

## ILLUSTRIERENDE LERNAUFGABE FÜR DIE WEITERENTWICKELTEN BILDUNGSSTANDARDS IM FACH MATHEMATIK SEKUNDARSTUFE I

<b>Aufgabentitel</b>	Funktionenfalten
<b>Ziele der Aufgabe</b>	Die Schülerinnen und Schüler üben das Aufstellen von Funktionsgleichungen und vertiefen den Zusammenhang zwischen den Darstellungsformen Graph und Term.
<b>Bildungsstufe</b>	<input type="checkbox"/> ESA <input checked="" type="checkbox"/> MSA <input type="checkbox"/> Beide
<b>Klassenstufe</b>	7 - 8
<b>Bearbeitungszeit gesamt in Minuten</b>	45
<b>Leitidee 1</b>	Strukturen und funktionaler Zusammenhang
<b>Einsatz von (digitalen) Medien</b>	Blatt Papier
<b>Unterrichtsphase</b>	01, 03, 05: Entdecken/Einstieg 02, 04, 06: Üben
<b>Information</b>	Nicht angesprochene Bereiche der Teilkompetenzen werden ausgegraut.

	Illustrierte Standards
<b>inhaltsbezogene Kompetenz</b>	<b>Strukturen und funktionaler Zusammenhang:</b> Die Schülerinnen und Schüler <ul style="list-style-type: none"> <li>• erkennen und verwenden funktionale Zusammenhänge und stellen diese in verschiedenen Repräsentationen dar (sprachlich, tabellarisch, grafisch, lineare Funktionen auch algebraisch) und können zwischen diesen Darstellungsformen wechseln, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (MSA)</li> </ul>
<b>prozessbezogene Kompetenzen (AFB)</b>	<b>Mathematisch argumentieren:</b> Die Schülerinnen und Schüler <ul style="list-style-type: none"> <li>• geben vertraute Argumentationen wieder (wie Rechnungen, Verfahren, Herleitungen, Sätze). (AFB I)</li> </ul>



## Material und Aufgabenstellung

Nimm ein quadratisches Blatt Papier und falte es zweimal in der Mitte. Anschließend öffnest du das Blatt wieder und faltest nun so, dass jeweils die gegenüberliegenden Ecken aufeinanderliegen.

Zum Schluss öffnest du das Blatt Papier wieder. Nun sollte dein quadratisches Blatt so aussehen, wie nebenstehend abgebildet.

Nimm einen Stift und zeichne die gefalteten dünnen Linien nach.

Stelle dir vor, dass der Punkt A der Ursprung  $(0|0)$  eines Koordinatensystems ist. Die Strecke  $(\overline{AB})$  liegt in x-Richtung, ist also Teil der gedachten

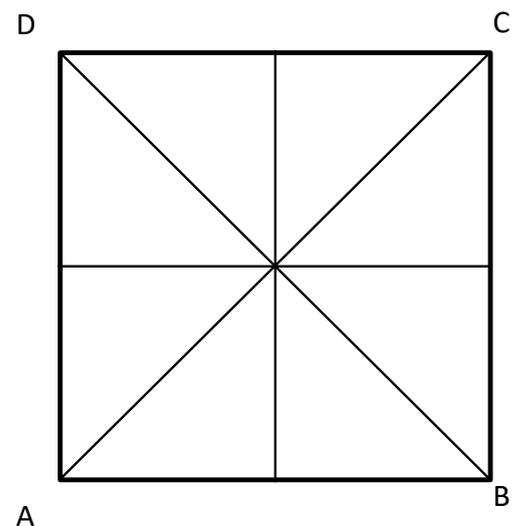
x-Achse, die Strecke  $(\overline{AD})$  liegt in y-Richtung, ist also Teil der gedachten y-Achse. Beide Achsen haben die gleiche Skalierung.

Nimm nun an, dass die gefalteten Linien Geraden in diesem Koordinatensystem beschreiben.

Nummeriere alle Geraden.

Gib an, welche der Geraden einen Funktionsgraphen darstellen und welche nicht.

Begründe deine Entscheidung jeweils.





## Lösung

Die Nummerierung der Geraden ist individuell.

Alle senkrecht verlaufenden Geraden stellen keinen Funktionsgraphen dar, da dort jedem  $x$ -Wert mehr als genau ein  $y$ -Wert zugeordnet wird. Bei allen anderen Geraden ist diese Bedingung erfüllt und sind somit Graphen von Funktionen.



## Ergänzende Hinweise

Wenn man nur einen Typ begründen lässt, wird nicht klar, ob ggf. eine Funktionsgerade nur vergessen worden ist oder das Verständnis nicht in der Tiefe vorhanden ist. Zudem bietet sich ein Ansatz der Differenzierung, ob Schülerinnen und Schüler allgemeine Formulierungen als Lösung bieten oder aber jede Gerade einzeln betrachten.

	Illustrierte Standards
<b>inhaltsbezogene Kompetenz</b>	<p><b>Strukturen und funktionaler Zusammenhang:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>erkennen und verwenden funktionale Zusammenhänge und stellen diese in verschiedenen Repräsentationen dar (sprachlich, tabellarisch, grafisch, lineare Funktionen auch algebraisch) und können zwischen diesen Darstellungsformen wechseln, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (MSA)</li> </ul>
<b>prozessbezogene Kompetenzen (AFB)</b>	<p><b>Mathematisch argumentieren:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>erläutern mathematische Zusammenhänge, Ordnungen und logische Strukturen. (AFB II)</li> </ul> <p><b>Mathematisch modellieren:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>ordnen einfachen Realsituationen aus dem Alltag mathematische Objekte zu. (AFB I)</li> </ul> <p><b>Mathematisch darstellen:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>nutzen und erzeugen vertraute und geübte Darstellungen von mathematischen Objekten und Situationen. (AFB I)</li> </ul> <p><b>Mit mathematischen Objekten umgehen:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>gehen mit vertrauten mathematischen Objekten (z. B. Strecken, Termen, Gleichungen) um. (AFB I)</li> </ul>



## Material und Aufgabenstellung

Jetzt geht es darum, die vier äußeren Quadratseiten mit Gleichungen zu beschreiben.

- Wo liegen alle Punkte  $(x|y)$ , die die Gleichung  $x=0$  erfüllen?  
Wo jene, die die Gleichung mit  $y=0$  erfüllen? Erkläre deine Antwort.
- Gib für die beiden Seiten  $(\overline{BC})$  und  $(\overline{CD})$  je eine passende Geradengleichung an.



## Lösung

- Alle Punkte  $(x|y)$  mit  $x=0$  liegen auf der  $y$ -Achse, da der  $x$ -Wert fest vorgegeben und nur der  $y$ -Wert variabel ist.

Alle Punkte  $(x|y)$  mit  $y=0$  liegen auf der  $x$ -Achse, da der  $y$ -Wert fest vorgegeben und nur der  $x$ -Wert variabel ist.

- passende Gerade zu  $(\overline{BC})$  :  $x=s$       ( $s$ : Seitenlänge des Quadrats)  
passende Gerade zu  $(\overline{CD})$  :  $y=s$

	Illustrierte Standards
<b>inhaltsbezogene Kompetenz</b>	<p><b>Strukturen und funktionaler Zusammenhang:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>erkennen und verwenden funktionale Zusammenhänge und stellen diese in verschiedenen Repräsentationen dar (sprachlich, tabellarisch, grafisch, lineare Funktionen auch algebraisch) und können zwischen diesen Darstellungsformen wechseln, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (MSA)</li> </ul>
<b>prozessbezogene Kompetenzen (AFB)</b>	<p><b>Mathematisch modellieren:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>nehmen Mathematisierungen vor, die mehrere Schritte erfordern. (AFB II)</li> </ul> <p><b>Mathematisch darstellen:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>wechseln sachgerecht zwischen mathematischen Darstellungen und erklären, wie sie vernetzt sind. (AFB II)</li> </ul> <p><b>Mit mathematischen Objekten umgehen:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>gehen mit vertrauten mathematischen Objekten (z. B. Strecken, Termen, Gleichungen) um. (AFB I)</li> </ul>



## Material und Aufgabenstellung

Wir betrachten nun die Diagonalen im Quadrat.

Gib für die Diagonalen (AC) und (DB) jeweils eine passende Geradengleichung an.



## Lösung

passende Geradengleichung zu  $\overline{AC}$ :

$$f(x)=x$$

passende Geradengleichung zu  $\overline{DB}$ :

$$f(x)=-x+s \text{ (wobei } s \text{ die Seitenlänge des Quadrates ist)}$$



## Ergänzende Hinweise

Es ist nicht zu erwarten, dass die Schülerinnen und Schüler eine Variable für die Seitenlänge des Quadrats, sondern konkrete Werte verwenden.

	Illustrierte Standards
<b>inhaltsbezogene Kompetenz</b>	<p><b>Strukturen und funktionaler Zusammenhang:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>erkennen und verwenden funktionale Zusammenhänge und stellen diese in verschiedenen Repräsentationen dar (sprachlich, tabellarisch, grafisch, lineare Funktionen auch algebraisch) und können zwischen diesen Darstellungsformen wechseln, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (MSA)</li> </ul>
<b>prozessbezogene Kompetenzen (AFB)</b>	<p><b>Mathematisch modellieren:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>nehmen Mathematisierungen vor, die mehrere Schritte erfordern. (AFB II)</li> </ul> <p><b>Mathematisch darstellen:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>wechseln sachgerecht zwischen mathematischen Darstellungen und erklären, wie sie vernetzt sind. (AFB II)</li> </ul> <p><b>Mit mathematischen Objekten umgehen:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>gehen mit vertrauten mathematischen Objekten (z. B. Strecken, Termen, Gleichungen) um. (AFB I)</li> </ul>



## Material und Aufgabenstellung

Nimm nun ein zweites quadratisches Blatt in einer anderen Größe. Falte dieses Blatt wie das erste. Gib auch für das zweite Blatt jeweils eine passende Geradengleichung für die Diagonalen an.



## Lösung

passende Geradengleichung zu (AC):  
passende Geradengleichung zu (DB):

$f(x)=y=x$   
 $f(x)=y=-x+s_2$  (wobei  $s_2$  die Seitenlänge des 2. Quadrates ist)

	Illustrierte Standards
<b>inhaltsbezogene Kompetenz</b>	<p><b>Strukturen und funktionaler Zusammenhang:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• erkennen und verwenden funktionale Zusammenhänge und stellen diese in verschiedenen Repräsentationen dar (sprachlich, tabellarisch, grafisch, lineare Funktionen auch algebraisch) und können zwischen diesen Darstellungsformen wechseln, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (MSA)</li> </ul>
<b>prozessbezogene Kompetenzen (AFB)</b>	<p><b>Mathematisch argumentieren:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• entwickeln und erläutern komplexe Argumentationen. (AFB III)</li> </ul>



## Material und Aufgabenstellung

Vergleiche deine Ergebnisse von Teilaufgabe 03 und 04. Was fällt dir auf? Begründe.

Falls du Schwierigkeiten bei den Teilaufgaben 03 und/oder 04 hattest, tausche dich zunächst mit einer Partnerin oder einem Partner aus.



## Lösung

Die Funktionsgleichungen der Diagonalen ( $\overline{AC}$ ) sind gleich und damit unabhängig von der Größe des Blattes. Das liegt daran, dass die Diagonale (AC) bzw. die zugehörige Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems läuft.

Die Funktionsgleichungen der Diagonalen ( $\overline{DB}$ ) sind nicht gleich und unterscheiden sich durch die Größe des Blattes. Die beiden Geraden verlaufen in y-Richtung verschoben zueinander.



## Ergänzende Hinweise

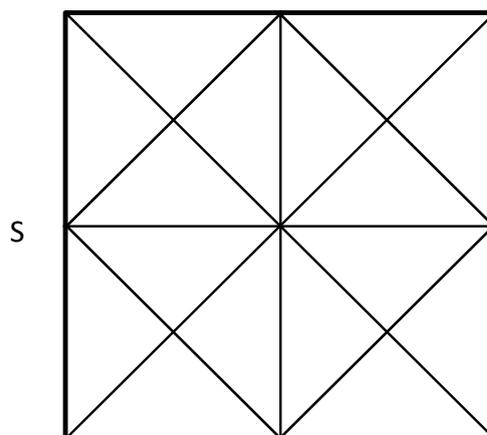
Es ist nicht zu erwarten, dass Schülerinnen und Schüler die Abhängigkeit unter Verwendung einer Variablen formulieren, sondern feststellen, dass es unterschiedliche Werte durch die unterschiedlichen Seitenlängen der Quadrate gibt. Der Transfer zur Formulierung im Sinne einer mathematischen Abhängigkeit ist voraussichtlich gestützt durch die Lehrperson z.B. in Form eines Unterrichtsgesprächs zu erbringen.

	Illustrierte Standards
<b>inhaltsbezogene Kompetenz</b>	<p><b>Strukturen und funktionaler Zusammenhang:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>erkennen und verwenden funktionale Zusammenhänge und stellen diese in verschiedenen Repräsentationen dar (sprachlich, tabellarisch, grafisch, lineare Funktionen auch algebraisch) und können zwischen diesen Darstellungsformen wechseln, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (MSA)</li> </ul>
<b>prozessbezogene Kompetenzen (AFB)</b>	<p><b>Mathematisch modellieren:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>ordnen einem mathematischen Modell passende Situationen zu (AFB II)</li> </ul> <p><b>Mathematisch darstellen:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>wechseln sachgerecht zwischen mathematischen Darstellungen und erklären, wie sie vernetzt sind. (AFB II)</li> </ul> <p><b>Mit mathematischen Objekten umgehen:</b> Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>gehen mit vertrauten mathematischen Objekten (z. B. Strecken, Termen, Gleichungen) um. (AFB I)</li> </ul>



## Material und Aufgabenstellung

Falte jetzt bei einem deiner Quadrate die Ecken in die Mitte und öffne das Blatt anschließend wieder. Das Blatt sollte jetzt wie nebenstehend aussehen.  
Zeichne die neuen Linien nach.

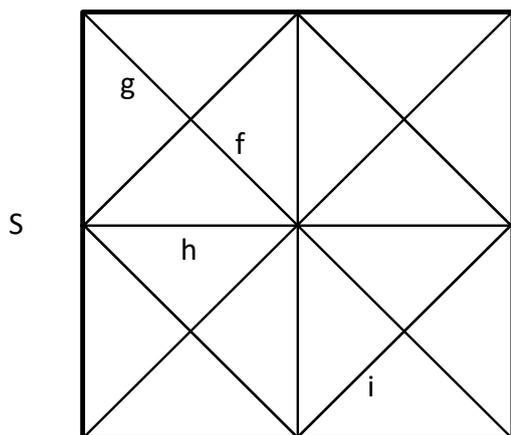


Die Seitenlänge des Quadrates sei  $s$ . Beschrifte jeweils die passenden Linien auf deinem Quadrat mit dem Buchstaben der Gleichung:

$$f(x) = -x + s \quad ; \quad g(x) = x + \frac{s}{2} \quad ; \quad h(x) = \frac{s}{2} \quad ; \quad i(x) = x - \frac{s}{2}$$



## Lösung



## Ergänzende Hinweise

- **Hinweise:**

Diese Aufgabe kann ohne Verwendung von Hilfsmitteln bearbeitet werden.  
Die Aufgabe kann in verschiedenen Sozialformen durchgeführt werden. Als Gruppenarbeit bietet es sich an, allen Schülerinnen und Schülern einer Gruppe verschieden große Papierquadrate zu geben. Teilaufgabe 04 würde dann wegfallen und Teilaufgabe 05 müsste in seiner Formulierung entsprechend angepasst werden.
- **Voraussetzungen / Grenzen:**

Den Schülerinnen und Schülern sollte die Definition einer Funktion, deren Darstellung als Term sowie das Koordinatensystem bekannt sein.  
Im Vorfeld von Teilaufgabe 01 kann – je nach Lernstand der Lerngruppe – das Grundverständnis einer Funktion in Abgrenzung zu einer Zuordnung zwingend zu wiederholen sein bzw. z.B. in Form einer Zwischenreflexion vor der Bearbeitung der weiteren Teilaufgaben thematisiert werden.  
Ggf. sind je nach Ausgangslage der Lerngruppe entsprechende Zäsuren nach Teilaufgabe 02 bzw. 03 zu setzen, um ein eigenständiges Weiterarbeiten der Schülerinnen und Schüler zu fördern.  
Das Bereithalten von Tipps bzw. Lösungen zu Teilaufgabe 03 und 04 ist zu empfehlen, damit die Schülerinnen und Schüler bei Teilaufgabe 05 möglichst eigenständig arbeiten können.
- **Potenzial / Differenzierung:**
  - Bei Teilaufgabe 02 wird bewusst auf die Verwendung eines Parameters für die Länge der Quadratseite verzichtet. Je nach Lernstand der Lerngruppe bzw. einzelner Schülerinnen und Schüler könnte jedoch bereits an dieser Stelle ein Parameter verwendet werden.
  - Bei Teilaufgabe 02 könnte man zusätzlich oder ggf. im Nachgang die Beschränkung der Quadratseiten thematisieren.
  - Eine weitere Möglichkeit der Differenzierung bietet Teilaufgabe 05, indem thematisiert wird, wo sich der Koordinatenursprung befinden müsste, damit auch die Diagonalen DB unabhängig von der Größe des Blattes sind.
  - Teilaufgabe 06 ließe sich noch erweitern, indem die noch fehlenden Funktionsgleichungen angegeben sind.

- Teilaufgabe 06 ließe sich zur Differenzierung auch umkehren, so dass die Schülerinnen und Schüler Funktionsgleichung für selbst ausgesuchte Geraden aufstellen.
- Als zusätzliche Aufgabe könnte das Quadrat nacheinander in alle vier Quadranten des Koordinatensystems gelegt, analog zu Teilaufgabe 05 Funktionsgleichungen aufgestellt und diese verglichen werden. Dadurch würde die Herausforderung im Bereich der gedanklichen Vorstellung gesteigert werden.
- Alternativ dazu könnte man z.B. das Papier im Eckpunkt A in einem aufgezeichneten großen Koordinatensystem mit Hilfe einer Pinnnadel fixieren, in die verschiedenen Quadranten drehen und u.a. ähnliche Fragestellungen wie zuvor thematisieren.
- Das Prinzip der Aufgabe könnte auch auf ein rechteckiges Blatt Papier transferiert und damit neue Erkundungen initiiert werden.
- Die Handlungsorientierung des Faltens kann auch bei dem Inhaltsbereich der Mittelsenkrechten aufgegriffen oder aber auch auf die Thematik Parallelen ausgeweitet werden.
- Darüber hinaus ist der Transfer zu digitalen Medien denkbar, sodass z.B. mit deren Einsatz die Überprüfung der Funktionsterme erfolgen könnte.