

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2026

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	MMS

1 Aufgabe

- 1 Zur Beschreibung des Wachstums einer Pflanze wird ihre Höhe gemessen. Beim Einpflanzen beträgt die Höhe der Pflanze 3 Zentimeter. Betrachtet wird im Folgenden die momentane Änderungsrate der Höhe der Pflanze, die als Wachstumsrate bezeichnet wird. Die Wachstumsrate wird für $t \geq 0$ modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion r mit $r(t) = \frac{3}{4}t \cdot (t+4) \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$ beschrieben. Dabei gibt t die seit dem Einpflanzen vergangene Zeit in Wochen an und $r(t)$ die Wachstumsrate in Zentimeter pro Woche. Abbildung 1 zeigt den Graphen von r .

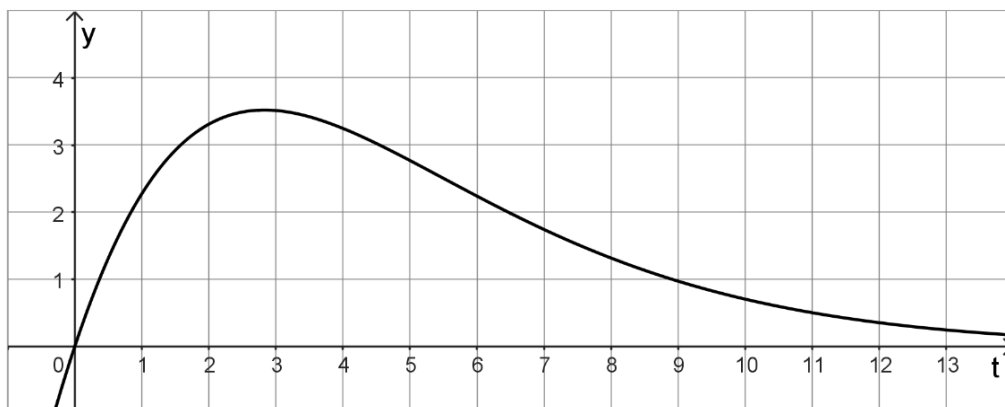


Abb. 1

- a Es gilt $r(10) < 1$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Sachzusammenhang an.

BE

2

¹ Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

b Es gibt einen Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsrate genauso groß ist wie fünf Wochen davor. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt und stellen Sie den Sachverhalt in Abbildung 1 dar.

4

c Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Pflanze am schnellsten wächst.

2

d Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion w , deren erste Ableitungsfunktion r ist und für die $w(0) = 0$ gilt.

3

Außerdem gilt $\lim_{t \rightarrow +\infty} (w(t) + 3) = 27$.

Geben Sie die Bedeutung sowohl von $w(t)$ als auch des Wertes 27 im Sachzusammenhang an.

2 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit

$f_a(x) = \frac{3}{4} \cdot (x^2 - a^2) \cdot e^{1-\frac{x}{a}}$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

a Geben Sie die Nullstellen von f_a an und begründen Sie, dass G_a für jeden Wert von a die y -Achse unterhalb der x -Achse schneidet.

3

Gegeben ist außerdem die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion h mit $h(x) = k \cdot \ln x$ mit einer positiven reellen Zahl k . Die Graphen von f_1 und h haben im Punkt $(1|0)$ eine gemeinsame Tangente.

b Berechnen Sie k und geben Sie eine Gleichung der gemeinsamen Tangente an.

3

c Abbildung 2 zeigt die Graphen von f_1' und von h' . Der einzige gemeinsame Punkt der Graphen ist $(1|f_1'(1))$. Geben Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Graphen von f_1 und h an. Begründen Sie Ihre Angabe ohne weitere Rechnung mithilfe Abbildung 2.

5

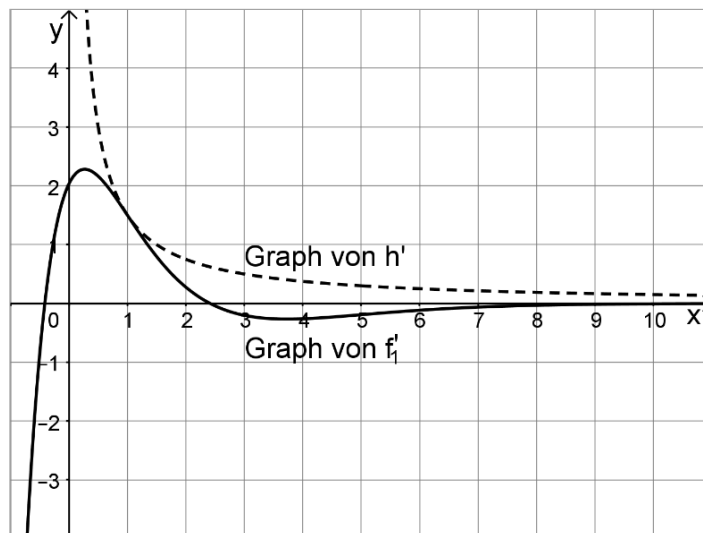


Abb. 2

d Für jeden Wert von a besitzt der Graph G_a einen Tiefpunkt T_a und einen Hochpunkt H_a . Es gibt einen Wert von a , für den die Punkte T_a und H_a gegenüberliegende Eckpunkte eines Quadrats sind, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Bestimmen Sie diesen Wert von a auf Hundertstel gerundet.

4

- e Im vierten Quadranten schließt G_a mit den beiden Koordinatenachsen eine Fläche ein. Der Inhalt dieser Fläche stimmt näherungsweise mit dem Inhalt des Dreiecks überein, dessen Eckpunkte der Koordinatenursprung, der Schnittpunkt von G_a mit der y-Achse und der Schnittpunkt von G_a mit der positiven x-Achse sind. Zeigen Sie, dass die prozentuale Abweichung des Inhalts der Dreiecksfläche vom Inhalt der eingeschlossenen Fläche unabhängig von a ist, und geben Sie diese prozentuale Abweichung an.

4

30

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	a Zehn Wochen nach dem Einpflanzen ist die Wachstumsrate der Pflanze kleiner als 1 Zentimeter pro Woche.	2
	b $r(t) = r(t-5)$ liefert $t \approx 6,0$. Der gesuchte Zeitpunkt ist ungefähr sechs Wochen nach dem Einpflanzen.	4
	c $r'(t) = 0$ liefert $t = 2\sqrt{2}$, d. h. die Pflanze wächst etwa 2,8 Wochen nach dem Einpflanzen am schnellsten.	2
	d $w(t)$ gibt die Zunahme der Höhe der Pflanze seit dem Einpflanzen in Zentimetern an. Der Wert 27 gibt an, dass die Höhe der Pflanze gegen 27 cm strebt.	3
2	a Nullstellen: $-a$, a Wegen $a^2 > 0$ gilt: $f_a(0) = -\frac{3}{4}a^2 \cdot e < 0$	3
	b $h'(1) = f_1'(1) \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$ Gleichung der Tangente: $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$	3
	c Die Graphen besitzen genau einen gemeinsamen Punkt. Für $x > 1$ gilt: Die Differenz $h(x) - f_1(x)$ wird wegen $h'(x) > f_1'(x)$ für zunehmende Werte von x kontinuierlich größer und ist damit wegen $h(1) - f_1(1) = 0$ positiv. Für $x < 1$ gilt: Die Differenz $f_1(x) - h(x)$ wird wegen $h'(x) > f_1'(x)$ für abnehmende Werte von x kontinuierlich größer und ist damit wegen $h(1) - f_1(1) = 0$ positiv.	5
	d $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a - a\sqrt{2} \vee x = a + a\sqrt{2}$	4

	$a + a\sqrt{2} - (a - a\sqrt{2}) = f_a(a + a\sqrt{2}) - f_a(a - a\sqrt{2})$ liefert $a \approx 0,82$.	
e	$\frac{-\frac{1}{2}a \cdot f_a(0)}{-\int_0^a f_a(x) dx} = \frac{e}{2 \cdot (4 - e)}$ Die prozentuale Abweichung beträgt etwa 6 %.	4
		30

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2			I	I		I	X		
b	4		II	II	II	II			X	
c	2		I	I		I		X		
d	3		II	II	II		II		X	
2 a	3	I				I	I	X		
b	3		II		I	II			X	
c	5	III	II		II		III			X
d	4	III	III			II				X
e	4	II	II		II	II	II		X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.