

ILLUSTRIERENDE LERNAUFGABE FÜR DIE WEITERENTWICKELTEN BILDUNGSSTANDARDS IM FACH MATHEMATIK SEKUNDARSTUFE I

Aufgabentitel	Das Gasthaus
Ziele der Aufgabe	Die Schülerinnen und Schüler deuten lineare Funktionen im Sachzusammenhang und verwenden dabei rechnerische und zeichnerische Lösungsverfahren.
Bildungsstufe	<input type="checkbox"/> ESA <input checked="" type="checkbox"/> MSA <input type="checkbox"/> Beide
Klassenstufe	9 - 10
Bearbeitungszeit gesamt in Minuten	40
Leitidee 1	Strukturen und funktionaler Zusammenhang
Einsatz von (digitalen) Medien	Lineal
Unterrichtsphase	Leistungsüberprüfung
Information	Nicht angesprochene Bereiche der Teilkompetenzen werden ausgegraut.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Strukturen und funktionaler Zusammenhang: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> stellen Terme auf, um allgemeine Zusammenhänge im Sachkontext zu beschreiben, formen sie um und interpretieren sie. (MSA)
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch kommunizieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> entnehmen Informationen aus einfachen mathemathikhaltigen Texten und Abbildungen. (AFB I) <p>Mathematisch darstellen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> nutzen und erzeugen vertraute und geübte Darstellungen von mathematischen Objekten und Situationen. (AFB I) <p>Mit mathematischen Objekten umgehen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> verwenden Routineverfahren (z. B. Lösen einer linearen Gleichung). (AFB I)



Material und Aufgabenstellung



Abbildung 1

Das Gasthaus „Forelle“ bietet Doppel- und Einzelzimmer für insgesamt 41 Gäste. In einem Doppelzimmer können jeweils nur genau zwei Gäste und in einem Einzelzimmer kann jeweils nur ein Gast übernachten.

Malik behauptet: „Das Gasthaus könnte 15 Doppelzimmer und 11 Einzelzimmer haben.“

- Begründe, dass seine Behauptung richtig ist.
- Wie viele Einzelzimmer und Doppelzimmer könnte das Gasthaus auch haben?
Gib mindestens eine weitere Möglichkeit an.
- Begründe, dass das Gasthaus nicht 21 Doppelzimmer haben kann.



Lösung

- a) Rechnerische Bestimmung der Anzahl an Gästen: $2 \cdot 15 + 1 \cdot 11 = 30 + 11 = 41$
Die berechnete Anzahl an Gästen stimmt mit der Angabe im Text überein. Somit ist die Behauptung von Malik richtig.
- b) Alle individuellen Lösungen sind möglich, welche die Bedingungen $2x + y = 41$ und erfüllen. Damit ist es eine weitere Möglichkeit, dass das Gasthaus z.B. 19 Doppel- und 3 Einzelzimmer hat.
- c) Hätte das Gasthaus 21 Doppelzimmer, so müssten im Gasthaus mindestens 42 Gäste übernachten können. Das ist aber nicht möglich, denn im Text gibt es die Vorgabe, dass das Gasthaus nur 41 Gästen Platz bietet.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Strukturen und funktionaler Zusammenhang: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> stellen Terme auf, um allgemeine Zusammenhänge im Sachkontext zu beschreiben, formen sie um und interpretieren sie. (MSA) erkennen und verwenden funktionale Zusammenhänge und stellen diese in verschiedenen Repräsentationen dar (sprachlich, tabellarisch, grafisch, algebraisch) und können zwischen diesen Darstellungsformen wechseln, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (MSA)
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch kommunizieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> verwenden die mathematische Fachsprache situationsangemessen und erklären ihre Bedeutung. (AFB II) <p>Mathematisch darstellen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt. (AFB II) <p>Mit mathematischen Objekten umgehen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> beschreiben die innere Struktur mathematischer Objekte (z. B. von Termen) und gehen flexibel und sicher mit ihnen um. (AFB II)



Material und Aufgabenstellung

Im Sachkontext ermittelt Sarafina die Gleichung $2x + y = 41$.

- Erläutere diese Gleichung im Sachkontext und gib dabei auch die Bedeutung von x und y an.
- Forme die Gleichung zu einer Funktionsgleichung um und zeichne den Graphen der Funktion.
- Begründe, dass die Gleichung nur bedingt zur Beschreibung des Sachkontextes geeignet ist.



Lösung

- x : Anzahl der Doppelzimmer; y : Anzahl der Einzelzimmer, 41: Anzahl der möglichen Übernachtungsgäste
Mithilfe der Gleichung könnten alle möglichen Kombinationen der Anzahlen von Einzel- und Doppelzimmern im Gasthaus berechnet werden.
- $2x + y = 41 \iff f(x) = y = 41 - 2x$
Der Graph ist unter Teilaufgabe 03 dargestellt.
- Die Funktionsgleichung beschreibt den Sachverhalt nur bedingt, da im Sachkontext nur Werte für $0 \leq x < 21$ infrage kommen und x nur ganzzahlige Werte annehmen kann.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Strukturen und funktionaler Zusammenhang: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> lösen lineare und quadratische Gleichungen sowie lineare Gleichungssysteme numerisch (systematisches Probieren), algebraisch (Umformen) und grafisch (mit Hilfe von Funktionsgraphen), auch unter Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge, und vergleichen die Effektivität verschiedener Lösungsverfahren im Hinblick auf die jeweilige Fragestellung oder das Problem. (MSA)
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch argumentieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> erläutern mathematische Zusammenhänge, Ordnungen und logische Strukturen. (AFB II) <p>Mathematisch kommunizieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> erfassen, interpretieren und deuten komplexere mathemathikhaltige Texte und Abbildungen sinnentnehmend und strukturieren Informationen. (AFB II) <p>Mathematisch darstellen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt. (AFB II) wechseln sachgerecht zwischen mathematischen Darstellungen und erklären, wie sie vernetzt sind. (AFB II) <p>Mit mathematischen Objekten umgehen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> führen komplexere Lösungs- und Kontrollverfahren aus. (AFB II)



Material und Aufgabenstellung

Für die 41 möglichen Übernachtungsgäste gibt es insgesamt 23 Zimmer. Eine dazu passende Gleichung lautet $x + y = 23$. Zusammen mit Sarafinas Gleichung $2x + y = 41$ ergibt sich ein Gleichungssystem.

- Ermittle die Lösung des Gleichungssystems zuerst zeichnerisch und anschließend rechnerisch.
- Interpretiere die Lösung des Gleichungssystems sachbezogen.
- Ein Reisebüro möchte 9 Doppel- und 6 Einzelzimmer buchen. Ist dies möglich? Begründe.



Lösung

x: Anzahl der Doppelzimmer; y: Anzahl der Einzelzimmer

a) LGS: $2x + y = 41$ $x + y = 23$ $x = 18$ $y = 5$; $L = \{(18 | 5)\}$.

Das LGS lässt sich mit Hilfe von verschiedenen Verfahren lösen. Hier sind keine genaueren Vorgaben diesbezüglich erfolgt. Für die zeichnerische Lösung muss die Gleichung für die zweite Bedingung (insgesamt 23 Zimmer) nach y bzw. $g(x)$ umgeformt werden. Anschließend ist der jeweils ermittelte „Schnittpunkt“ im Sachzusammenhang zu deuten.

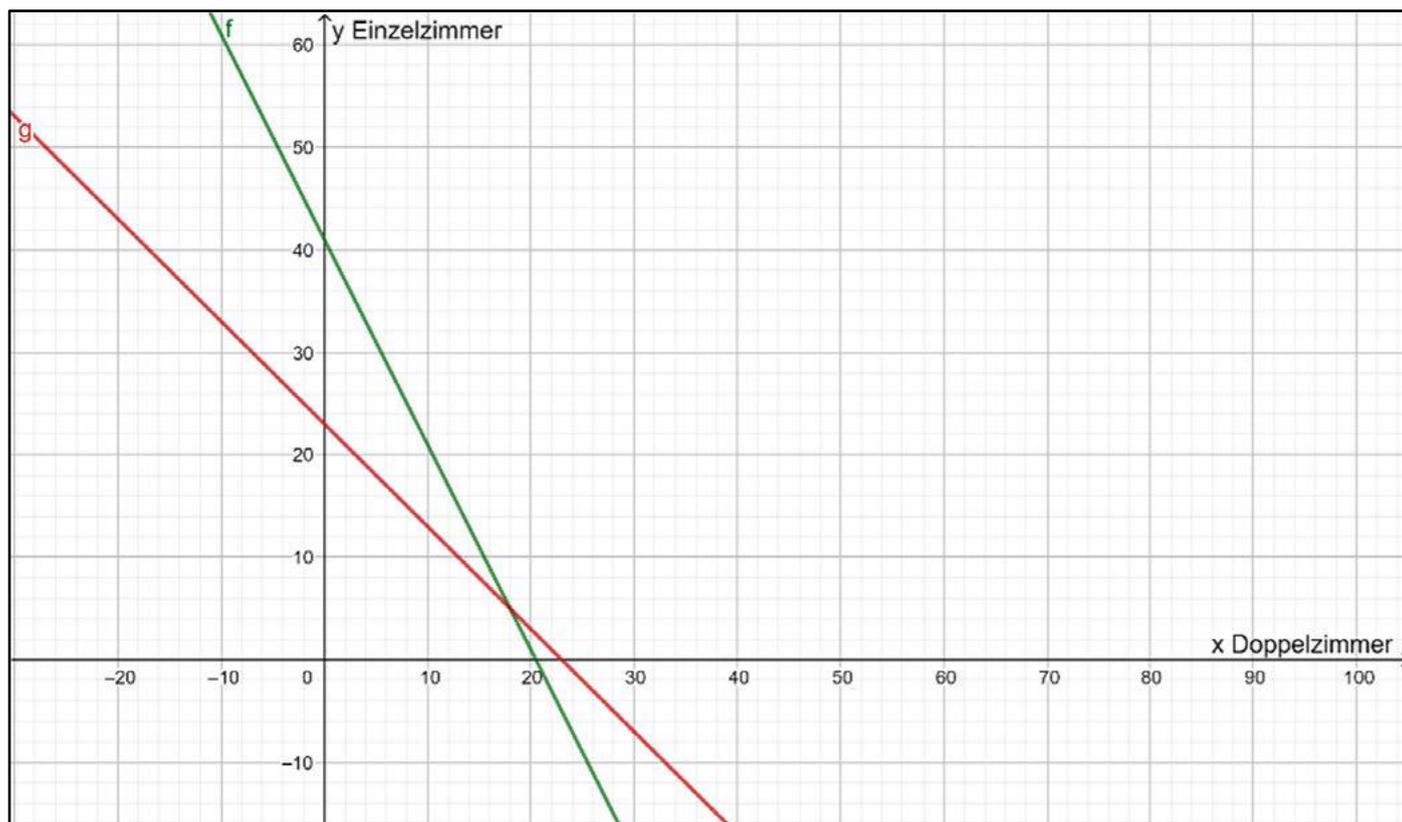


Abbildung 2

Graph $f(x) = 41 - 2x$ gehört zu Teilaufgabe 02

Graph $g(x) = 23 - x$ gehört zu Teilaufgabe 03

- b) Die Lösung des Gleichungssystems liefert die Anzahl der Einzel- und Doppelzimmer im Gasthaus. Demzufolge gibt es 18 Doppelzimmer und 5 Einzelzimmer.
- c) Die Buchung ist nicht möglich, da von 9 Doppel- und 6 Einzelzimmer ausgegangen werden sollte und $(9 | 6)$ keine Lösung des LGS ist. Zudem ist bereits aus b) bekannt, dass es nur 5 Einzelzimmer gibt.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Strukturen und funktionaler Zusammenhang: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> erkennen und verwenden funktionale Zusammenhänge und stellen diese in verschiedenen Repräsentationen dar (sprachlich, tabellarisch, grafisch, lineare Funktionen auch algebraisch) und können zwischen diesen Darstellungsformen wechseln, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (MSA)
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch darstellen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> nutzen und erzeugen vertraute und geübte Darstellungen von mathematischen Objekten und Situationen. (AFB I) interpretieren vertraute Darstellungen. (AFB I)



Material und Aufgabenstellung

Im Gasthaus kostet die Übernachtung in einem Einzelzimmer 45,00 € und in einem Doppelzimmer 80,00 €. Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus einem Tabellenkalkulationsprogramm. Damit können in Abhängigkeit von der Anzahl der gebuchten Einzelzimmer und Doppelzimmer die Gesamtkosten berechnet werden.

	A	B	C
1		Anzahl	Kosten pro Zimmer
2	Einzelzimmer		45,00 €
3	Doppelzimmer		80,00 €
4			
5		Gesamtkosten:	
6			

Abbildung 3

Gib eine passende Formel für die Zelle C5 so an, dass damit die Gesamtkosten ermittelt werden könnten.



Lösung

Formel für C5: = B2 * C2 + B3 * C3



Hinweis

Als Multiplikationszeichen kann statt „*“ auch „.“ angegeben werden.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Strukturen und funktionaler Zusammenhang: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche funktionale Zusammenhänge (lineare, proportionale und antiproportionale sowie quadratische Funktionen), auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (MSA)
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch argumentieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> bewerten Ergebnisse und Aussagen auch bzgl. ihres Anwendungskontextes. (AFB II) <p>Mathematisch kommunizieren: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> formulieren einfache mathematische Sachverhalte mit eigenen Worten und mithilfe mathematischer Begriffe mündlich und schriftlich. (AFB I)



Material und Aufgabenstellung

Im Rahmen einer Rabattaktion wird der Preis für ein Einzelzimmer um 15 % gesenkt.

Einer der folgenden Terme gibt dann den Preis für ein Einzelzimmer an.

Kreuze diesen Term an und begründe, dass die beiden anderen Terme nicht infrage kommen.

$45,00 \text{ €} \cdot 0,15$

$45,00 \text{ €} \cdot 0,85$

$45,00 \text{ €} \cdot 1,15$



Lösung

Der Sachverhalt wird durch den Term $45,00 \text{ €} \cdot 0,85$ beschrieben.

Der Term $45,00 \text{ €} \cdot 0,15$ gibt den Preis für ein Einzelzimmer an, wenn das Einzelzimmer im Rahmen der Rabattaktion 15 % des ursprünglichen Preises kostet.

ODER: Der Term $45,00 \text{ €} \cdot 0,15$ gibt die Ersparnis an.

Der Term $45,00 \text{ €} \cdot 1,15$ gibt an, dass das Einzelzimmer im Rahmen der Rabattaktion 15 % teurer werden würde.

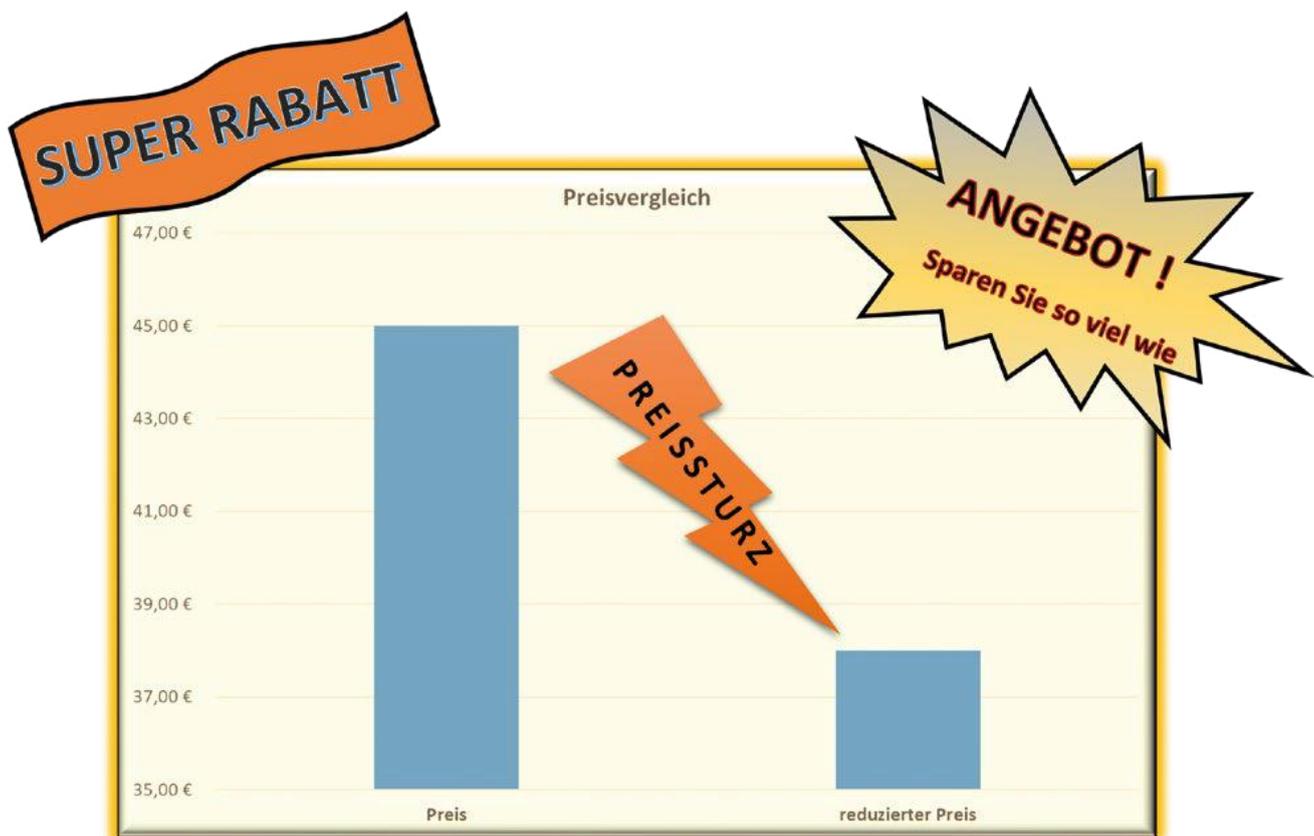
ODER: Der Term $45,00 \text{ €} \cdot 1,15$ kommt nicht infrage, da sich der Preis für ein Einzelzimmer erhöhen würde.

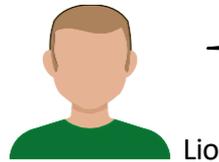
	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	<p>Strukturen und funktionaler Zusammenhang: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche funktionale Zusammenhänge (lineare, proportionale und antiproportionale sowie quadratische Funktionen), auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (MSA)
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	<p>Mathematisch darstellen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> interpretieren nicht vertraute Darstellungen und beurteilen ihre Aussagekraft. (AFB III) <p>Mit Medien mathematisch arbeiten: Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten. (AFB III)



Material und Aufgabenstellung

Das Gasthaus zeigt auf seiner Homepage die in der Abbildung dargestellte Anzeige, um Werbung für die Rabattaktion zu machen.





Lio

„Bei der Rabattaktion kostet ein Einzelzimmer weniger als die Hälfte des ursprünglichen Preises.“

Beurteile die Aussage von Lio.

Alternative: Die Abbildung erweckt den Eindruck, dass ein Einzelzimmer bei dieser Rabattaktion weniger als die Hälfte des ursprünglichen Preises kostet. Erläutere, wie dieser falsche Eindruck entsteht.



Lösung

Die Aussage ist falsch. Der Darstellungsbereich der y-Achse erweckt den Eindruck, dass der Preis um mehr als 50 % gesunken ist. Jedoch beträgt der reduzierte Preis lediglich ca. 85% des ursprünglichen Preises.

Rechnung: $\frac{38}{45} \approx 0,8444 = 84,44\%$



Ergänzende Hinweise

- Hinweise: Diese komplexe Aufgabe kann ohne Verwendung von Hilfsmitteln – ausgenommen einem Lineal – bearbeitet werden, auch wenn Tabellenkalkulation angesprochen wird. Alle Werte und Angaben sind entsprechend gewählt.
- Voraussetzungen / Grenzen: Den Schülerinnen und Schülern sollten verschiedene Verfahren zur Lösung von einfachen linearen Gleichungssystemen, die Grundlagen der Prozentrechnung bekannt und der Umgang mit einem Tabellenkalkulationsprogramm vertraut sein.
- Potenzial / Differenzierung:
 - Die in Aufgabenteil 01 bis 03 enthaltenden Hinweise zum Lösungsvorgehen ermöglichen den Einsatz der Aufgabe auch als individuelle Leistungsüberprüfung für Schülerinnen und Schüler z.B. am Ende der Unterrichtsreihe.
 - Durch Vorgabe eines bestimmten Lösungsverfahrens für Aufgabenteil 03 könnte eine Differenzierung in jede Richtung erfolgen.
 - Aufgabenteil 03 ließe sich noch erweitern, indem man eine tabellarische Lösung erstellen lässt und damit u.a. die Nutzung digitaler Medien einbindet. Zudem könnte man bei Aufgabenteil c) die Schülerinnen und Schüler die unterschiedlichen Lösungsverfahren vergleichen und auch bewerten lassen.
 - Als zusätzliche bzw. alternative Aufgabe im Kontext Unterricht könnte man die Schülerinnen und Schüler auffordern, eine ähnliche Aufgabe inklusive Lösung zu entwerfen. Darüber hinaus könnte sich an Aufgabenteil 06 noch die Aufgabe anschließen, z.B. mit einer geeigneten Software eine eigene Werbeanzeige für die Rabattaktion anzufertigen.
 - Im Vorfeld könnte eine ähnliche Aufgabe im Unterricht thematisiert werden, welche z.B. die Planung eines Aufenthalts in einer Jugendherberge aufgreift. Aufgrund der höheren Personenzahl sowie zusätzliche Aufteilung z.B. der Zimmer nach Geschlechtern eignet sich eine solche Aufgabe eher für den Unterricht als für eine Leistungsüberprüfung.
 - Grundsätzlich eröffnet diese Aufgabe die Möglichkeit der Vernetzung von funktionaler und algebraischer Darstellung.
 - Die Aufgabenteile 02, 04 und 06 ließen sich auch für das ESA-Niveau verwenden. Ebenso könnte man für das ESA-Niveau die beiden Funktionsgleichungen aus 02 und 03 vorgeben und die Schülerinnen und Schüler die Graphen zeichnen lassen. Bei der Interpretation der Graphen – ggf. losgelöst vom Sachzusammenhang – wäre der Anforderungsbereich III für das ESA-Niveau abgedeckt. Ebenfalls denkbar ist, die Übertragung dieser abgeänderten Aufgabe in die Nutzung digitaler Medien, um explizit diese Kompetenzleistung zu überprüfen.



Quellen

Abbildung 1: Copyright Grafik: 407300. (2014, 16. September). *Balderschwang, Alpen, Hütte*. Pixabay.
<https://pixabay.com/de/photos/balderschwang-alpen-h%C3%BCtte-447187/>

Abbildung 2: Erstellt mit GeoGebra, <https://www.geogebra.org/> (es gelten die GeoGebra-Lizenzbedingungen)

Abbildung 3: Erstellt mit Microsoft Excel.