

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2026

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

1 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_a: x \mapsto e^x + a \cdot e^{-x}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von g_a wird mit G_a bezeichnet.

a Begründen Sie, dass G_a für jeden Wert von a vollständig oberhalb der x -Achse verläuft. Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von G_a mit der y -Achse an und berechnen Sie die Steigung von G_a in diesem Punkt.

b In Abbildung 1 sind für eine bestimmte Zahl $k > 1$ die Graphen von g_a zu folgenden Werten von a dargestellt: $\frac{1}{k}$, k und k^2 .

Ordnen Sie jedem dieser drei Werte von a den zugehörigen Graphen zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $h_a: x \mapsto g_a\left(x + \frac{1}{2} \ln a\right)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.

c Zeigen Sie rechnerisch, dass $h_a(x) = \sqrt{a} \cdot (e^x + e^{-x})$ gilt und dass der Graph von h_a symmetrisch bezüglich der y -Achse ist.

d Begründen Sie mithilfe von h_a , dass G_a symmetrisch bezüglich einer Gerade ist, und geben Sie eine Gleichung dieser Gerade in Abhängigkeit von a an.

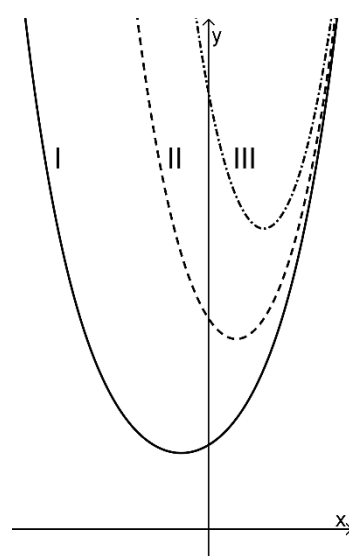


Abb. 1

BE

5

3

5

3

¹ Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

2 Abbildung 2 stellt schematisch die Vorderansicht einer Bahnhofshalle mit zwei Einfahrten für Züge dar. Die Vorderansicht wird modellhaft durch das zur y-Achse symmetrische Flächenstück beschrieben, das die x-Achse, die Geraden mit den Gleichungen $x = -1,2$ und $x = 1,2$ sowie der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto 2,6 - 0,5 \cdot (e^x + e^{-x})$ einschließen. Dabei stellt der Graph von f für $-1,2 \leq x \leq 1,2$ die Profillinie des Dachs dar. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 20 m in der Realität.

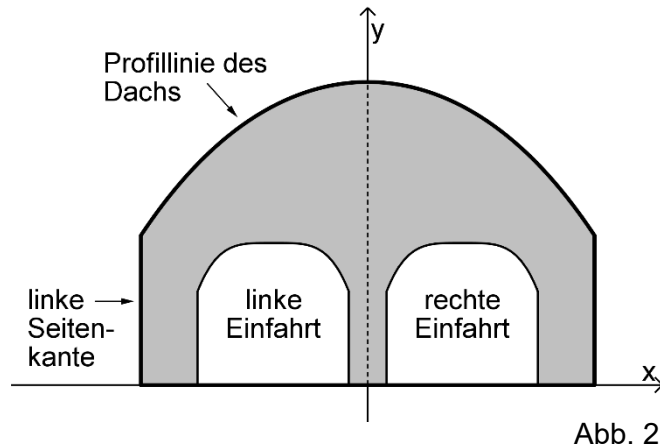


Abb. 2

- a Zeigen Sie, dass die Bahnhofshalle 48 m breit ist, und berechnen Sie ihre Höhe. 2
- b Der Flächeninhalt, den die beiden Einfahrten in der Vorderansicht einnehmen, beträgt insgesamt etwa 447 m^2 . Berechnen Sie den Flächeninhalt des Teils der Vorderansicht, der in Abbildung 2 durch die grau markierte Fläche dargestellt wird. 5
- c Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Profillinie des Dachs und die linke Seitenkante in der Vorderansicht einschließen (vgl. Abbildung 2). 3
- d Im Modell beschreibt die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $r: x \mapsto 0,75 - 10 \cdot (x - 0,5)^4$ für $0,1 \leq x \leq 0,9$ den oberen Rand der rechten Einfahrt. Unterhalb des oberen Rands dieser Einfahrt befindet sich eine Signalleuchte, die im Modell durch den Punkt $P(0,8 | 0,6)$ beschrieben werden kann. Betrachtet wird die folgende Rechnung im Zusammenhang mit einem Punkt $Q(x_Q | r(x_Q))$: 4

$$\frac{r(x_Q) - 0,6}{x_Q - 0,8} \cdot r'(x_Q) = -1 \Leftrightarrow x_Q = 0,835\dots$$

$$\text{damit: } \sqrt{(0,8 - x_Q)^2 + (0,6 - r(x_Q))^2} \cdot 20 \approx 0,85$$

Geben Sie die Bedeutung des Ergebnisses 0,85 dieser Rechnung im Sachzusammenhang an und erläutern Sie den Ansatz, mit dem in der ersten Zeile der Rechnung die x-Koordinate des Punktes Q ermittelt wird.

30

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	a Wegen $e^x > 0$ und $a \cdot e^{-x} > 0$ für $a \in \mathbb{R}^+$ gilt $g_a(x) > 0$. Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0 1+a)$ $g'_a(x) = e^x - a \cdot e^{-x}$; $g'_a(0) = 1 - a$	5
	b Aus $g_a(0) = 1 + a$ und $\frac{1}{k} < k < k^2$ ergibt sich die folgende Zuordnung: I: $\frac{1}{k}$; II: k; III: k^2	3
	c $h_a(x) = e^{x+\frac{1}{2}\ln a} + a \cdot e^{-(x+\frac{1}{2}\ln a)} = e^x \cdot e^{\frac{1}{2}\ln a} + a \cdot e^{-x} \cdot e^{-\frac{1}{2}\ln a}$ $= e^x \cdot a^{\frac{1}{2}} + a \cdot e^{-x} \cdot a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \cdot (e^x + e^{-x})$ $h_a(-x) = \sqrt{a} \cdot (e^{-x} + e^{-(-x)}) = h_a(x)$	5
	d Da G_a aus dem Graphen von h_a durch eine Verschiebung in x-Richtung erzeugt werden kann, ist G_a symmetrisch bezüglich einer zur y-Achse parallelen Gerade. Gleichung der Gerade: $x = \frac{1}{2}\ln a$	3
2	a Breite: $2 \cdot 1,2 \cdot 20 \text{ m} = 48 \text{ m}$ Höhe: $f(0) \cdot 20 \text{ m} = 1,6 \cdot 20 \text{ m} = 32 \text{ m}$	2
	b $2 \cdot \int_0^{1,2} f(x) dx = 2 \cdot \left[2,6x - \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right]_0^{1,2} \approx 3,221$ Flächeninhalt: $3,221 \cdot (20 \text{ m})^2 - 447 \text{ m}^2 \approx 841 \text{ m}^2$	5
	c $f'(x) = -0,5 \cdot (e^x - e^{-x})$ $\tan(\alpha - 90^\circ) = f'(-1,2)$ liefert $\alpha \approx 146,5^\circ$.	3
	d Der Abstand der Signalleuchte zum oberen Rand der Einfahrt beträgt etwa 0,85 m. Die x-Koordinate des Punktes Q auf dem Graphen von r wird so bestimmt, dass die Strecke QP senkrecht auf dem Graphen von r steht.	4
		30

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	5	I				I		X		
b	3	II	II		II				X	
c	5	II				III				X
d	3	III	II				II			X
2 a	2			I		I		X		
b	5		II	II	II	II			X	
c	3			II	II	II			X	
d	4		II	II	II		II		X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.