

ILLUSTRIERENDE LERNAUFGABE FÜR DIE WEITERENTWICKELTEN BILDUNGSSTANDARDS IM FACH MATHEMATIK SEKUNDARSTUFE I

Aufgabentitel	Ähnlichkeit
Ziele der Aufgabe	Die Schülerinnen und Schüler erfassen komplexe mathemathikhaltige Darstellungen sinnentnehmend, reflektieren und beurteilen verwendete mathematische Modelle kritisch mit Blick auf eine computergestützte Gesichtserkennung.
Bildungsstufe	☐ ESA ☐ MSA ☒ Beide
Klassenstufe	9 - 10
Bearbeitungszeit gesamt in Minuten	15
Leitidee 1	Raum und Form
Einsatz von (digitalen) Medien	keine
Unterrichtsphase	Üben
Information	Nicht angesprochene Bereiche der Teilkompetenzen werden ausgegaut.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	Raum und Form: Die Schülerinnen und Schüler • benennen und beschreiben geometrische Objekte und Beziehungen in der Umwelt mit Hilfe mathematischer Modelle (Punkte, Winkel, Strecken, Geraden, Flächen, Körper) und ihre Zusammenhänge in der Umwelt. • erkennen und beschreiben Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte (z. B. Symmetrie, Idee der Kongruenz, Lagebeziehungen). (ESA) • wenden Sätze der ebenen Geometrie (insbesondere den Satz des Pythagoras und Ähnlichkeitsbeziehungen) bei Konstruktionen und Berechnungen an, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (ESA) • erkennen, beschreiben und begründen Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte (z.B. Symmetrie, Idee der Kongruenz, Ähnlichkeit, Lagebeziehungen) und nutzen diese im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachsituationen. (MSA) • wenden Sätze der ebenen Geometrie (insbesondere den Satz des Pythagoras, den Satz des Thales, Ähnlichkeitsbeziehungen und trigonometrische Beziehungen) bei Konstruktionen, Berechnungen, Begründungen und Beweisen an, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (MSA)
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	Mathematisch argumentieren: Die Schülerinnen und Schüler • entwickeln und erläutern überschaubare mehrschrittige Argumentationen. (AFB II) Mathematisch kommunizieren: Die Schülerinnen und Schüler • stellen Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse und Verfahren verständlich dar. (AFB II) • erfassen, interpretieren und deuten komplexere mathemathikhaltige Texte und Abbildungen sinnentnehmend und strukturieren Informationen. (AFB II) Mathematisch modellieren: Die Schülerinnen und Schüler • interpretieren Ergebnisse einer Modellierung. (AFB II)



Material und Aufgabenstellung

Die Abbildung zeigt Gesichter von Zwillingen. Bei der computergestützten Erkennung von Gesichtern werden unter anderem die Abstände zwischen den Pupillen und der Nasenspitze genutzt. Die Pupillen und die Nasenspitze sind in der Abbildung jeweils zu einem Dreieck verbunden.

☐	$A = (-0.92, 1.84)$
☐	$B = (0, 2.8)$
☐	$C = (-2.22, 2.8)$
☐	$D = (2.86, -0.16)$
☐	$E = (4.22, 0.68)$
☐	$F = (2.12, 1.18)$
☒	$c = \text{Strecke}(A, B)$ $\rightarrow 1.33$
☐	$a = \text{Strecke}(B, C)$ $\rightarrow 2.22$
☐	$b = \text{Strecke}(C, A)$ $\rightarrow 1.62$
☐	$f = \text{Strecke}(D, E)$ $\rightarrow 1.6$
☐	$d = \text{Strecke}(E, F)$ $\rightarrow 2.16$
☐	$e = \text{Strecke}(F, D)$ $\rightarrow 1.53$



Abbildung 1

- a) Damit ein Computer die Gesichter als gleich erkennt, müssen die eingezeichneten Dreiecke im mathematischen Sinn ähnlich zueinander sein.
Prüfe, ob dies der Fall ist. Beschreibe deine Vorgehensweise.
- b) Gib allgemein an, welche und wie viele Größen man überprüfen müsste, um Ähnlichkeit im mathematischen Sinne feststellen zu können.



Lösung

a) individuell

Eine mögliche Antwort:

Die abgebildeten Zwillinge sind im mathematischen Sinne nicht ähnlich zueinander, da die beiden vorgegebenen Dreiecke nicht in allen Seitenverhältnissen und Winkeln übereinstimmen.

Beispielrechnung:

$$\frac{c}{f} = \frac{1.33}{1.60} = 0.83125 \quad \text{ist ungleich} \quad \frac{a}{d} = \frac{2.22}{2.16} = 1.027$$

Da die beiden Dreiecke in einem Seitenverhältnis nicht übereinstimmen, ist keine weitere Überprüfung erforderlich.

Zur Überprüfung der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke habe ich die vorgegebenen Streckenlängen für c, f, a und d verwendet, um die jeweiligen Verhältnisse der Seiten rechnerisch zu bestimmen.

- b) Ganz allgemein würde es auch ausreichen, wenn man je Dreieck zwei Winkel ausmisst und vergleicht. Der jeweils dritte Winkel ergibt sich aus dem Summeninnenwinkelsatz für Dreiecke.
Zwei Dreiecke sind auch ähnlich zueinander, wenn...
- ...sie in einem Winkel und den Verhältnissen der anliegenden Seiten übereinstimmen;
 - ...sie im Verhältnis zwei Seiten und im Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen;
 - ...wenn die Verhältnisse aller drei Seiten zueinander übereinstimmen.



Ergänzende Hinweise

Je nach Lernstand lässt sich die Anzahl anpassen, wie viele bzw. welche Ähnlichkeitssätze von den Schülerinnen und Schülern anzugeben sind.

Da das Bild eine 2D-Projektion von 3D-Gesichtern ist, hängt die Form des Dreiecks vom Winkel zwischen Kamera und „Gesichtsebene“ ab. Wenn das eine Gesicht im Vergleich zum anderen anders geneigt wird, so verändert sich das zugehörige Dreieck. Folglich kann die Ähnlichkeit der Gesichter nur geprüft werden, wenn die Neigung beider Gesichter zur Kamera gleich ist. Im dargestellten Fall könnte es sein, dass das linke Gesicht aufrechter/weniger nach vorne geneigt ist. Somit könnte es sein, dass die Gesichter sehr wohl ähnlich sind, obwohl die Dreiecke nicht ähnlich sind. Ob Schülerinnen und Schüler derart argumentieren werden, ist nicht zwingend zu erwarten. Aus diesem Grunde ist die Aufgabenstellung so formuliert, dass die Dreiecke auf Ähnlichkeit im mathematischen Sinne zu untersuchen sind.

	Illustrierte Standards
inhaltsbezogene Kompetenz	Raum und Form Die Schülerinnen und Schüler - benennen und beschreiben geometrische Objekte und Beziehungen in der Umwelt mit Hilfe mathematischer Modelle (Punkte, Winkel, Strecken, Geraden, Flächen, Körper) und ihre Zusammenhänge. - erkennen und beschreiben Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte (z. B. Symmetrie, Idee der Kongruenz, Lagebeziehungen). (ESA) - wenden Sätze der ebenen Geometrie (insbesondere den Satz des Pythagoras und Ähnlichkeitsbeziehungen) bei Konstruktionen und Berechnungen an, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (ESA) - erkennen, beschreiben und begründen Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte (z.B. Symmetrie, Idee der Kongruenz, Ähnlichkeit, Lagebeziehungen) und nutzen diese im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachsituationen. (MSA) - wenden Sätze der ebenen Geometrie (insbesondere den Satz des Pythagoras, den Satz des Thales, Ähnlichkeitsbeziehungen und trigonometrische Beziehungen) bei Konstruktionen, Berechnungen, Begründungen und Beweisen an, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge. (MSA)
prozessbezogene Kompetenzen (AFB)	Mathematisch argumentieren: Die Schülerinnen und Schüler - entwickeln und erläutern komplexe Argumentationen. (AFB III) Mathematisch modellieren: Die Schülerinnen und Schüler - reflektieren und beurteilen verwendete mathematische Modelle kritisch, z. B. in Bezug auf die Realsituation. (AFB III)



Material und Aufgabenstellung

Begründe, dass diese ausgewählten Merkmale – Pupillen und Nasenspitze – nicht ausreichend für eine computergestützte Gesichtserkennung sind.



Lösung

Werden nur drei ausgewählte Punkte als Merkmale für eine computergestützte Gesichtserkennung verwendet, so bietet diese geringe Anzahl eine geringe Sicherheit bzw. ist die Erkennung anfällig für Fälschungen und Unsicherheiten. Je mehr Merkmale zur Prüfung bzw. Identifizierung einer Person herangezogen werden, umso sicherer ist eine korrekte Erkennung.

Außerdem ist die Wahrscheinlichkeit höher, dass man bei Verwendung von nur drei Merkmalen ein Gesicht fälschlicherweise als nicht identisch erkennt. Die Voraussetzung, dass man in genau dem gleichen Winkel z.B. für das Entsperren eines Handys in die Kamera blickt, ist bedeutsamer. Verwendet man mehrere Merkmale bzw. Bezugspunkte und damit viele Dreiecke, so kann trotz einer geringen Abweichung in der Kopfstellung die Identifikation des Gesichtes mit einer hohen Wahrscheinlichkeit erfolgen.



Ergänzende Hinweise

- Hinweise: Die Vorgaben ermöglichen einen vielfältigen Zugang zu der Aufgabe. Dabei wird bewusst ein zunächst reduzierter Zugang zur Gesichtserkennung gewählt. Dieser kann mit Aufgabenteil 02 auf verschiedene Weise erweitert werden, und so die mathematische Modellierung und den realen Kontext verbessern.
- Voraussetzungen / Grenzen: Den Schülerinnen und Schülern sollte die Ähnlichkeit im mathematischen Sinne bekannt sein.
- Potenzial / Differenzierung:
 - Durch Veränderung der Vorgaben ist eine vielfältige Differenzierung möglich (z.B. nur Bild mit Dreiecken, Bild ohne weitere Angaben, wahlweise ergänzt durch Angabe der Koordinaten oder Streckenlängen). Dieser Differenzierungsansatz bietet auch die Möglichkeit einer arbeitsteiligen Unterrichtsphase und anschließender Diskussion der evtl. unterschiedlichen Ergebnisse.
 - Denkbar ist auch eine Bearbeitung der Aufgabe mit dynamischer Geometriesoftware oder anderweitiger digitaler Medien. Auf diesem Wege könnten die Schülerinnen und Schüler zu unterschiedlichen Setzungen der Merkmale gelangen und damit ein Austausch über die Genauigkeit initiiert werden. Dies kann auch erreicht werden, wenn man gar keine Merkmalspunkte vorgibt.
 - Ohne Veränderung der Vorgaben kann die grundsätzliche Genauigkeit der dargestellten Setzung der Merkmale ein Gesprächsanlass sein. Unterstützt wird dies durch die Angabe der Koordinaten auf zwei Nachkommastellen. Ein Austausch im Bereich der Metaebene und damit die Grenzen und Möglichkeiten der Modellierung in der Mathematik ist ebenfalls denkbar. Hierbei kann auch über die verschiedene Bedeutung des Wortes „ähnlich“ in Mathematik und Realität gesprochen werden.
 - Die Aufgabe bietet einen Gesprächsanlass zur aktuellen Entwicklung im Bereich der Gesichtserkennung respektive der Personenidentifizierung. Ggf. ist eine Recherche der Schülerinnen und Schüler in der Sache bei Aufgabenteil 02 integrierbar.
 - Der Modellierungsprozess könnte auch z.B. mit Hilfe der Stop-Motion-Technik seitens der Schülerinnen und Schüler dokumentiert werden.



Quellen

Abbildung 1: Erstellt mit GeoGebra, <https://www.geogebra.org/> (es gelten die GeoGebra-Lizenzbedingungen). Copyright Grafik: cottonbro studio. (2020, 11. Juni). Frau im Grauen Langarmhemd, Da Neben Mädchen Im Grauen Langarmhemd Lächelt. Pexels. <https://www.pexels.com/de-de/foto/frau-im-grauen-langarmhemd-das-neben-madchen-im-grauen-langarmhemd-lachelt-4718098/> [bearbeitet].