

ILLUSTRIERENDE LERNAUFGABE FÜR DIE WEITERENTWICKELTEN BILDUNGSSTANDARDS IM FACH MATHEMATIK SEKUNDARSTUFE I

Aufgabentitel	Grippetest
Ziele der Aufgabe	Die Schülerinnen und Schüler können Wahrscheinlichkeitsaussagen aus dem Alltag interpretieren und komplexe Fragestellungen beantworten.
Bildungsstufe	<input type="checkbox"/> ESA <input checked="" type="checkbox"/> MSA <input type="checkbox"/> Beide
Klassenstufe	10
Bearbeitungszeit gesamt in Minuten	45 - 60
Leitidee 1	Daten und Zufall
Einsatz von (digitalen) Medien	Taschenrechner
Unterrichtsphase	Üben
Information	Nicht angesprochene Bereiche der Teilkompetenzen werden ausgegraut.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Daten und Zufall: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • beschreiben Zufallserscheinungen und interpretieren Wahrscheinlichkeitsaussagen und ihre Darstellungen in Medien.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch kommunizieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • erfassen, interpretieren und deuten komplexere mathemathikhaltige Texte und Abbildungen sinnentnehmend und strukturieren Informationen. (AFB II) <p>Mathematisch modellieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • nutzen bekannte und direkt erkennbare Modelle (z. B. Proportionalität bzw. Dreisatz). (AFB I)



Material und Aufgabenstellung

Für die Diagnose einer Grippeerkrankung werden Schnelltests angeboten. In einer Grippezeit verwendeten 9 000 000 Menschen diesen Test. Davon waren aber nur 333 567 Menschen tatsächlich an Grippe erkrankt.

Bei den eingesetzten Tests werden von den erkrankten Personen 99,1 % richtig als „krank“ erkannt, d.h. sie haben einen positiven Test. (Diese Größe nennt man Sensitivität).

Bei den eingesetzten Tests werden von den gesunden Personen 98,4 % richtig als „gesund“ erkannt, d.h. sie haben einen negativen Test. (Diese Größe nennt man Spezifität).

Berechne die Anzahl der erkrankten Personen, die bei dem Test auch als krank erkannt werden.



Lösung

$$333\,567 \cdot 0,991 \approx 330\,565$$

Die Tests haben ca. 330 565 Kranke als krank erkannt.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Daten und Zufall: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei ein- oder mehrstufigen Zufallsexperimenten, auch mit Hilfe entsprechender Visualisierungen (z. B. Baumdiagramm, Vierfeldertafel), ohne und mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch kommunizieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> erfassen, interpretieren und deuten komplexere mathemathikhaltige Texte und Abbildungen sinnentnehmend und strukturieren Informationen. (AFB II) <p>Mathematisch modellieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> nehmen Mathematisierungen vor, die mehrere Schritte erfordern. (AFB II)



Material und Aufgabenstellung

Gegeben ist folgende Vierfeldertafel:

	positiver Test	negativer Test	
krank			
gesund	138 663		

Erkläre die Bedeutung der Zahl 138 663 im Sachzusammenhang.
Beschreibe, wie man die Zahl berechnen kann.



Lösung

Bei 138 663 gesunden Personen hat der Test eine Grippe erkannt.

Berechnen kann man die Zahl, indem man erst die Anzahl aller gesunden Personen ausrechnet.

$$9\,000\,000 - 333\,567 = 8\,666\,433.$$

Da der Test bei 98,4 % der gesunden Personen auch ein negatives Ergebnis anzeigt, zeigt er bei $100\% - 98,4\% = 1,6\%$ der Personen ein positives Ergebnis an.

Somit muss noch 1,6 % von allen gesunden Personen berechnet werden: $8\,666\,433 \cdot 0,016$.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Daten und Zufall: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei ein- oder mehrstufigen Zufallsexperimenten, auch mit Hilfe entsprechender Visualisierungen (z. B. Baumdiagramm, Vierfeldertafel), ohne und mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch darstellen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> nutzen und erzeugen vertraute und geübte Darstellungen von mathematischen Objekten und Situationen. (AFB I) <p>Mit mathematischen Objekten umgehen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> verwenden Routineverfahren (z. B. Lösen einer linearen Gleichung). (AFB I)



Material und Aufgabenstellung

Gegeben ist folgende Vierfeldertafel:

	positiver Test	negativer Test	
krank			
gesund	138 663		

Trage die fehlenden Werte in die Vierfeldertafel ein.



Lösung

	positiver Test	negativer Test	
krank	330 565	3 002	333 567
gesund	138 663	8 527 770	8 666 433
	469 228	8 530 772	9 000 000

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Daten und Zufall: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • beschreiben Zufallserscheinungen und interpretieren Wahrscheinlichkeitsaussagen und ihre Darstellungen in Medien.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch argumentieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • bewerten Ergebnisse und Aussagen auch bzgl. ihres Anwendungskontextes. (AFB II) <p>Mathematisch modellieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • prüfen Ergebnisse einer Modellierung auf Plausibilität in Bezug auf die Ausgangssituation. (AFB II)



Material und Aufgabenstellung

Begründe, dass die Anzahl der positiven Testergebnisse über der Anzahl der tatsächlich an Grippe Erkrankten liegt.



Lösung

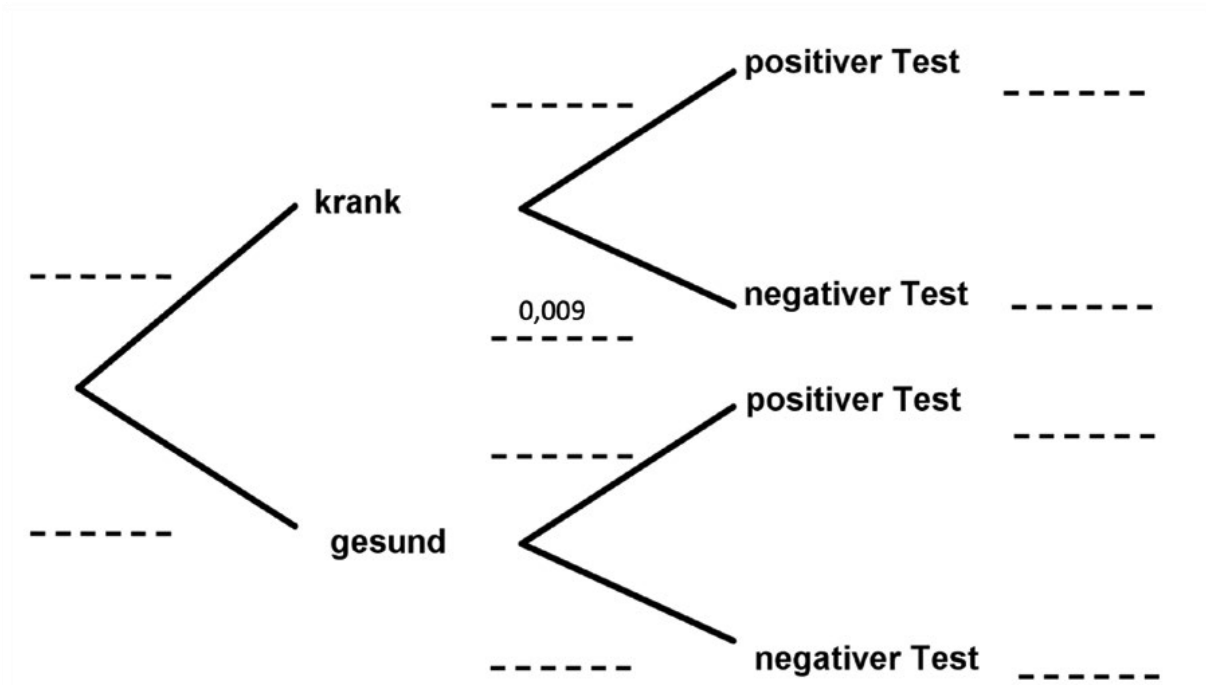
Dadurch, dass deutlich mehr gesunde Personen den Test durchführen als kranke und auch 1,6 % der gesunden ein positives Ergebnis bekommen, liegt die Zahl der positiven Tests deutlich höher als die Zahl der tatsächlich Erkrankten.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	Daten und Zufall: Die Schülerinnen und Schüler <ul style="list-style-type: none"> beschreiben Zufallserscheinungen und interpretieren Wahrscheinlichkeitsaussagen und ihre Darstellungen in Medien.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	Mathematisch kommunizieren: Die Schülerinnen und Schüler <ul style="list-style-type: none"> erfassen, interpretieren und deuten komplexere mathematikhaltige Texte und Abbildungen sinnentnehmend und strukturieren Informationen. (AFB II) Mathematisch modellieren: Die Schülerinnen und Schüler <ul style="list-style-type: none"> interpretieren Ergebnisse einer Modellierung. (AFB II)



Material und Aufgabenstellung

Eine der getesteten Personen wird zufällig ausgewählt.



Im Baumdiagramm ist die Zahl 0,009 vorgegeben. Erkläre ihre Bedeutung im Sachzusammenhang.



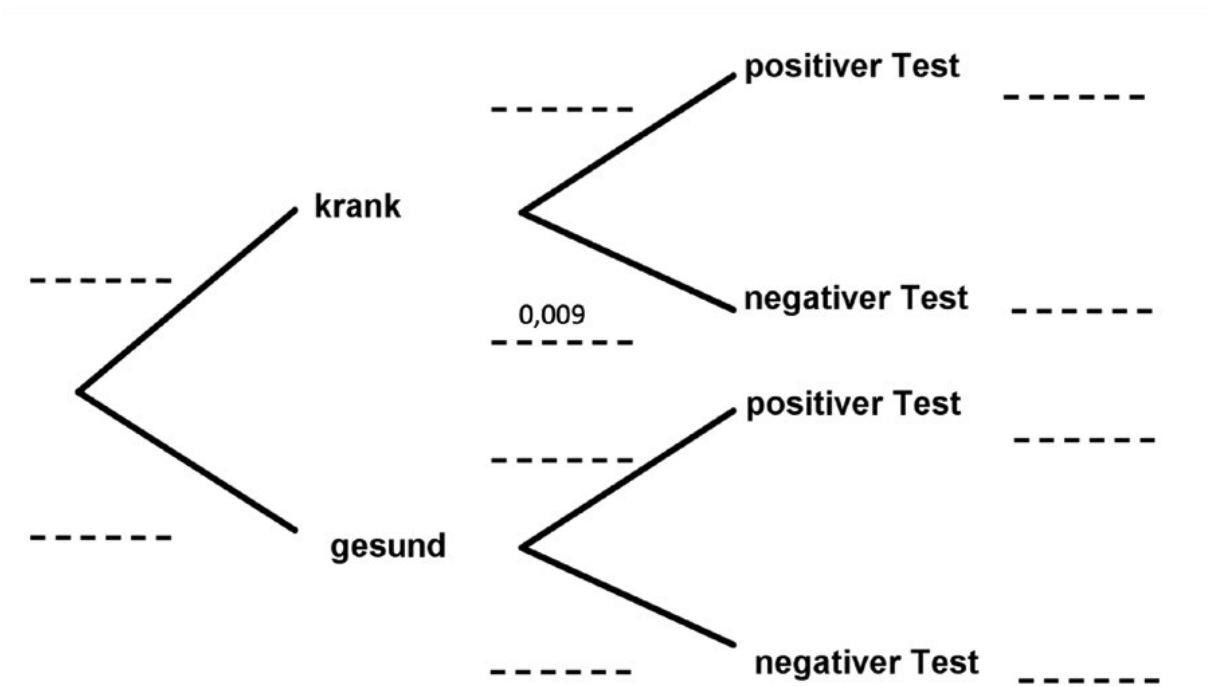
Lösung

0,009 gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der eine erkrankte Person, die den Test durchgeführt hat ein negatives Testergebnis bekommt.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Daten und Zufall: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei ein- oder mehrstufigen Zufallsexperimenten, auch mit Hilfe entsprechender Visualisierungen (z. B. Baumdiagramm, Vierfeldertafel), ohne und mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch darstellen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> nutzen und erzeugen vertraute und geübte Darstellungen von mathematischen Objekten und Situationen. (AFB I) <p>Mit mathematischen Objekten umgehen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> verwenden Routineverfahren (z. B. Lösen einer linearen Gleichung). (AFB I)



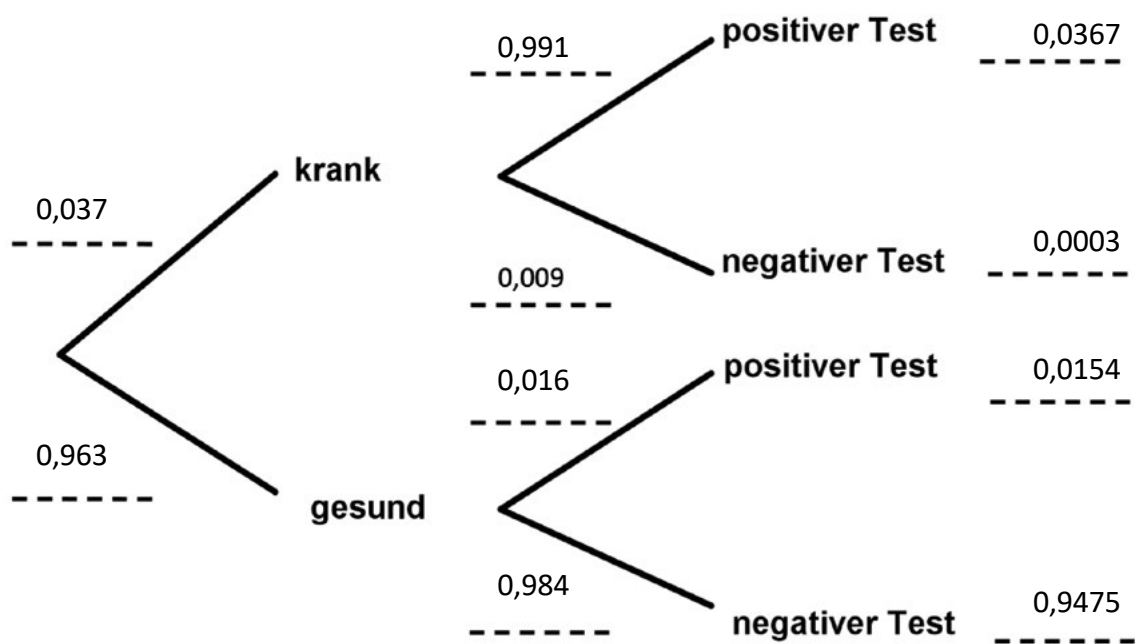
Material und Aufgabenstellung



Trage die Wahrscheinlichkeiten in das Baumdiagramm ein.



Lösung

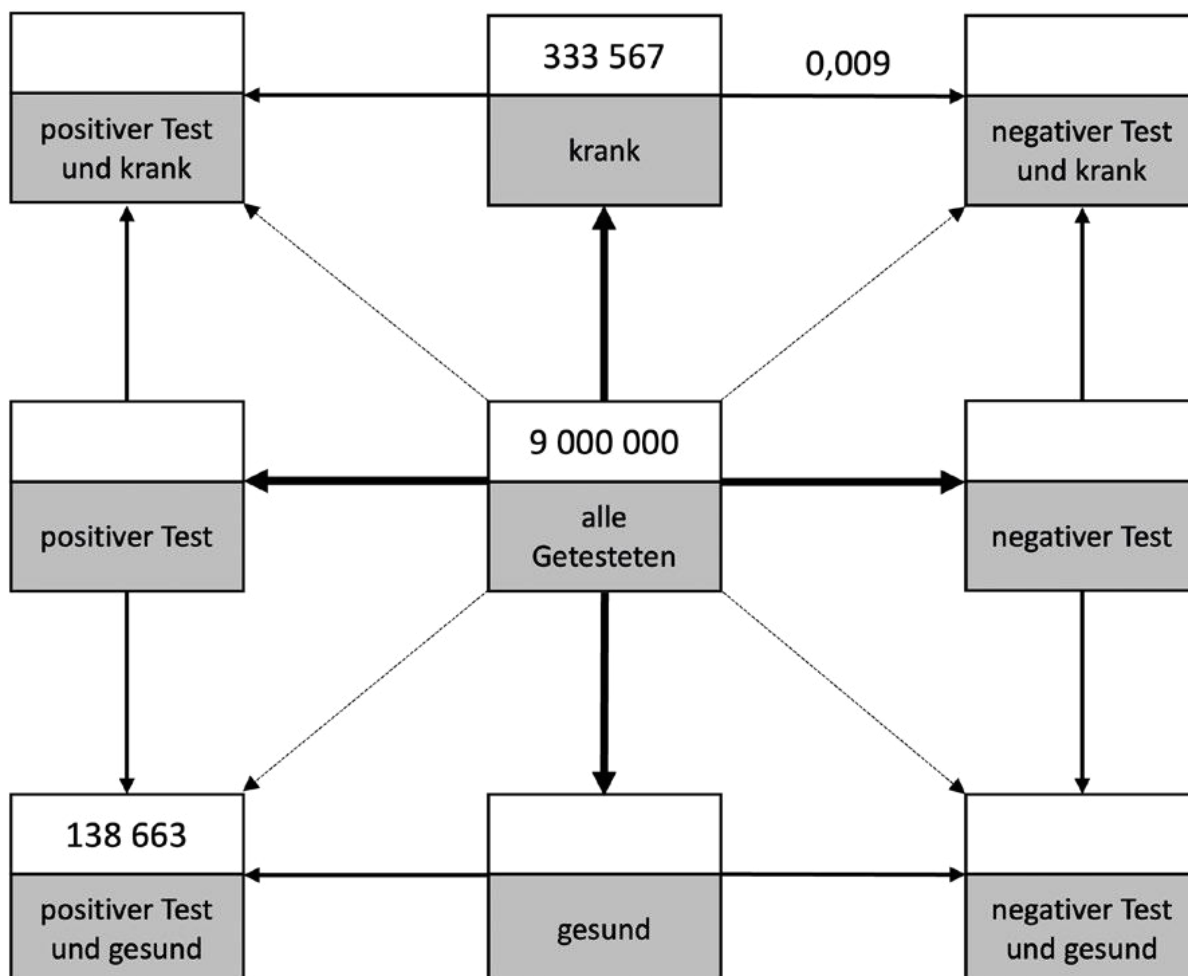


	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	Daten und Zufall: Die Schülerinnen und Schüler <ul style="list-style-type: none"> bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei ein- oder mehrstufigen Zufallsexperimenten, auch mit Hilfe entsprechender Visualisierungen (z. B. Baumdiagramm, Vierfeldertafel), ohne und mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	Mathematisch darstellen: Die Schülerinnen und Schüler <ul style="list-style-type: none"> wechseln sachgerecht zwischen mathematischen Darstellungen und erklären, wie sie vernetzt sind. (AFB II) Mit mathematischen Objekten umgehen: Die Schülerinnen und Schüler <ul style="list-style-type: none"> verwenden Routineverfahren (z. B. Lösen einer linearen Gleichung). (AFB I)



Material und Aufgabenstellung

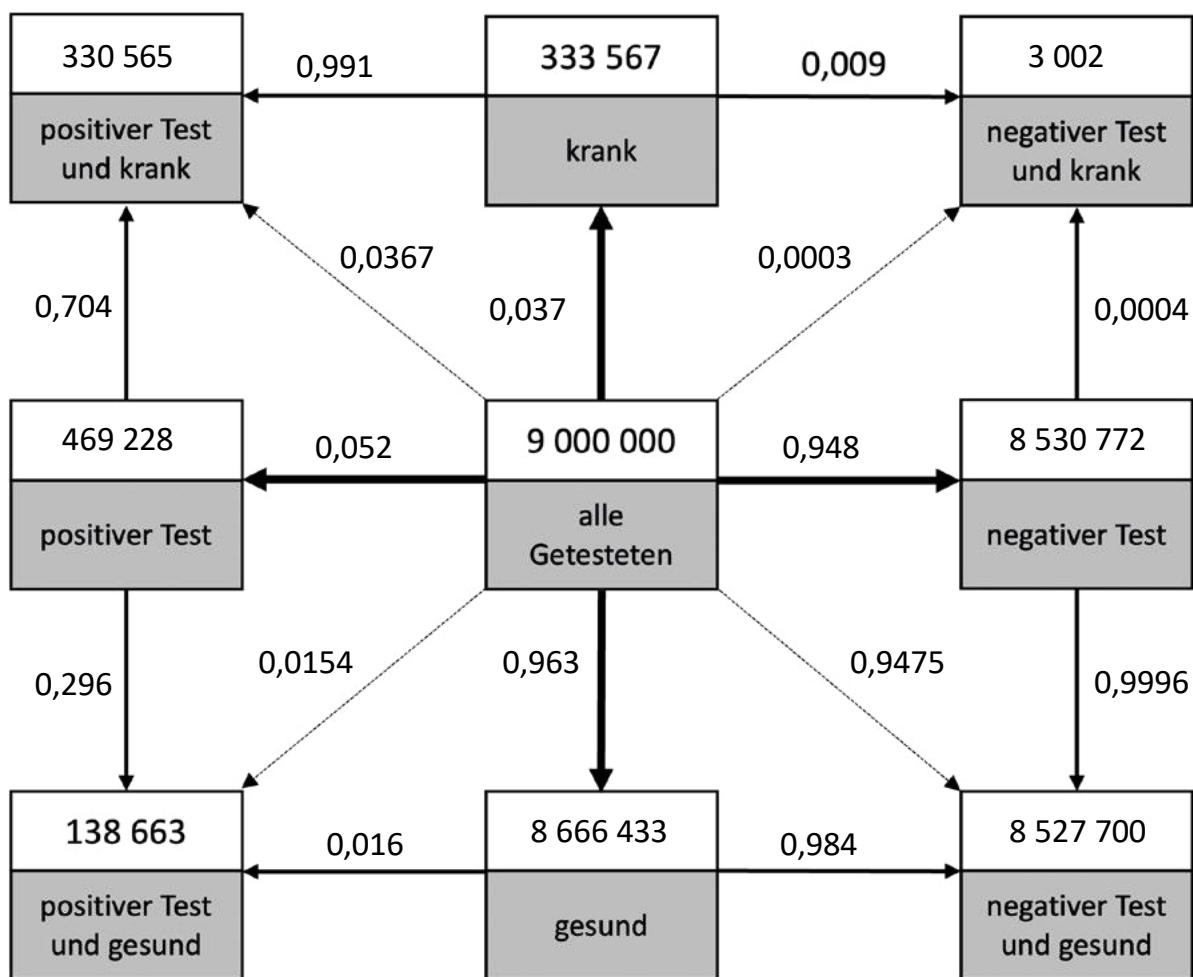
Die Daten wurden in einem Häufigkeitsnetz darstellt.



Trage alle Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten in das Häufigkeitsnetz ein.



Lösung



	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Daten und Zufall: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei ein- oder mehrstufigen Zufallsexperimenten, auch mit Hilfe entsprechender Visualisierungen (z. B. Baumdiagramm, Vierfeldertafel), ohne und mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch kommunizieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> erfassen, interpretieren und deuten komplexere mathemathikhaltige Texte und Abbildungen sinnentnehmend und strukturieren Informationen. (AFB II) <p>Mathematisch modellieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> interpretieren Ergebnisse einer Modellierung. (AFB II)



Material und Aufgabenstellung

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine ausgewählte Person erkrankt ist und ein negatives Testergebnis bekommt. Beantworte die Aufgabe mithilfe aller drei Darstellungen (Vierfeldertafel, Baumdiagramm und Häufigkeitsnetz).



Lösung

Vierfeldertafel: $\frac{3002}{9000000} \approx 0,0003 = 0,03 \%$

Baumdiagramm: $0,0003 = 0,03 \%$

Häufigkeitsnetz: $0,0003 = 0,03 \%$

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Daten und Zufall: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei ein- oder mehrstufigen Zufallsexperimenten, auch mit Hilfe entsprechender Visualisierungen (z. B. Baumdiagramm, Vierfeldertafel), ohne und mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch kommunizieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> erfassen, interpretieren und deuten komplexere mathemathikhaltige Texte und Abbildungen sinnentnehmend und strukturieren Informationen. (AFB II) <p>Mathematisch modellieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> interpretieren Ergebnisse einer Modellierung. (AFB II)



Material und Aufgabenstellung

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine ausgewählte Person erkrankt ist und ein negatives Testergebnis bekommt. Beantworte die Aufgabe mithilfe aller drei Darstellungen (Vierfeldertafel, Baumdiagramm und Häufigkeitsnetz).



Lösung

Vierfeldertafel: $\frac{469228}{9000000} \approx 0,052 = 5,2 \%$

Baumdiagramm: $0,0367 + 0,0154 = 0,0521 = 5,21 \%$

Häufigkeitsnetz: $0,052 = 5,21 \%$

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Daten und Zufall: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei ein- oder mehrstufigen Zufallsexperimenten, auch mit Hilfe entsprechender Visualisierungen (z. B. Baumdiagramm, Vierfeldertafel), ohne und mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch kommunizieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> erfassen, interpretieren und deuten komplexere mathemathikhaltige Texte und Abbildungen sinnentnehmend und strukturieren Informationen. (AFB II) <p>Mathematisch modellieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> interpretieren Ergebnisse einer Modellierung. (AFB II)



Material und Aufgabenstellung

Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine ausgewählte Person mit positivem Testergebnis wirklich erkrankt ist. Beantworte die Aufgabe mithilfe aller drei Darstellungen (Vierfeldertafel, Baumdiagramm und Häufigkeitsnetz).



Lösung

Vierfeldertafel: $\frac{330565}{469228} \approx 0,7045 = 70,45 \%$

Baumdiagramm:

Die Aufgabe ist mit dem vorliegenden Baumdiagramm nicht direkt ablesbar.

Durch ein Erstellen eines zweiten Baumdiagramms mit einem Vertauschen der ersten und zweiten Stufe wäre die Wahrscheinlichkeit ablesbar.

Häufigkeitsnetz: $0,7045 = 70,45 \%$

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Daten und Zufall: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei ein- oder mehrstufigen Zufallsexperimenten, auch mit Hilfe entsprechender Visualisierungen (z. B. Baumdiagramm, Vierfeldertafel), ohne und mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Probleme mathematisch lösen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> wählen geeignete Heuristiken zur Lösung entsprechender Probleme aus. (AFB II) <p>Mathematisch modellieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> modellieren komplexe oder unvertraute Situationen und entwickeln ggf. eigene Modelle. (AFB III)



Material und Aufgabenstellung

Alle Personen mit einem positiven Test werden in einem Labor noch einmal getestet. Bei diesem zweiten Test beträgt die Sensitivität 99 % und die Spezifität 99,5 %.

Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei einer gesunden Person beide Tests positiv sind. Gehe dabei davon aus, dass der zweite Test unabhängig vom ersten Test ist.



Lösung

Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Test positiv ist, liegt bei $1,6 \% = 0,016$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Test positiv ist, liegt bei $100 \% - 99,5 \% = 0,5 \% = 0,005$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer gesunden Person beide Tests positiv ausfallen, ergibt sich auch $0,016 \cdot 0,005 = 0,00008 = 0,008 \%$ und liegt damit weit unter einem Prozent.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Daten und Zufall: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei ein- oder mehrstufigen Zufallsexperimenten, auch mit Hilfe entsprechender Visualisierungen (z. B. Baumdiagramm, Vierfeldertafel), ohne und mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge.
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch argumentieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> bewerten verschiedene Argumentationen (z. B. in Texten und Darstellungen aus digitalen Medien). (AFB III) <p>Mathematisch darstellen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> analysieren und beurteilen verschiedene Formen der Darstellung entsprechend ihres Zwecks. (AFB III)



Material und Aufgabenstellung

Vergleiche die drei Darstellungen (Vierfeldertafel, Baumdiagramm und Häufigkeitsnetz).

Nimm Stellung, welche Vor- und Nachteile die Darstellungen jeweils aus deiner Sicht haben.



Lösung

In der Vierfeldertafel werden die absoluten Häufigkeiten dargestellt. Hier können schnell die Verhältnisse für die einzelnen Aufgaben gebildet werden. Allerdings sind hier keine Wahrscheinlichkeiten direkt ablesbar und müssen für einen Vergleich erst berechnet werden.

Im Baumdiagramm sind die Wahrscheinlichkeiten direkt ablesbar, allerdings fehlen einige Wahrscheinlichkeiten z. B. von allen positiv Getesteten. Um diese auch ablesen zu können müsste noch ein zweites Baumdiagramm erstellt werden.

Im Häufigkeitsnetz sind beide Darstellungen kombiniert. Es können sowohl die absoluten Häufigkeiten, als auch alle Wahrscheinlichkeiten direkt abgelesen werden. Diese Kombination ist zwar am aufwendigsten zu erstellen, dafür können aber alle gesuchten Größen direkt abgelesen werden.



Ergänzende Hinweise

- Der Umgang mit Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen sollte bekannt sein.
- Die Aufgabe ist auch als Leistungskontrolle denkbar.
- Zum selbstständigen Erstellen des Häufigkeitsnetzes müssten die Schülerinnen und Schüler bereits Vorerfahrungen im Umgang mit einem Häufigkeitsnetz haben. Ansonsten wäre es gut, diese Darstellung vor der Bearbeitung der Aufgabe 07 einmal im Unterrichtsgespräch kurz einzuführen.
- Bei Teilaufgabe 11 gibt es durch eventuelle stochastische Abhängigkeiten zwischen den Tests ein Problem mit der Interpretation der berechneten Wahrscheinlichkeit. Diese Problematik kann im Unterricht thematisiert werden.
- Es ist auch möglich auf eine oder mehrere Darstellungen zu verzichten und nicht den Vergleich zwischen den Darstellungen zu fokussieren. Hierdurch würde das Arbeiten mit Wahrscheinlichkeiten und der Umgang mit der statistischen Auswertung im Mittelpunkt stehen.