

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Beispielaufgaben

Aufgabe für das Fach Physik

Kurzbeschreibung

Aufgabentitel	Der Potenzialtopf und das Bohr'sche Atommodell
Anforderungsniveau	erhöht
Inhaltsbereiche	♦ Quantenphysik und Materie ♦ Atomvorstellungen ♦ qualitative Betrachtung eines quantenmechanischen Atommodells ♦ Modell des eindimensionalen Potenzialtopfs und seine Grenzen
Materialien	♦ M 1 Radiale Anteile von Nachweiswahrscheinlichkeitsdichten
Quellenangaben	♦ Alle Materialien und Abbildungen wurden im Auftrag des IQB erstellt.
Hilfsmittel	♦ Wissenschaftlicher Taschenrechner ♦ Formelsammlung
zusätzliche inhaltliche und methodische Voraussetzungen	♦ Bohr'sches Atommodell
fachpraktischer Anteil	ja ☐ nein ☒ Zeitzuschlag: -
Hinweise	♦ Hinweise für die Lehrkraft

1 Aufgabe

Der Potenzialtopf und das Bohr'sche Atommodell

Emissions- und Absorptionsspektren liefern wichtige Hinweise z. B. auf die chemische Zusammensetzung von Sternen. So absorbieren Wasserstoffatome im Grundzustand elektromagnetische Strahlung charakteristischer Wellenlängen. Die drei größten Wellenlängen haben die Werte $\lambda_1 = 121,5 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 102,5 \text{ nm}$ und $\lambda_3 = 97,2 \text{ nm}$.

	BE
1 Der eindimensionale Potenzialtopf mit unendlich hohen Wänden ist ein Modell, mit dem man die Entstehung solcher Spektren erklären kann.	
Erläutern Sie das Modell des eindimensionalen Potenzialtopfs mit unendlich hohen Wänden und potenzieller Energie im Topf gleich null.	3
Erklären Sie die Absorption charakteristischer Wellenlängen in diesem Modell.	3
Für die Energien eines Elektrons im Quantenzustand $n = 1, 2, 3, \dots$ in einem Potenzialtopf der Länge L gilt $E_n = \frac{h^2}{8m_e \cdot L^2} \cdot n^2$.	
Bestimmen Sie die Länge L des Potenzialtopfes so, dass das Potenzialtopfmodell die Absorption der Wellenlänge λ_1 erklärt. [Kontrollwert: $= 3,3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$]	4
Berechnen Sie die Energien eines Elektrons in einem Potenzialtopf dieser Länge für $n = 1$ bis 4 in der Einheit eV.	2
Stellen Sie die Energien in einer geeigneten Form dar.	2
2 Niels Bohr entwickelte im Jahre 1913 ein Atommodell, in dem das Elektron im Wasserstoffatom im Quantenzustand $n = 1, 2, 3, \dots$ die Energien $E_n = -13,6 \text{ eV} \cdot \frac{1}{n^2}$ besitzt.	
Berechnen Sie die Energien eines Elektrons im Wasserstoffatom im Bohr'schen Atommodell für $n = 1$ bis 4 in der Einheit eV.	2
Stellen Sie auch diese Energien in einer geeigneten Form dar.	2
3 Berechnen Sie die Wellenlängen λ_2 und λ_3 in beiden Modellen.	4
Vergleichen Sie die Lage der Energieniveaus in beiden Modellen.	3
Beurteilen Sie die Eignung beider Modelle zur Erklärung	
♦ der tatsächlichen Größe der Wellenlängen λ_2 und λ_3 sowie	3
♦ der Ionisierbarkeit von Wasserstoffatomen.	
Erklären Sie, dass das Potenzialtopfmodell nicht geeignet ist, ein Wasserstoffatom zu beschreiben.	2

- 4 Das Modell des linearen Potenzialtopfs ermöglicht Aussagen über die Nachweiswahrscheinlichkeitsdichten von Elektronen an bestimmten Orten im Topf.

Skizzieren Sie die Nachweiswahrscheinlichkeitsdichten im linearen Potenzialtopf für zwei Zustände, bei denen die Nachweiswahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons in der Mitte des Potenzialtopfes null ist, und nennen Sie die dazugehörigen Quantenzahlen.

2

2

Begründen Sie ohne Rechnung den Wert des Integrals $\int_0^L |\psi_n(x)|^2 dx$.

2

M 1 zeigt die radialen Anteile von Nachweiswahrscheinlichkeitsdichten eines Elektrons.

Begründen Sie, welcher der Graphen in M 1 zum Zustand eines Elektrons in einem Wasserstoffatom mit der Quantenzahl $n = 2$ und welcher der Graphen zu $n = 3$ gehört.

4

2 Material

Material 1

Radiale Anteile von Nachweiswahrscheinlichkeitsdichten

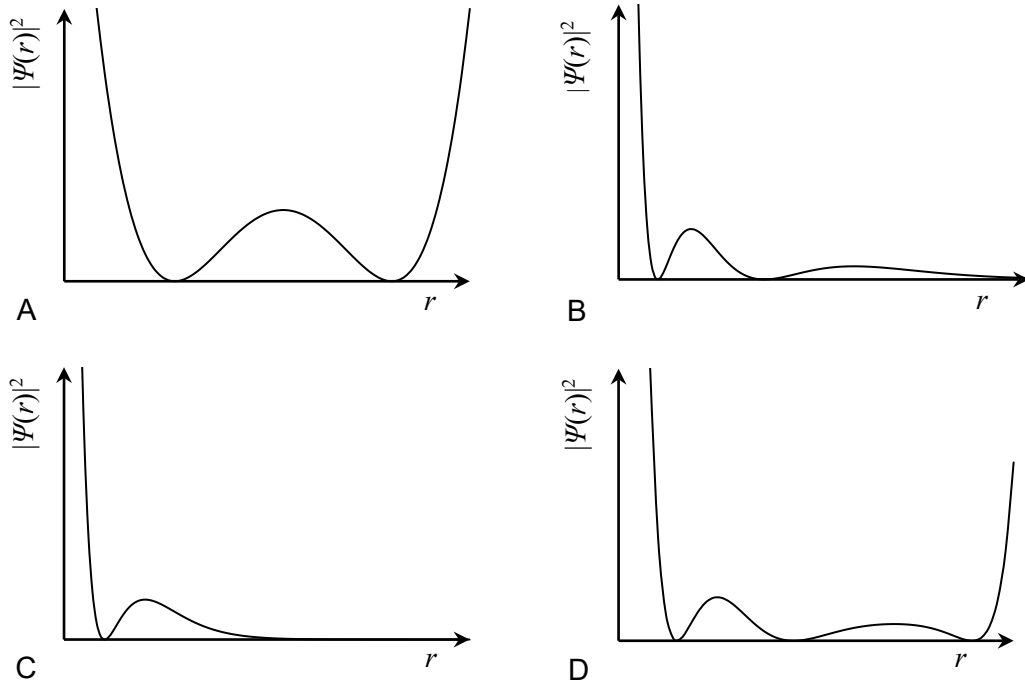
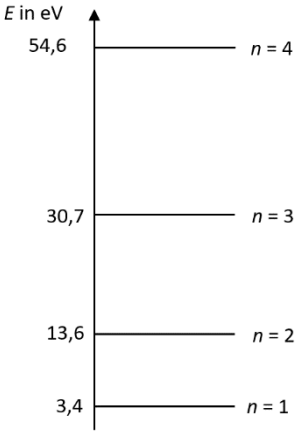


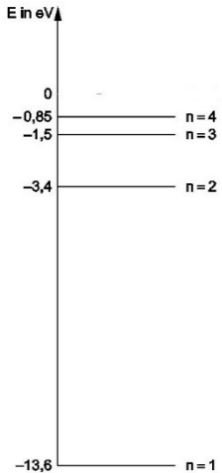
Abb. 1: Nachweiswahrscheinlichkeitsdichten, IQB

3 Erwartungshorizont

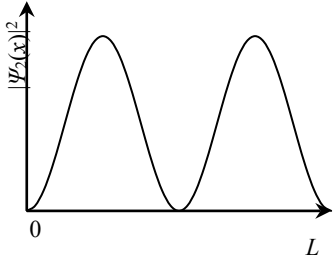
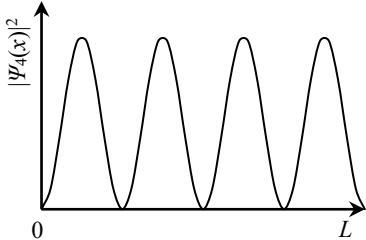
Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE/AFB		
		I	II	III
1	<i>Erläutern Sie das Modell des eindimensionalen Potenzialtopfs mit unendlich hohen Wänden und potenzieller Energie im Topf gleich null.</i> <i>Erklären Sie die Absorption charakteristischer Wellenlängen in diesem Modell.</i> Die Lernenden ... S 1 erklären Phänomene unter Nutzung bekannter Modelle und Theorien; K 4 formulieren unter Verwendung der Fachsprache chronologisch und kausal korrekt strukturiert. <i>Erläutern:</i> Der Zustand eines Elektrons im Potenzialtopf wird durch eine Wellenfunktion beschrieben. Im Potenzialtopf ist die potenzielle Energie null. Außerhalb des Topfs ist die potenzielle Energie unendlich groß. Daher ist die Nachweiswahrscheinlichkeit des Elektrons außerhalb des Potenzialtopfs und an den Wänden null. <i>Erklären:</i> Da die Nachweiswahrscheinlichkeit des Elektrons außerhalb des Topfes null ist und die Wellenfunktion im Topf ohne Sprung an die Wellenfunktion außerhalb des Topfes anschließen muss, hat die periodische Wellenfunktion, die das Elektron beschreibt, Knoten an den Rändern des Topfes. Deshalb sind nur bestimmte Wellenlängen und damit auch nur diskrete Energiewerte möglich. Licht einer bestimmten Wellenlänge besteht aus Photonen einer bestimmten Energie. Diese werden absorbiert, wenn die Energie der Energiedifferenz zweier Energiezustände im Potentialtopf entspricht und somit Elektronen von einem energieärmeren in einen energiereicheren Zustand übergehen können. <i>Bestimmen Sie die Länge L des Potenzialtopfes so, dass das Potenzialtopfmodell die Absorption der Wellenlänge λ_1 erklärt.</i> Die Lernenden ... S 7 wenden bekannte mathematische Verfahren auf physikalische Sachverhalte an. <i>Bestimmen:</i> Die größte Wellenlänge wird im Grundzustand absorbiert, wenn das Elektron in den Quantenzustand $n = 2$ übergeht. $\frac{h \cdot c}{\lambda_1} = E_2 - E_1 = \frac{h^2}{8m_e L^2} \cdot 2^2 - \frac{h^2}{8m_e L^2} \cdot 1^2 = \frac{3h^2}{8m_e L^2} \Leftrightarrow$	3		
		3		

	$L = \sqrt{\frac{3h}{8m_e \cdot c}} \cdot \lambda_1 = \sqrt{\frac{3h}{8m_e \cdot c}} \cdot 121,5 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 3,32 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ Berechnen Sie die Energien eines Elektrons in einem Potenzialtopf dieser Länge für $n = 1$ bis 4 in der Einheit eV. Stellen Sie die Energien in einer geeigneten Form dar. Die Lernenden ... S 7 wenden bekannte mathematische Verfahren auf physikalische Sachverhalte an; K 6 veranschaulichen Informationen und Daten in ziel-, sach- und adressatengerechten Darstellungsformen, auch mithilfe digitaler Werkzeuge. Berechnen: $E_1 = \frac{h^2}{8m_e (3,32 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2} \cdot 1 = 3,4 \text{ eV}$ $E_2 = \frac{h^2}{8m_e (3,32 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2} \cdot 4 = 13,6 \text{ eV}$ $E_3 = \frac{h^2}{8m_e (3,32 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2} \cdot 9 = 30,7 \text{ eV}$ $E_4 = \frac{h^2}{8m_e (3,32 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2} \cdot 16 = 54,6 \text{ eV}$ Darstellen: 		4	
		2		
2	Berechnen Sie die Energien eines Elektrons im Wasserstoffatom im Bohr'schen Atommodell für $n = 1$ bis 4 in der Einheit eV. Stellen Sie auch diese Energien in einer geeigneten Form dar. Die Lernenden ... S 7 wenden bekannte mathematische Verfahren auf physikalische Sachverhalte an;			

	K 6 veranschaulichen Informationen und Daten in ziel-, sach- und adressatengerechten Darstellungsformen, auch mithilfe digitaler Werkzeuge. Berechnen: $E_1 = -13,61\text{eV} \cdot \frac{1}{1^2} = -13,61\text{eV}$ $E_2 = -13,61\text{eV} \cdot \frac{1}{2^2} = -3,40\text{eV}$ $E_3 = -13,61\text{eV} \cdot \frac{1}{3^2} = -1,51\text{eV} .$ $E_4 = -13,61\text{eV} \cdot \frac{1}{4^2} = -0,85\text{eV}$ Darstellen: 	2		
3	Berechnen Sie die Wellenlängen λ_2 und λ_3 in beiden Modellen. Die Lernenden ... S 7 wenden bekannte mathematische Verfahren auf physikalische Sachverhalte an. Berechnen: Die Wellenlängen λ_2 und λ_3 betragen im Potenzialtopfmodell $\lambda_2 = \frac{h \cdot c}{E_3 - E_1} = \frac{h \cdot c}{27,3\text{eV}} = 45,4\text{nm} \text{ und}$ $\lambda_3 = \frac{h \cdot c}{E_4 - E_1} = \frac{h \cdot c}{51,2\text{eV}} = 24,2\text{nm} .$ Die entsprechenden Wellenlängen betragen im Bohr'schen Atommodell $\lambda_2 = \frac{h \cdot c}{E_3 - E_1} = \frac{h \cdot c}{-1,5\text{eV} + 13,6\text{eV}} = 102,5\text{nm} \text{ und}$ $\lambda_3 = \frac{h \cdot c}{E_4 - E_1} = \frac{h \cdot c}{-0,85\text{eV} + 13,6\text{eV}} = 97,2\text{nm}.$		4	

	<i>Vergleichen Sie die Lage der Energieniveaus in beiden Modellen.</i> <i>Beurteilen Sie die Eignung beider Modelle zur Erklärung</i> ♦ der tatsächlichen Größe der Wellenlängen λ_2 und λ_3 sowie ♦ der Ionisierbarkeit von Wasserstoffatomen. <i>Erklären Sie, dass das Potenzialtopfmodell nicht geeignet ist, ein Wasserstoffatom zu beschreiben.</i> Die Lernenden ... K 3 entnehmen unter Berücksichtigung ihres Vorwissens aus Beobachtungen, Darstellungen und Texten relevante Informationen und geben diese in passender Struktur und angemessener Fachsprache wieder; E 8 beurteilen die Eignung physikalischer Modelle und Theorien für die Lösung von Problemen. <i>Vergleichen:</i> Im Bohr'schen Atommodell haben alle Zustände negative Energien, im Potenzialtopfmodell hingegen positive Energien. Die Abstände der Energieniveaus nehmen im Bohr'schen Atommodell für höhere Quantenzahlen ab und die Energien nähern sich dem Wert 0 eV an. Im Potenzialtopfmodell nehmen die Abstände für höhere Quantenzahlen zu und die Energien werden unendlich groß. <i>Beurteilen:</i> Die Wellenlängen λ_2 und λ_3 sind im Potenzialtopfmodell viel kleiner als in Wirklichkeit. Das Bohr'sche Atommodell gibt die Wellenlängen hingegen sehr gut wieder. In beiden Modellen hat das Elektron im Grundzustand eine Energie ungleich null. Da die Wände des Potenzialtopfs unendlich hoch sind, kann das Elektron den Potenzialtopf nicht verlassen. Ein Elektron, das im Bohr'schen Atommodell eine positive Energie hat, wäre hingegen nicht an den Atomkern gebunden. Im Potenzialtopfmodell lässt sich daher nicht erklären, dass Wasserstoffatome ionisiert werden können. <i>Erklären:</i> Das Potenzialtopfmodell betrachtet das Atom nicht als dreidimensionales, sondern als eindimensionales Objekt. Zudem befindet sich das Elektron in einem Wasserstoffatom nicht in einem Kasten-, sondern in einem Coulombpotenzial.		3	3
4	<i>Skizzieren Sie die Nachweiswahrscheinlichkeitsdichten im linearen Potenzialtopf für zwei Zustände, bei denen die Nachweiswahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons in der Mitte des Potenzialtopfes null ist, und nennen Sie die dazugehörigen Quantenzahlen.</i> Die Lernenden ... K 6 veranschaulichen Informationen und Daten in ziel-, sach- und adressatengerechten Darstellungsformen, auch mithilfe digitaler Werkzeuge; S 1 erklären Phänomene unter Nutzung bekannter Modelle und Theorien.			

	<i>Skizzieren und nennen:</i> $n = 2$  $n = 4$  <i>Begründen Sie ohne Rechnung den Wert des Integrals $\int_0^L \psi_n(x) ^2 dx$.</i> Die Lernenden ... S 1 erklären Phänomene unter Nutzung bekannter Modelle und Theorien. <i>Begründen:</i> $\psi_n(x) ^2$ ist die Nachweiswahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons am Ort x. Es gilt $\int_0^L \psi_n(x) ^2 dx = 1$, da das Elektron irgendwo auf der Länge des Potenzialkastens nachzuweisen sein muss. <i>Begründen Sie, welcher der Graphen in M 1 zum Zustand eines Elektrons in einem Wasserstoffatom mit der Quantenzahl $n = 2$ und welcher der Graphen zu $n = 3$ gehört.</i> Die Lernenden ... E 6 erklären mithilfe bekannter Modelle und Theorien die in erhobenen oder recherchierten Daten gefundenen Strukturen und Beziehungen. <i>Begründen:</i> Die Graphen A und D können nicht zu gebundenen Zuständen gehören, da die Nachweiswahrscheinlichkeitsdichten für große r nicht gegen null konvergieren. Im Potenzialtopf wächst die Anzahl der Nullstellen der Nachweiswahrscheinlichkeitsdichten mit der Quantenzahl n. Weil der Graph B mehr Nullstellen hat als der Graph C, ist die Erklärung naheliegend, dass der Graph C zu $n = 2$ und der Graph B zu $n = 3$ gehört.	2	2	4
	Summe	12	21	7
	Anteile der Bewertungseinheiten in Prozent	30	52,5	17,5

4 Standardbezug

Teilaufgabe	Kompetenzbereich			
	S	E	K	B
1	1, 7		4, 6	
2	7		6	
3	7	8	3	
4	1	6	6	

5 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster¹ vorgesehen, das angibt, wie die in den drei Prüfungsteilen insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

6 Hinweise für die Lehrkraft

Die vorliegende Aufgabe illustriert, wie ein in vielen Bundesländern etablierter Aufgabentyp so gestaltet werden kann, dass die Prüflinge Kompetenzen im Umgang mit Modellen (Standards S 1, E 6 und E 8) nachweisen können, ohne aber eigenständig modellieren zu müssen (Standard E 4). Einen weiteren Schwerpunkt der Aufgabe bildet die Anwendung bekannter mathematischer Verfahren auf physikalische Sachverhalte.

Gegenstand der Aufgabe ist die Erklärung des Linienspektrums von Wasserstoff mithilfe des Modells des eindimensionalen linearen Potenzialtopfs sowie mithilfe des Bohr'schen Atommodells. Ersteres ist in den *Bildungsstandards für das Fach Physik* für das erhöhte Niveau verankert. Kenntnisse zum letzteren sind zur Bearbeitung der Aufgabe hilfreich, aber nicht unabdingbar, da die dazu nötigen Informationen in der Aufgabe gegeben werden.

Die einleitende Teilaufgabe bezieht sich auf das bekannte Modell des linearen Potenzialtopfs. Die Erläuterung des Modells sowie die Erklärung der Absorption charakteristischer Wellenlängen in diesem Modell zielt auf das Wiedergeben von Sachverhalten im gelernten Zusammenhang und ist daher dem Anforderungsbereich I zuzuordnen, wobei auch Kommunikationskompetenz geprüft wird (Standard K 4). Danach wenden die Prüflinge das Modell an, indem sie den zentralen Parameter des Modells, die Länge des Potenzialtopfs, anhand eines Messwerts anpassen, Folgerungen aus dem so angepassten Modell ziehen und diese in geeigneter Form darstellen.

¹ Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.

In der Teilaufgabe 2 wird das Bohr'sche Atommodell angewendet und die Ergebnisse werden dargestellt. In der Teilaufgabe 3 werden die beiden Modelle anhand mehrerer Messwerte verglichen und ihre jeweilige Eignung zur Erklärung experimenteller Ergebnisse wird beurteilt. Auf eine genauere Betrachtung der Tatsache, dass das quantenmechanische Modell des linearen Potenzialtopfs bezüglich der Energieniveaus des Wasserstoffatoms schlechtere Ergebnisse liefert als das Bohr'sche Atommodell, das lediglich Elemente der Quantenphysik nutzt, wird hier verzichtet. Durch diese Betrachtung könnte die Aufgabe aber in Richtung der Reflexion der Relevanz von Modellen (Standard E 9) erweitert werden.

Die letzte Teilaufgabe beschäftigt sich mit der Nachweiswahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons im Potenzialtopfmodell. Dabei werden alle drei Anforderungsbereiche adressiert: Zunächst soll die aus dem Unterricht bekannte räumliche Verteilung der Nachweiswahrscheinlichkeitsdichten skizziert werden, daraus sollen Folgerungen gezogen werden und schließlich soll ein Transfer auf radiale Nachweiswahrscheinlichkeitsdichten im Wasserstoffatom geleistet werden.