Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

ILLUSTRIERENDE LERNAUFGABE FÜR DIE WEITERENTWICKELTEN BILDUNGSSTANDARDS IM FACH MATHEMATIK SEKUNDARSTUFE I

Aufgabentitel	Hamsterhaltung
Ziele der Aufgabe	01: Die Schülerinnen und Schüler vergleichen Flächeninhalte zusammengesetzter Flächen. 02: Die Schülerinnen und Schüler setzten Umfang und Durchmesser zueinander in Beziehung. 03: Die Schülerinnen und Schüler berechnen das Volumen eines Zylinders und ermitteln die Auswirkung des Veränderns einer Variablen beim Volumen
Bildungsstufe	☐ ESA ☐ MSA ☒ Beide
Klassenstufe	9 - 10
Bearbeitungszeit gesamt in Minuten	60 - 90
Leitidee 1	Größen und Messen
Leitidee 2	Raum und Form
Einsatz von (digitalen) Medien	Taschenrechner, Formelsammlung, Lineal, Zirkel
Unterrichtsphase	Systematisieren
Information	Nicht angesprochene Bereiche der Teilkompetenzen werden ausgegraut.

KULTUSMINISTER KONFERENZ

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	**Größen und Messen:** Die Schülerinnen und Schüler • ermitteln Flächeninhalt und Umfang von Rechteck, Dreieck und Kreis sowie daraus zusammengesetzten Figuren, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. **Raum und Form:** Die Schülerinnen und Schüler • zeichnen und konstruieren geometrische Figuren unter Verwendung angemessener Medien wie Zirkel, Geodreieck oder digitaler Mathematik-werkzeuge.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	**Mit mathematischen Objekten umgehen:** Die Schülerinnen und Schüler • verwenden Routineverfahren (z. B. Lösen einer linearen Gleichung). (AFB I) **Mathematisch darstellen:** Die Schülerinnen und Schüler • nutzen und erzeugen vertraute und geübte Darstellungen von mathema-tischen Objekten und Situationen. (AFB I)

Material und Aufgabenstellung

Georg und Ayla überlegen sich einen Hamster zu halten.

Die Grundfläche des Hamsterkäfigs soll mindestens 1 m² groß sein, damit er genügend Auslauf hat. Zwei mögliche Grundrisse sind abgebildet.

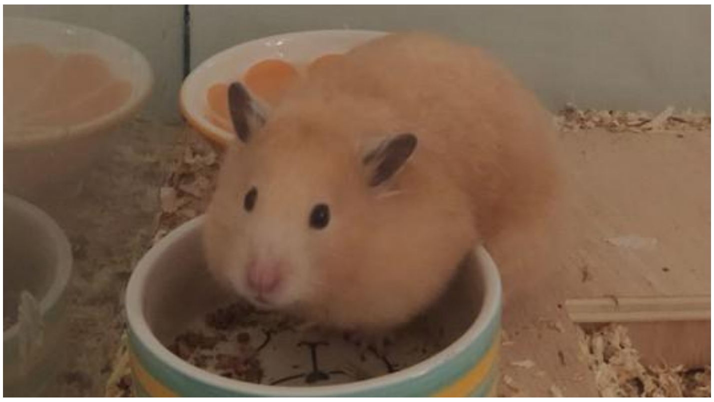
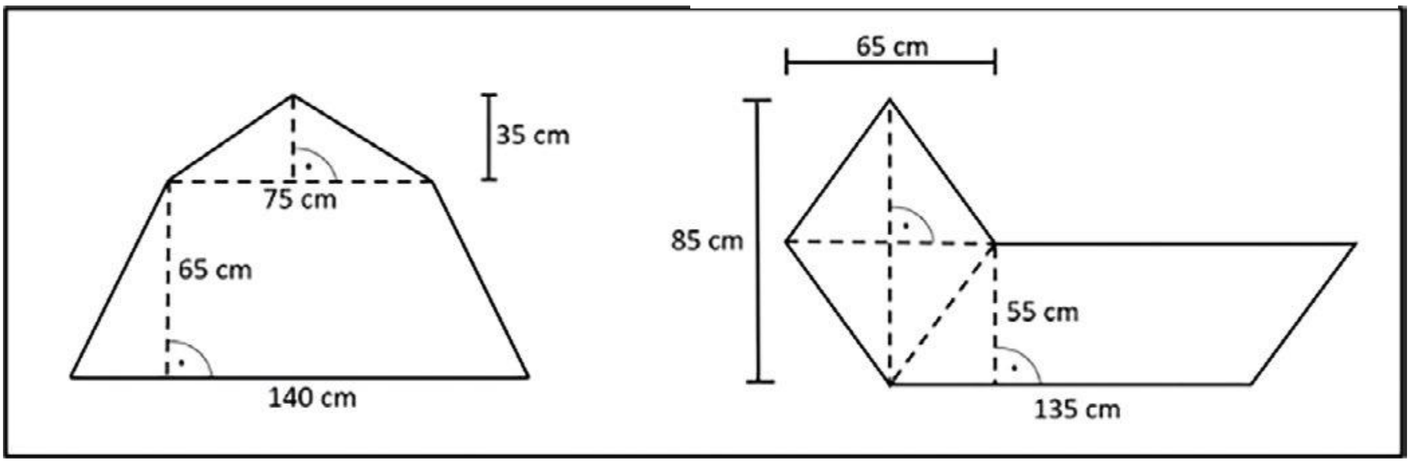


Abbildung 1



a) Entscheide rechnerisch, welcher der beiden Käfige für einen Hamster genutzt werden kann.
b) Entwirf selbst einen Grundriss für einen Hamsterkäfig, dessen Grundfläche zwischen 1 m² und 1,5m² groß ist.
Für einen Hamster ist es interessanter, wenn die Grundfläche des Käfigs verschiedene Formen hat. Nutze daher mindestens zwei verschiedene Formen.

Lösung

a) Berechnung der Flächeninhalte:

Flächeninhalt Grundriss Käfig A:

$A_{Gesamt} = A_{Trapez} + A_{Dreieck}$

$A_{Gesamt} = \frac{75\ cm + 140\ cm}{2} \cdot 65\ cm + \frac{75\ cm + 35\ cm}{2} = 8\ 300\ cm^2$

[Anm.: Zerlegung des Trapezes in weitere Teilflächen (Rechteck, Dreieck) möglich.]

Flächeninhalt Grundriss Käfig B:

$A_{Gesamt} = A_{Raute} + A_{Parallelogramm}$

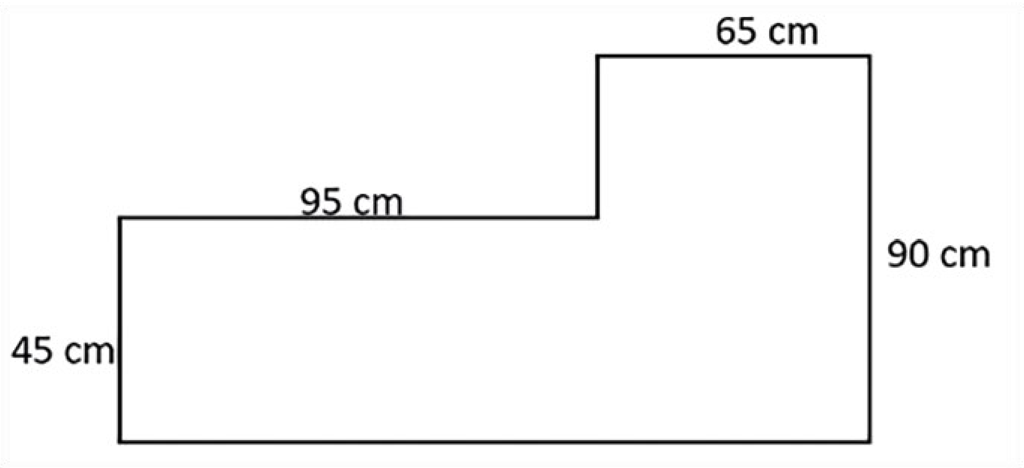
$A_{Gesamt} = \frac{85\ cm + 65\ cm}{2} + 135\ cm \cdot 55\ cm = 10\ 187{,}5\ cm^2 \approx 1{,}02\ m2$

[Anm.: Zerlegung der Raute und des Parallelogramms in weitere Teilflächen möglich.]

Der Grundriss des Hamsterkäfigs B ist größer als 1 m², so dass er die Voraussetzung erfüllt.
Käfig A ist dagegen zu klein.

b) Individuelle Lösungen

Beispiel(e):



	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	**Größen und Messen:** Die Schülerinnen und Schüler • ermitteln Flächeninhalt und Umfang von Rechteck, Dreieck und Kreis sowie daraus zusammengesetzten Figuren, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. • nehmen in ihrer Umwelt gezielt Messungen vor, auch mit Hilfe digitaler Medien (als Informationsquelle oder Messinstrument), entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse sowie den gewählten Weg in Bezug auf die Sachsituation. **Raum und Form:** Die Schülerinnen und Schüler • erkennen und beschreiben Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte (z. B. Symmetrie, Idee der Kongruenz, Lagebeziehungen) (ESA). • erkennen, beschreiben und begründen Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte (z. B. Symmetrie, Idee der Kongruenz, Ähnlichkeit, Lagebeziehungen) und nutzen diese im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachsituationen (MSA).
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	**Mit mathematischen Objekten umgehen:** Die Schülerinnen und Schüler • verwenden Routineverfahren (z. B. Lösen einer linearen Gleichung). (AFB I) **Probleme mathematisch lösen:** Die Schülerinnen und Schüler • lösen einfache Probleme mit bekannten Heurismen (z. B. systematisches Probieren). (AFB I) **Mathematisch argumentieren:** Die Schülerinnen und Schüler • bewerten Ergebnisse und Aussagen auch bzgl. ihres Anwendungskontextes. (AFB II) **Mathematisch kommunizieren:** Die Schülerinnen und Schüler • vergleichen und bewerten Äußerungen von anderen zu mathematischen Inhalten sachlich und fachlich angemessen. (AFB III)

Material und Aufgabenstellung

In freier Wildbahn laufen Hamster mehrere Kilometer am Tag.
Deshalb wollen Georg und Ayla ein Laufrad in den Hamsterkäfig stellen:
Das Laufrad hat einen Durchmesser *d* von 28 cm.

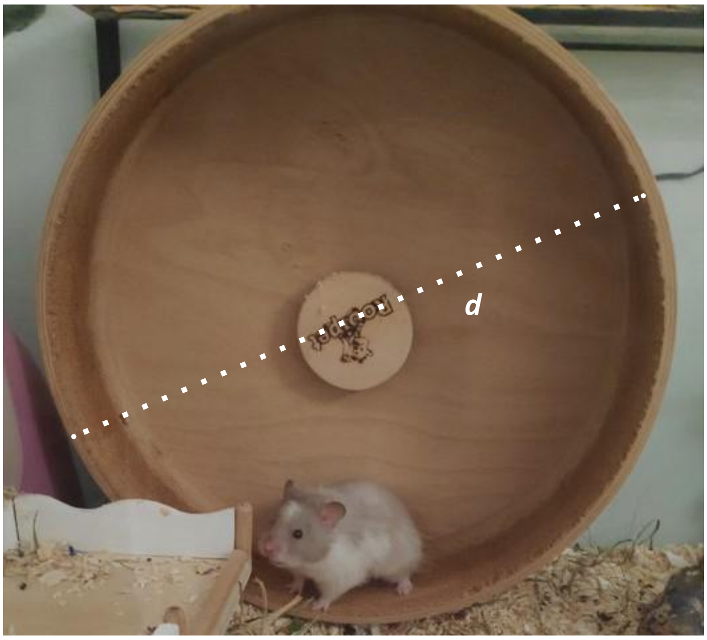


Abbildung 2

a) Bestätige rechnerisch, dass ein Hamster mit einer Umdrehung etwa 88 cm zurücklegt.

b) Ermittle die Anzahl der Runden, die der Hamster zurückgelegt hat, wenn er 1 km weit gelaufen ist.

c) Bei einem anderen Laufrad ist der Durchmesser doppelt so groß.
Ayla sagt, dass der Hamster nun nur noch halb so viele Runden laufen muss, um eine Strecke von 1 km zurückzulegen. Überprüfe, ob Ayla recht hat. Begründe deine Aussage.

Lösung

a) Berechnung/Bestätigung des Umfangs des Laufrads:
$u = \pi \cdot d = \pi \cdot 28\text{ cm} = 28\pi \approx 88\text{ cm}$
Der Umfang des Laufrads beträgt etwa 88 cm.

b) 1 km = 1 000 m = 100 000 cm
$100\,000\text{ cm} : 28\pi \approx 1\,137$
Rechnung mit gerundetem Wert:
$100\,000\text{ cm} : 88\text{ cm} \approx 1\,136$
Für einen Kilometer muss der Hamster etwa 1 100 Runden in seinem Laufrad laufen.

c) Umfang und Durchmesser verhalten sich proportional zueinander, so dass Aylas Aussage stimmt.
Alternativ kann die Aussage mit Hilfe von Rechnungen begründet werden:
Vorheriger Durchmesser und Umfang: $d1 = 28$ cm und $u1 = 87{,}964\ldots$ cm
Doppelter Durchmesser und Umfang: $d2 = 2 \cdot d1 = 56$ cm und $u2 = 175{,}929\ldots$ cm

$u2 / u1 = 2$

Wenn der Durchmesser verdoppelt wird, dann verdoppelt sich auch der Umfang, so dass der Hamster nur halb so viele Runden laufen muss.
Ayla hat also recht.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	**Größen und Messen:** Die Schülerinnen und Schüler • ermitteln Volumen und Oberflächeninhalt von Prisma, Pyramide und Zylinder sowie daraus zusammengesetzten Körpern, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. • nehmen in ihrer Umwelt gezielt Messungen vor, auch mit Hilfe digitaler Medien (als Informationsquelle oder Messinstrument), entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse sowie den gewählten Weg in Bezug auf die Sachsituation. **Raum und Form** Die Schülerinnen und Schüler • erkennen und beschreiben Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte (z. B. Symmetrie, Idee der Kongruenz, Lagebeziehungen) (ESA). • erkennen, beschreiben und begründen Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte (z. B. Symmetrie, Idee der Kongruenz, Ähnlichkeit, Lagebeziehungen) und nutzen diese im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachsituationen (MSA).
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	**Mit mathematischen Objekten umgehen:** Die Schülerinnen und Schüler • verwenden Routineverfahren (z. B. Lösen einer linearen Gleichung). (AFB I) **Mathematisch argumentieren:** Die Schülerinnen und Schüler • bewerten Ergebnisse und Aussagen auch bzgl. ihres Anwendungskontextes. (AFB II) **Mathematisch kommunizieren:** Die Schülerinnen und Schüler • vergleichen und bewerten Äußerungen von anderen zu mathematischen Inhalten sachlich und fachlich angemessen. (AFB III)

Material und Aufgabenstellung

Als Trinknapf möchten Georg und Ayla ein zylinderförmiges Gefäß benutzen, in das sie 100 ml Wasser randvoll füllen können.

Den beiden stehen dafür verschiedene Gefäße zur Auswahl.

Sie entscheiden sich zunächst für ein Gefäß, das einen Radius r = 4 cm und eine Höhe h = 1 cm hat.

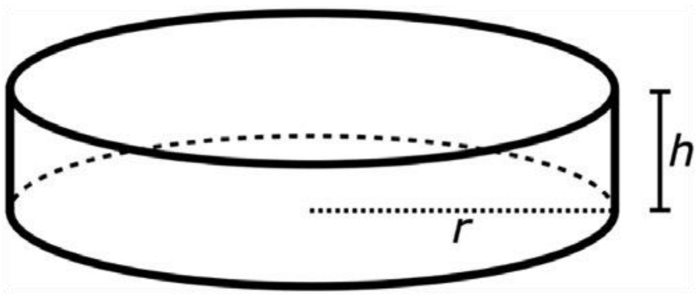


Abbildung 3

a) Berechne das Volumen des Gefäßes.

b) Georg und Ayla stellen fest, dass sie ein Gefäß benötigen, dessen Volumen doppelt so groß sein muss, um es mit 100 ml Wasser randvoll füllen zu können. Ayla entscheidet sich nun für ein Gefäß, das die gleiche Höhe und den doppelten Radius hat. Georg nimmt ein Gefäß, das die doppelte Höhe und den gleichen Radius hat.
Begründe, wer sich das richtige Gefäß ausgesucht hat, um es randvoll mit 100 ml Wasser füllen zu können.

Lösung

Berechnung Volumen
b) $V=\pi\cdot r^2\cdot h=\pi\cdot(4\text{ cm})^2\cdot 1\text{ cm}\approx 50\text{ cm}^3$

b) Vergleich der beiden ausgewählten Gefäße:

Gefäß von Ayla:
$V=\pi\cdot r^2\cdot h=\pi\cdot(8\text{ cm})^2\cdot 1\text{ cm}\approx 201\text{ cm}^3$

Gefäß von Georg:
$V=\pi\cdot r^2\cdot h=\pi\cdot(4\text{ cm})^2\cdot 2\text{ cm}\approx 101\text{ cm}^3$

Bei Aylas Gefäß ist der Radius doppelt so lang. Der Radius wird bei der Volumenberechnung eines Zylinders quadriert, so dass das Volumen bei einer Verdopplung des Radius vervierfacht wird
.
Bei Georgs Gefäß wird die Höhe verdoppelt, das Volumen wird hierdurch auch verdoppelt.

Georg hat sich das richtige Gefäß ausgesucht.

Ergänzende Hinweise

Voraussetzungen:

- Flächenberechnung Parallelogramm, Raute, Dreieck, Trapez bzw. Zerlegung von unbekannten Flächen in bekannte Flächen
  Umfangberechnung eines Kreises
  Volumenberechnung eines Zylinders

Potenzial:

- Teilaufgabe 01 a) dient der Wiederholung der Berechnung von zusammengesetzten Flächen, alle Angaben zur Berechnung der Fläche sind der Abbildung direkt zu entnehmen
- Teilaufgabe 01 b) lässt sich durch verschiedene Zusätze erweitern bzw. differenzieren:
  - feste Vorgabe welche Flächen in dem Grundriss vorkommen sollen (Rechteck, Dreieck, Parallelogramm, Trapez, Kreis…)
  - die Grundfläche des Käfigs soll insgesamt eine bestimmte Anzahl an Ecken oder eine bestimmte Anzahl an Seiten haben
- Teilaufgabe 02 kann zu einer Recherche anregen:
  Wie weit können Hamster maximal pro Tag laufen?
  Gibt es Unterschiede zwischen den verschiedenen Hamsterarten und ihrem Bewegungsdrang?
  Zu welchen Tages- / Jahreszeiten laufen Hamster am weitesten?
  Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit sich Hamster wohlfühlen.

Quellen

Abbildung 1: Copyright Grafik: IQB e. V. (2022). *Goldhamster.* Lizenz: Creative Commons (CC BY). Volltext unter: https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode.de

Abbildung 2: Copyright Grafik: IQB e. V. (2022). *Hamster im Laufrad.* Lizenz: Creative Commons (CC BY). Volltext unter: https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode.de

Abbildung 3: Copyright Grafik: IQB e. V. (2022). *Hamster und Schale.* Lizenz: Creative Commons (CC BY). Volltext unter: https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode.de