

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2026

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = 5 \cdot e^{-\frac{3}{5}x} - 5$. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f .

- a Begründen Sie mithilfe des Funktionsterms, dass G_f streng monoton fallend ist und durch den Koordinatenursprung verläuft. Geben Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ an.

- b Durch $F(x) = -\frac{25}{3} \cdot e^{-\frac{3}{5}x} - 5x$ ist ein Term einer Stammfunktion von f gegeben. Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^{\frac{5}{3}} f(x) dx$.

- c Begründen Sie, dass die folgende Aussage wahr ist, ohne einen Term einer Stammfunktion von f zu verwenden:

Es gibt genau eine reelle Zahl k mit $k > 0$, die Lösung der Gleichung

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = -\int_0^k f(x) dx \text{ ist.}$$

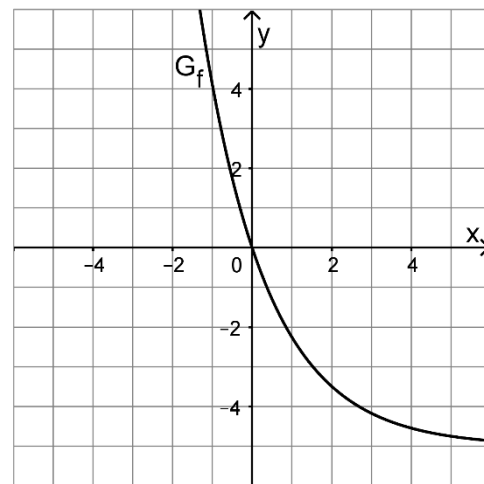


Abb. 1

BE

4

2

4

¹ Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

- d Nachfolgend sind die wesentlichen Schritte eines Lösungswegs zu einer Aufgabe im Zusammenhang mit der Funktion f dargestellt. Geben Sie eine passende Aufgabenstellung an.

$$V_1 = \pi \cdot \int_0^4 (f(x))^2 dx \approx 141,02$$

$$V_2 = \pi \cdot (f(4))^2 \cdot 4 \approx 259,74$$

$$\frac{V_1}{V_2} \approx 0,54, \text{ der gesuchte Anteil beträgt somit etwa } 54 \, \%.$$

Die Umkehrfunktion von f wird mit g bezeichnet. Abbildung 2 zeigt die Graphen von f und g .

- e Geben Sie den Definitionsbereich von g an und zeigen Sie, dass $g(x) = -\frac{5}{3} \cdot \ln\left(\frac{1}{5}x + 1\right)$ gilt.

Eine der Tangenten an G_f hat die Steigung -1 . Diese Tangente wird mit t bezeichnet; t berührt G_f im Punkt $Q(x_Q | f(x_Q))$.

- f Berechnen Sie die Koordinaten von Q .

$$(\text{zur Kontrolle: } x_Q = \frac{5}{3} \cdot \ln 3)$$

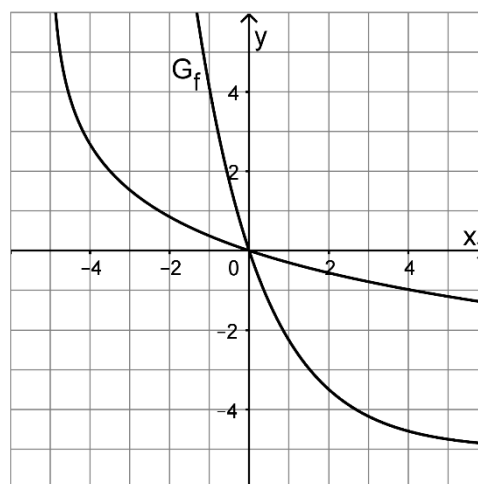


Abb. 2

- g Begründen Sie ohne zu rechnen, dass die Tangente t auch den Graphen von g berührt, und zwar im Punkt $P(f(x_Q) | x_Q)$.
- h Zeichnen Sie das Viereck PQRS mit $R(x_Q | g(x_Q))$ und $S(g(x_Q) | x_Q)$ in Abbildung 2 ein. Begründen Sie, dass der Flächeninhalt des Vierecks durch den folgenden Term angegeben wird:

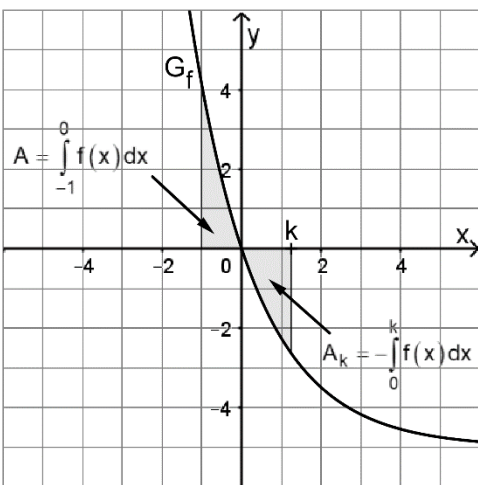
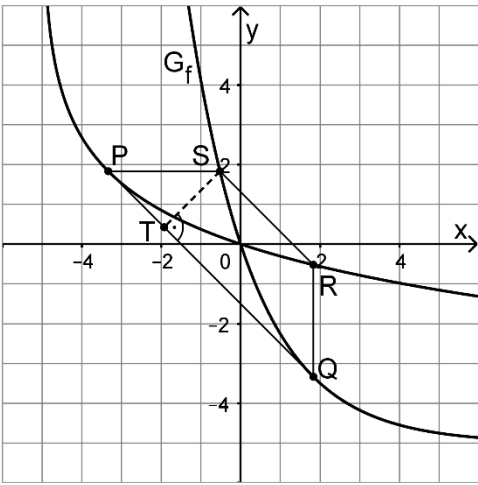
$$\frac{|PQ| + |RS|}{2} \cdot \frac{|PQ| - |RS|}{2}$$

30

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
a Da G_f gegenüber dem streng monoton fallenden Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto e^{-x}$ gestreckt und verschoben ist, ist G_f streng monoton fallend. $f(0) = 5 \cdot e^0 - 5 = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -5$	4

b $\int_0^{\frac{5}{3}} f(x) dx = F\left(\frac{5}{3}\right) - F(0) = -\frac{25}{3} \cdot e^{-1} - \frac{25}{3} - \left(-\frac{25}{3}\right) = -\frac{25}{3} \cdot e^{-1}$	2
c  A_k wächst mit zunehmendem Wert von k. Da zudem $A_1 < A$ und $A_2 > A$ gilt, ist die Aussage wahr.	4
d Betrachtet wird der Körper, der bei Rotation des Graphen von f um die x -Achse im Bereich $0 \leq x \leq 4$ entsteht. Berechnen Sie den Anteil des Volumens dieses Körpers an dem eines Zylinders mit dem Radius $ f(4) $ und der Höhe 4.	3
e Definitionsbereich von g : $]-5; +\infty[$ $y = 5 \cdot e^{-\frac{3}{5}x} - 5 \Leftrightarrow \frac{y+5}{5} = e^{-\frac{3}{5}x} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y+5}{5}\right) = -\frac{3}{5}x \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \cdot \ln\left(\frac{y+5}{5}\right) = x$ Somit gilt: $g(x) = -\frac{5}{3} \cdot \ln\left(\frac{1}{5}x + 1\right)$	4
f $f'(x) = -3e^{-\frac{3}{5}x}$; $f'(x_Q) = -1 \Leftrightarrow -\frac{3}{5}x_Q = \ln\frac{1}{3} \Leftrightarrow x_Q = \frac{5}{3} \cdot \ln 3$ $f(x_Q) = -\frac{10}{3}$	4
g t hat die Steigung -1 und ist daher symmetrisch bezüglich der Gerade mit der Gleichung $y = x$. Da der Graph von g aus G_f durch Spiegelung an dieser Gerade erzeugt werden kann, berührt t auch den Graphen von g , und zwar in dem Punkt, der sich aus der Spiegelung von Q ergibt.	3
h  Das Viereck ist aufgrund seiner Symmetrie bezüglich der Gerade mit der Gleichung $y = x$ ein Trapez. Damit beträgt der Flächeninhalt $\frac{ PQ + RS }{2} \cdot h$, wobei h der Abstand der parallelen Seiten ist. Aufgrund der genannten Symmetrie und der Tatsache, dass S die gleiche y-Koordinate wie P hat, gilt $\sphericalangle QPS = 45^\circ$; folglich ist das Dreieck SPT gleichschenkelig und es gilt $h = \frac{ PQ - RS }{2}$.	6
	30

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	4	I	I			I		X		
b	2					I		X		
c	4	II	II		II		II		X	
d	3	II			II		II		X	
e	4	II	I			II			X	
f	4		I			II			X	
g	3	III	II				II			X
h	6	III	III		II		II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.