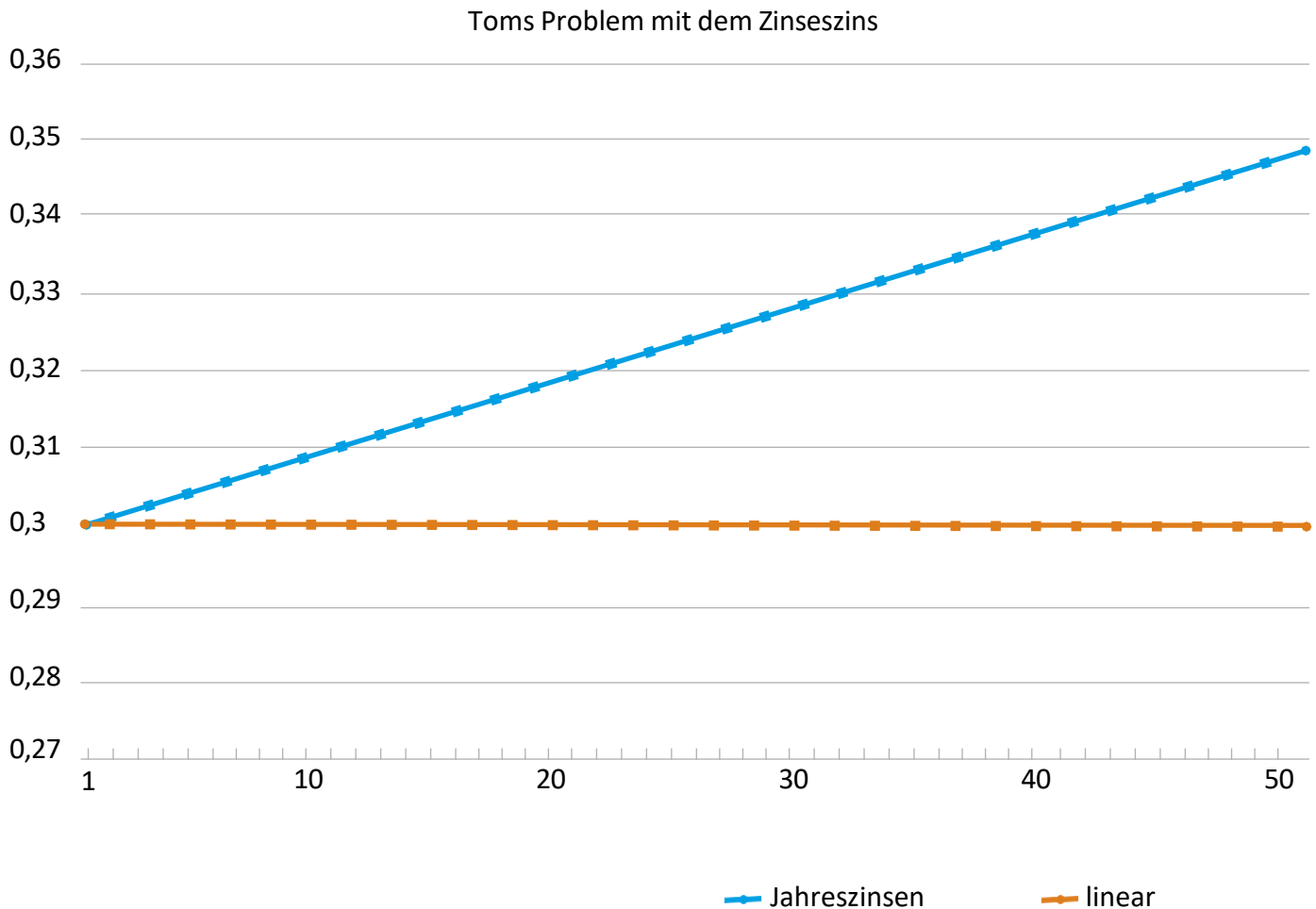
	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Strukturen und funktionaler Zusammenhang: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • erkennen und verwenden funktionale Zusammenhänge in Alltagssituationen und stellen diese in verschiedenen Repräsentationen dar (sprachlich, tabellarisch, grafisch, lineare Funktionen auch algebraisch) und können zwischen diesen Darstellungsformen wechseln, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (ESA) • analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche Darstellungen funktionaler Zusammenhänge (lineare, proportionale und anti-proportionale sowie quadratische Funktionen), auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (MSA)
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch kommunizieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • erfassen, interpretieren und deuten komplexere mathemathikhaltige Texte und Abbildungen sinnentnehmend und strukturieren Informationen. (AFB II) • verwenden die mathematische Fachsprache situationsangemessen und erklären ihre Bedeutung. (AFB II) <p>Mit Medien mathematisch arbeiten: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • nutzen analoge und digitale Mathematikwerkzeuge (z. B. Geometriesoftware, Tabellenkalkulation, Computeralgebrasystem, Stochastiktool) zum Problemlösen, Entdecken, Modellieren, Daten verarbeiten, Kontrollieren und Darstellungswechseln etc. (AFB II)



Material und Aufgabenstellung

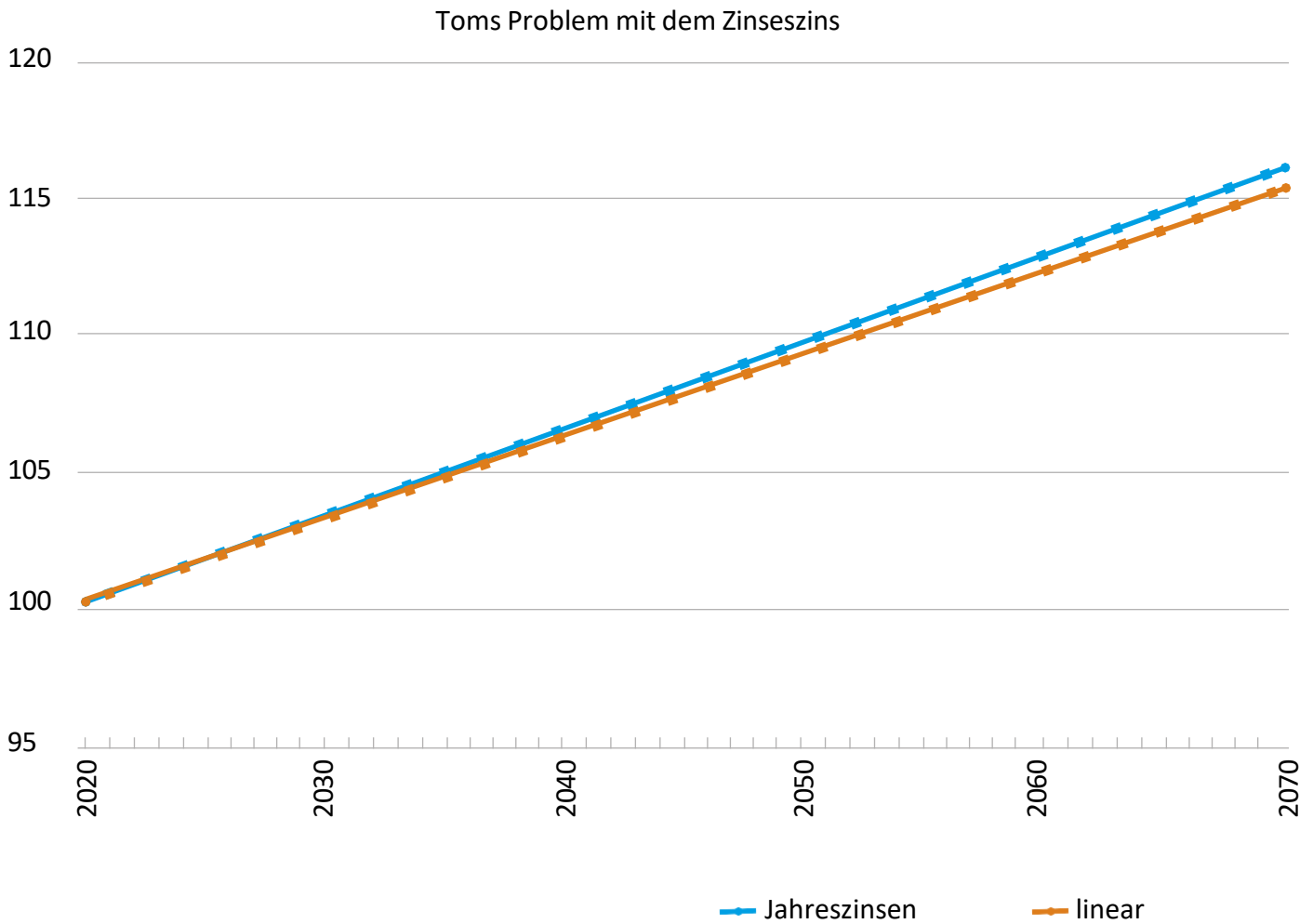
Stelle beide Verläufe der Jahreszinsen grafisch dar.

Beschreibe die Graphen mit deinen eigenen Worten. Verwende dabei die mathematische Fachsprache.



Der Graph mit den konstanten Jahreszinsen (hier als „linear“ bezeichnet, Berechnung nach Bild 1) verläuft parallel zur x-Achse in der Höhe von 0,30. Der Graph mit den steigenden Jahreszinsen (Berechnung nach Bild 2) steigt kontinuierlich.

Alternative: Darstellung des Kapitals am Jahresende statt der Jahreszinsen



Der Verlauf des Graphen gemäß der Berechnung nach Bild 1 ist linear. Für die Berechnung mit Berücksichtigung des Zinseszinses verläuft der Graph exponentiell wachsend. Beide Graphen starten beim gleichen Anfangswert. Mit der Zeit liegt der Zinseszins-Graph immer deutlicher über dem Graphen mit dem festen Zinsbetrag pro Jahr.



Ergänzende Hinweise

Die Darstellung der y-Achse beginnt hier in den beiden Abbildungen nicht bei der Null. Dies ist jedoch bei einer Lösung von Schülerinnen und Schülern zu erwarten bzw. könnte ein Diskussionsanlass sein.

Je nach Kenntnisstand der Schülerinnen und Schüler kann die Teilaufgabe auch z.B. mittels einer Tabellenkalkulation gelöst werden.



Ergänzende Hinweise Für alle Teilaufgaben:

Grundsätzlich ist dieser Aufgabentyp des Vergleichens zweier Angebote gut zum Vertiefen und Anwenden geeignet.

- Voraussetzungen / Grenzen: Den Schülerinnen und Schülern sollte die Verwendung einfacher Formeln bei einer Tabellenkalkulation bekannt sein.
- Potenzial / Differenzierung:
 - Für MSA ließe sich je nach Wissensstand auch noch ein Aufgabenteil anschließen, in dem die jeweiligen Funktionen für das Kapital am Jahresende aufgestellt werden. Dies böte dann die Möglichkeit, auch einen Fokus auf den Vergleich der Darstellungsformen – Tabelle, Graph, Term – zu setzen.
 - Für ESA ermöglicht diese Aufgabe einen guten Zugang zu einem nicht-linearen und nicht-quadratischen Wachstumsprozess, wenn man statt der Jahreszinsen das Kapital näher betrachtet.
 - Durch den Darstellungswechsel Tabelle-Graph wird ein vertieftes Verständnis von Beziehungen und Strukturen gefördert. Dabei ergänzen sich funktionales Denken und das graphische Vorstellungsvermögen. Mit Hilfe der graphischen Darstellung kann der Unterschied der beiden Vorgehensweisen bzgl. der Bestimmung der Jahreszinsen deutlich hervorgehoben werden. Allein in der tabellarischen Darstellung könnte der Unterschied im Betrag nach 50 Jahren den Schülerinnen und Schülern ggf. nicht wesentlich erscheinen.
 - Die Verwendung einer Tabellenkalkulation unterstützt die Schülerinnen und Schüler bei der Erkennung von Termstrukturen. Zugleich bietet sie eine Entlastung in der reinen Rechenleistung und ermöglicht sowohl im Bereich ESA als auch MSA eine Unterstützung und damit Fokussierung auf den Kern der mathematischen Zusammenhänge.
 - Die Aufgabe bietet einen Gesprächsanlass zur aktuell realen Zinssituation sowie der Frage, wann eine Festanlage über 50 Jahre sinnvoll ist. Zusätzlich könnte eine Variation des Zinssatzes sowie des Anfangskapitals erfolgen. Daraus könnten sich weitere Fragestellungen ergeben, bei welcher Änderung der Parameter z.B. der Unterschied zwischen beiden Verläufen zeitlich deutlich früher liegt, wenn man das Kapital statt der Jahreszinsen betrachtet.



Quellen

Abbildung 1: Copyright Grafik: IQB e. V. (2022). Comic. Lizenz: Creative Commons (CC BY). Volltext unter: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode.de>

Abbildungen 2 und 3: Erstellt mit Excel.