

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2026

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

1 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + ax + \frac{1}{4}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet. Abbildung 1 zeigt G_a für $a = 0$.

a Berechnen Sie denjenigen Wert von a , für den der Punkt $(1|-1)$ auf G_a liegt, und zeigen Sie, dass dieser Punkt Wendepunkt dieses Graphen ist.

b Zeigen Sie, dass es genau zwei Punkte gibt, durch die alle Graphen der Schar verlaufen, und bestimmen Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte.

c Der Term einer Funktion der Schar kann in der Form $\frac{1}{4} \cdot (x+1)^3$ angegeben werden. Der Graph dieser Funktion kann durch Verschiebungen aus G_0 erzeugt werden. Geben Sie eine passende Möglichkeit an.

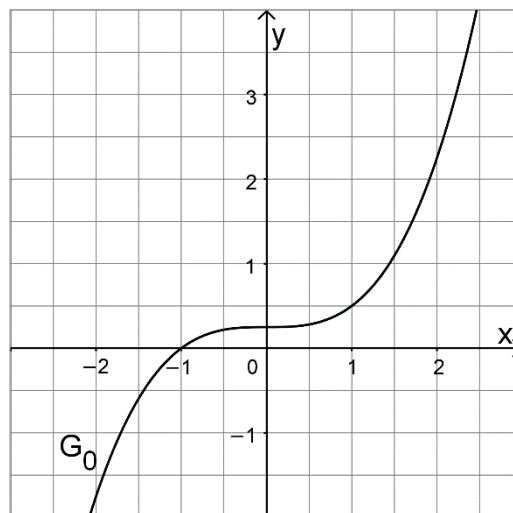


Abb. 1

BE

5

4

2

¹ Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

- d Betrachtet werden für jeden Wert $u > 0$ die Tangente t_u an G_0 im Punkt $P_u(u | f_0(u))$ sowie der Punkt $Q_u(u | 0)$. Die Tangente t_u schneidet die x -Achse in einem Punkt, der mit T_u bezeichnet wird. Begründen Sie mithilfe von geeigneten Eintragungen in Abbildung 1, dass $\left| \overline{T_u Q_u} \right| = \frac{f_0(u)}{f'_0(u)}$ für jeden Wert $u > 0$ gilt.

4

- e Es gibt Kreise, deren Mittelpunkte auf der y -Achse liegen und die den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f_0 in genau zwei Punkten berühren. Der Punkt $A(1 | \frac{3}{4})$ ist ein Berührungspunkt eines solchen Kreises. Bestimmen Sie rechnerisch die y -Koordinate des Mittelpunktes dieses Kreises.

5

- 2 Betrachtet wird eine Wasserfontäne, bei der das Wasser aus einer Düse austritt. Die sich periodisch ändernde momentane Durchflussrate des Wassers an der Düse beeinflusst das Erscheinungsbild der Fontäne.

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto -\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 1$ beschreibt im Folgenden für $x \geq 0$ die zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers an der Düse. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $h(x)$ die momentane Durchflussrate in Litern pro Sekunde. In Abbildung 2 ist der Graph von h dargestellt.

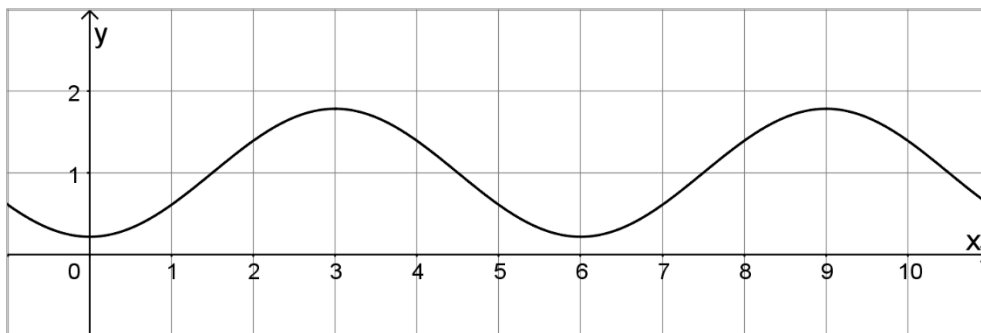


Abb. 2

- a Bestimmen Sie, wie oft die momentane Durchflussrate in der ersten Minute nach Beobachtungsbeginn ihren Maximalwert annimmt, und geben Sie einen Zeitpunkt an, zu dem die momentane Durchflussrate am stärksten zunimmt.

3

- b Berechnen Sie $\int_5^9 h(x) dx$ und interpretieren Sie den Wert des Integrals im Sachzusammenhang.

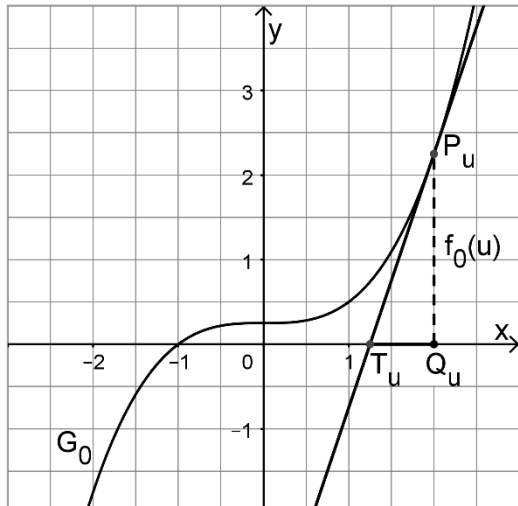
4

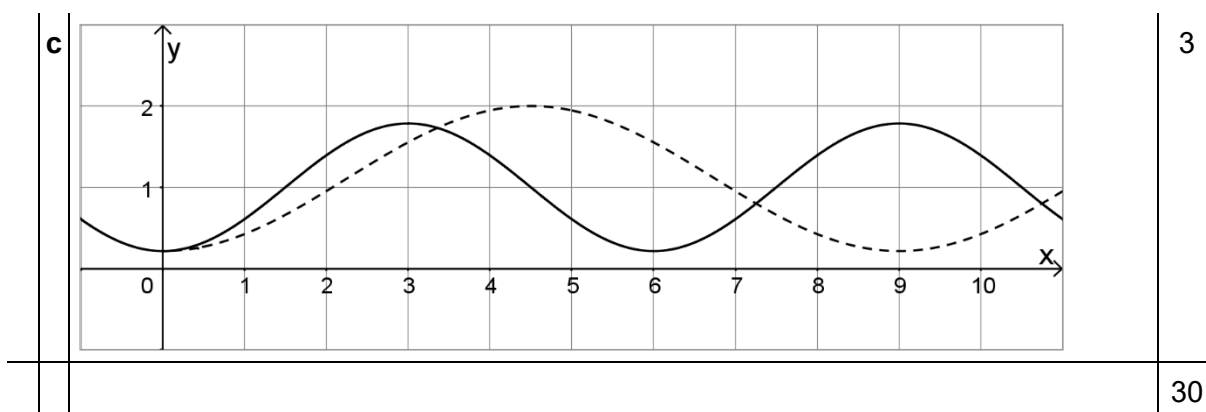
- c Betrachtet wird nun eine andere Düse, bei der sich die momentane Durchflussrate ebenfalls periodisch mit der Zeit ändert. Die maximale momentane Durchflussrate beträgt 2 Liter pro Sekunde und die Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maximalwerten der momentanen Durchflussrate ist 1,5-mal so groß wie bei der zuerst betrachteten Düse. Skizzieren Sie dazu passend in Abbildung 2 einen Graphen, der für $x \geq 0$ eine mögliche zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers für die nun betrachtete Düse beschreibt.

3

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	a $\frac{1}{4} + a + a + \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}$ $f'_a(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2ax + a$; $f''_a(x) = \frac{3}{2}x + 2a$; $f'''_a(x) = \frac{3}{2}$ $f''_{-\frac{3}{4}}(1) = 0$; $f'''_{-\frac{3}{4}}(1) \neq 0$	5
	b $f_0(x) = f_1(x) \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x \cdot (x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0$ $f_a(-1) = 0$; $f_a(0) = \frac{1}{4}$ Koordinaten der Punkte: $(-1 0)$, $(0 \frac{1}{4})$	4
	c Verschiebung um 1 in negative x-Richtung und um $\frac{1}{4}$ in negative y-Richtung	2
	d Für jeden Wert $u > 0$ gilt $f'_0(u) > 0$ sowie $f_0(u) > 0$ und damit $f'_0(u) = \frac{ P_u Q_u }{ T_u Q_u } = \frac{f_0(u)}{ T_u Q_u }$, woraus $T_u Q_u = \frac{f_0(u)}{f'_0(u)}$ folgt. 	4
	e Steigung der Tangente an den Graphen von f'_0 in A: $f''_0(1) = \frac{3}{2}$ Gleichung der Normale an den Graphen von f'_0 in A: $y = -\frac{2}{3}x + n$ $\frac{3}{4} = -\frac{2}{3} + n \Leftrightarrow n = \frac{17}{12}$; y-Koordinate: $\frac{17}{12}$	5
2	a Anzahl: $\frac{60}{6} = 10$ Zeitpunkt: 1,5 Sekunden nach Beobachtungsbeginn	3
	b $\int_5^9 h(x) dx = \left[-\frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + x \right]_5^9 = -\frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{9}{3}\pi\right) + 9 + \frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) - 5 = \frac{32-3\sqrt{3}}{8}$ Im Zeitraum von fünf bis neun Sekunden nach Beobachtungsbeginn treten etwa 3,35 Liter Wasser an der Düse aus.	4



3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	5	I				I		X		
b	4		II			I	I		X	
c	2				I		I	X		
d	4	III	II		III					X
e	5		III		II	II	II			X
2 a	3			II	I	I	II		X	
b	4			II		II			X	
c	3		II	II	II				X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.