

ILLUSTRIERENDE LERNAUFGABE FÜR DIE WEITERENTWICKELTEN BILDUNGSSTANDARDS IM FACH MATHEMATIK SEKUNDARSTUFE I

Aufgabentitel	Töne mit Sinusfunktionen beschreiben
Ziele der Aufgabe	Die Schülerinnen und Schüler gehen flexibel mit Parametern der Sinusfunktion um und nutzen dazu digitale Werkzeuge.
Bildungsstufe	<input type="checkbox"/> ESA <input checked="" type="checkbox"/> MSA <input type="checkbox"/> Beide
Klassenstufe	10
Bearbeitungszeit gesamt in Minuten	45
Leitidee 1	Strukturen und funktionaler Zusammenhang
Einsatz von (digitalen) Medien	Geogebra
Unterrichtsphase	1 - 4: Entdecken/Einstieg 5, 6: Systematisieren
Information	Nicht angesprochene Bereiche der Teilkompetenzen werden ausgegraut.

STIMULUS: Ton einer Funktion

Töne entstehen durch die Schwingung von Luftteilchen. Da man alle Schwingungen mit Hilfe von Sinusfunktionen beschreiben kann, lassen sich auch Töne mit Sinusfunktionen beschreiben. Um unterschiedlich laute oder unterschiedlich hohe Töne darzustellen, muss man die grundlegende Sinusfunktion aber anpassen. Wie man das machen kann, lernst du in den folgenden Aufgaben.

Durch Klicken der Knöpfe in der GeoGebra-Datei kannst du den Ton hören, der zur dargestellten Funktion gehört, und auch wieder ausstellen. Falls du nichts hören kannst, versuche die Lautstärke deines Geräts höher zu regeln. Am besten benutzt du Kopfhörer.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Strukturen und funktionaler Zusammenhang: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • verwenden die Sinusfunktion in der Form $f(x)=a \cdot \sin(b \cdot x)$ zur Beschreibung von periodischen Vorgängen mit Hilfe digitaler Medien • erkennen und verwenden funktionale Zusammenhänge und stellen diese in verschiedenen Repräsentationen dar (sprachlich, tabellarisch, grafisch, algebraisch) und können zwischen diesen Darstellungsformen wechseln, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge • beschreiben Veränderungen von Größen mittels Funktionen (auch nicht lineare Veränderungen), auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge, • geben zu vorgegebenen Funktionen Sachsituationen an, die mit Hilfe dieser Funktion beschrieben werden können.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch modellieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • wählen ein geeignetes mathematisches Modell aus. (AFB II) <p>Mathematisch darstellen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • wechseln sachgerecht zwischen mathematischen Darstellungen und erklären, wie sie vernetzt sind (AFB II) <p>mit Medien mathematisch arbeiten: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • nutzen analoge und digitale Lernumgebungen zum Lernen von Mathematik (AFB I)



Material und Aufgabenstellung

Verändere mit dem Schieberegler den Wert von a . Beschreibe,

- wie man am Graphen den Wert von a ablesen kann und wie der Wert von a den Verlauf des Graphen verändert.
- welche Bedeutung a für den Kontext der Schwingungen und Töne hat.



Lösung

Der Wert von a ist der maximale Ausschlag des y -Werts des Graphen (die sogenannte Amplitude). Durch den Wert von a wird der Graph in y -Richtung gestreckt oder gestaucht.

Im Kontext der Schwingungen bestimmt die Amplitude die wahrgenommene Lautstärke des Tones. Je größer der Betrag von a ist, desto lauter ist der Ton.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Strukturen und funktionaler Zusammenhang: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • verwenden die Sinusfunktion in der Form $f(x)=a \cdot \sin(b \cdot x)$ zur Beschreibung von periodischen Vorgängen mit Hilfe digitaler Medien • erkennen und verwenden funktionale Zusammenhänge und stellen diese in verschiedenen Repräsentationen dar (sprachlich, tabellarisch, grafisch, algebraisch) und können zwischen diesen Darstellungsformen wechseln, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge • beschreiben Veränderungen von Größen mittels Funktionen (auch nicht lineare Veränderungen), auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge, • geben zu vorgegebenen Funktionen Sachsituationen an, die mit Hilfe dieser Funktion beschrieben werden können.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch modellieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • wählen ein geeignetes mathematisches Modell aus. (AFB II) <p>Mathematisch darstellen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • wechseln sachgerecht zwischen mathematischen Darstellungen und erklären, wie sie vernetzt sind (AFB II) <p>mit Medien mathematisch arbeiten: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • nutzen analoge und digitale Lernumgebungen zum Lernen von Mathematik (AFB I)



Material und Aufgabenstellung

Verändere mit dem Schieberegler den Wert von b . Beschreibe,

- wie b und der Graph der Funktion zusammenhängen ("Je größer b ist, desto...").
- wie der Graph der Funktion und der Ton bezüglich b zusammenhängen.

Nutze dazu die GeoGebra Datei im Aufgabenpaket.

Sinusfunktion mit Parametern verändern

Nun sollst du die Graphen selbst erzeugen und lernen, wie man die Parameter a und b mit den Funktions-term $\sin(x)$ verknüpfen muss, um die Funktionen zu den Tönen zu erhalten und wie sich die Parameter im Allgemeinen auswirken. Dafür ist in der nächsten GeoGebra-Datei zunächst nur der Graph zu $\sin(x)$ vorgegeben. Die Funktionen mit den Parametern musst du selbst ergänzen.



Lösung

Mögliche Beschreibungen: Je größer b ist, desto geringer ist der Abstand der „Berge“ und „Täler“. Je größer b ist, desto größer ist die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit (die sog. Frequenz). Je größer b ist, desto stärker ist der Graph entlang der x-Achse gestaucht.

Je größer b und damit die Frequenz ist, desto höher klingt der Ton.

Darüber hinaus werden aber unterschiedliche Frequenzen auch bei gleicher Amplitude unterschiedlich laut wahrgenommen. Dabei werden bis ca. 1000 Hz höhere Frequenzen als lauter wahrgenommen; vgl. <https://de.wikipedia.org/wiki/Lautheit>. Der Effekt kann zusätzlich durch die Charakteristik des Lautsprechers verstärkt werden, insbesondere bei tiefen Tönen.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Strukturen und funktionaler Zusammenhang: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • verwenden die Sinusfunktion in der Form $f(x)=a \cdot \sin(b \cdot x)$ zur Beschreibung von periodischen Vorgängen mit Hilfe digitaler Medien • bestimmen kennzeichnende Merkmale von Funktionen in den verschiedenen Darstellungen der Funktion und stellen Beziehungen zwischen Funktionsterm und Graph her.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch darstellen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • wechseln sachgerecht zwischen mathematischen Darstellungen und erklären, wie sie vernetzt sind (AFB II) <p>mit Medien mathematisch arbeiten: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • nutzen <i>analoge und digitale</i> Mathematikwerkzeuge (z. B. Geometriesoftware, <i>Tabellenkalkulation</i>, Computeralgebrasystem, <i>Stochastiktool</i>) zum <i>Problemlösen, Entdecken, Modellieren, Daten verarbeiten, Kontrollieren</i> und <i>Darstellungswechseln</i> etc. (AFB II)



Material und Aufgabenstellung

Vergleiche die Graphen der Funktionen s und g mit $s(x)=\sin(x)$ und $g(x)=a \cdot \sin(x)$ für verschiedene Werte von a . Beachte: Bei Aufgabe 1 konnte der Parameter a nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen, jetzt sollst du aber auch $a > 1$ und $a < 0$ betrachten. Notiere deine Ergebnisse stichpunktartig. Mögliches Vorgehen:

- Erstelle einen Schieberegler für a .
- Definiere die Funktion g mit $g(x)=a \cdot \sin(x)$.
- Verändere mit Hilfe des Schiebereglers den Wert von a auf verschiedene Werte zwischen -5 und +5.



Lösung

Der Parameter a streckt ($|a|>1$) oder staucht ($|a|<1$) die Funktion in y -Richtung im Vergleich zu $\sin(x)$. Das heißt, die Amplitude wird größer bzw. kleiner. Dabei wird für negative a der Graph im Vergleich zu $|a| \cdot \sin(x)$ zusätzlich an der x -Achse gespiegelt. (Das ist das gleiche Verhalten, wie bei den quadratischen Funktionen vom Typ ax^2 .)

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Strukturen und funktionaler Zusammenhang: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • verwenden die Sinusfunktion in der Form $f(x)=a \cdot \sin(b \cdot x)$ zur Beschreibung von periodischen Vorgängen mit Hilfe digitaler Medien • bestimmen kennzeichnende Merkmale von Funktionen in den verschiedenen Darstellungen der Funktion und stellen Beziehungen zwischen Funktionsterm und Graph her.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch darstellen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • wechseln sachgerecht zwischen mathematischen Darstellungen und erklären, wie sie vernetzt sind (AFB II) <p>mit Medien mathematisch arbeiten: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • nutzen <i>analoge und digitale</i> Mathematikwerkzeuge (z. B. Geometriesoftware, <i>Tabellenkalkulation</i>, Computeralgebrasystem, <i>Stochastiktool</i>) zum <i>Problemlösen, Entdecken, Modellieren, Daten verarbeiten, Kontrollieren</i> und <i>Darstellungswechseln</i> etc. (AFB II)



Material und Aufgabenstellung

Um Töne mathematisch beschreiben zu können, genügt allein der Parameter a zum Anpassen der Sinusfunktion noch nicht. In der Funktion h mit $h(x)=\sin(b \cdot x)$ wird die Sinusfunktion durch den Parameter b verändert. Untersuche wie in der vorherigen Aufgabe, wie sich der Wert von b auf die Funktion h auswirkt und fasse deine Ergebnisse stichpunktartig zusammen.



Lösung

Im Vergleich zu $\sin(x)$ streckt bzw. staucht der Parameter b den Graphen entlang der x -Achse. Dabei wird für $|b|>1$ gestaucht und für $|b|<1$ gestreckt (umgekehrt zu a !).

Für negative b wird der Graph zusätzlich an der y -Achse gespiegelt.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Strukturen und funktionaler Zusammenhang: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • verwenden die Sinusfunktion in der Form $f(x)=a \cdot \sin(b \cdot x)$ zur Beschreibung von periodischen Vorgängen mit Hilfe digitaler Medien • bestimmen kennzeichnende Merkmale von Funktionen in den verschiedenen Darstellungen der Funktion und stellen Beziehungen zwischen Funktionsterm und Graph her.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch darstellen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • wechseln sachgerecht zwischen mathematischen Darstellungen und erklären, wie sie vernetzt sind (AFB II) <p>Mathematisch kommunizieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • präsentieren sachgerecht komplexe mathematische Sachverhalte mündlich und schriftlich (AFB III) <p>mit mathematischen Objekten umgehen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • beschreiben die innere Struktur mathematischer Objekte (z. B. von Termen) und gehen flexibel und sicher mit ihnen um. (AFB II)



Material und Aufgabenstellung

Formuliere einen Merksatz, in dem du deine Erkenntnisse zu verallgemeinerten Sinusfunktionen der Form $f(x)=a \cdot \sin(b \cdot x)$ zusammenfasst. Achte darauf, Fachsprache zu verwenden und alle relevanten Fälle zu unterscheiden.



Lösung

Der Graph einer verallgemeinerten Sinusfunktion mit der Gleichung $f(x)=a \cdot \sin(b \cdot x)$ entsteht aus der einfachen Sinusfunktion durch Strecken und Stauchen entlang der x- bzw. y-Richtung, wobei:

Parameter a y-Richtung – Strecken für $|a|>1$; Stauchen für $|a|<1$

Parameter b x-Richtung – Strecken für $|b|<1$; Stauchen für $|b|>1$

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Strukturen und funktionaler Zusammenhang: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • verwenden die Sinusfunktion in der Form $f(x)=a*\sin(b*x)$ zur Beschreibung von periodischen Vorgängen mit Hilfe digitaler Medien • beschreiben Veränderungen von Größen mittels Funktionen (auch nicht lineare Veränderungen), auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge, • geben zu vorgegebenen Funktionen Sachsituationen an, die mit Hilfe dieser Funktion beschrieben werden können.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch darstellen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • wechseln sachgerecht zwischen mathematischen Darstellungen und erklären, wie sie vernetzt sind (AFB II) <p>Mathematisch kommunizieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • erfassen, interpretieren und deuten komplexere mathematikhaltige Texte und Abbildungen sinnentnehmend und strukturieren Informationen (AFB II) <p>Mathematisch modellieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • wählen ein geeignetes mathematisches Modell aus (AFB II) <p>mit Medien mathematisch arbeiten: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • verwenden allgemeine Medien zur Kommunikation (z. B. Recherche in Fachliteratur oder Internet, Nutzung von Lernplattformen) und zur Präsentation mathematischer Inhalte in Situationen, in denen der Einsatz geübt wurde. (AFB I)



Material und Aufgabenstellung

In der Musik wird ein bestimmter Abstand zwischen zwei Tönen als Oktave, ein anderer Abstand als Quinte bezeichnet. Recherchiere, wie man die Parameter a und/oder b ändern muss, damit der Ton eine Oktave bzw. Quinte höher wird und erläutere deine Ergebnisse.

Nutze dazu die 2. GeoGebra Datei im Aufgabenpaket



Lösung

Die Tonhöhe wird nur vom Parameter b beeinflusst, a spielt hierfür keine Rolle. Erhöht man einen Ton um eine Oktave, hat der neue Ton die doppelte Frequenz. Da die Frequenz proportional zu b ist, muss man b verdoppeln, um eine Oktave zu erhalten. Bei einer Quinte beträgt das Verhältnis der Frequenzen dagegen $\frac{3}{2}$, also liefert das eineinhalbfache b eine Quinte.



Ergänzende Hinweise:

Für alle Teilaufgaben:

Die (einfache) Sinusfunktion $\sin(x)$ und ihr Graph werden als bekannt vorausgesetzt.

Der Aufgabe liegt ein Blatt mit Tipps zu GeoGebra bei, in dem die Funktionen des Programms erklärt werden, die für diese Aufgabe benötigt werden. Gedacht ist das Blatt insbesondere für Schülerinnen und Schüler mit wenig Erfahrung mit dem Grafikrechner.

Die Bedeutung des Parameters b für den Klang eines Tons ist komplex. Einerseits bestimmt b die Frequenz des Tons (und damit die Tonhöhe), aber das menschliche Gehör nimmt unterschiedliche Frequenzen unterschiedlich laut wahr. Somit variiert mit b nicht nur die Tonhöhe, sondern auch die wahrgenommene Lautstärke des Tons (vgl. Lösung zu Aufgabe 2).