

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2026

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	MMS

1 Aufgabe

	BE
Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{60}{a} \cdot x \cdot (x-a)^2$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.	
a Begründen Sie mithilfe des Funktionsterms von f_a , dass G_a die x-Achse nur in den Punkten $A(0 0)$ und $B(a 0)$ schneidet. Zeigen Sie, dass die Steigung von G_a im Punkt A dem 60-fachen Wert von a entspricht und dass die x-Achse die Tangente an G_a im Punkt B ist.	4
b Für jeden Wert von a schließt G_a mit der x-Achse eine Fläche ein. Berechnen Sie den Wert von a, für den der Inhalt dieser Fläche 10 beträgt.	3
c Es gibt einen Wert von a, für den der Wendepunkt von G_a auf der Gerade mit der Gleichung $y = x$ liegt. Berechnen Sie diesen Wert von a.	4
d Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion w_a mit $w_a(x) = \frac{11}{10} \cdot f_a\left(\frac{11}{10} \cdot (12-x)\right)$ kann schrittweise aus G_a erzeugt werden durch: 1. Streckung mit einem Faktor s_x in x-Richtung 2. Streckung mit einem Faktor s_y in y-Richtung 3. Spiegelung an der y-Achse 4. Verschiebung um 12 in positive x-Richtung Betrachtet werden die auf G_a liegenden Punkte $A(0 0)$, $B(a 0)$ und $C(x_C f_a(x_C))$ mit $0 < x_C < a$. Auf dem Graphen von w_a gibt es Punkte A' , B' und	5

¹ Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

C' , die den Punkten A, B bzw. C gemäß der beschriebenen Beziehung der beiden Graphen entsprechen. Geben Sie die Faktoren s_x und s_y an und beurteilen Sie folgende Aussage:

Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ haben den gleichen Flächeninhalt.

An einem bestimmten Sommertag hat das Strandbad an einem Badensee von 9:00 Uhr bis 21:00 Uhr geöffnet. Außerhalb der Öffnungszeiten befindet sich kein Gast im Strandbad. Am betrachteten Tag wird die Anzahl der Gäste erfasst, die bis zu einem bestimmten Zeitpunkt das Strandbad betreten. Dabei wird vereinfachend angenommen, dass an diesem Tag jeder Gast genau einmal das Strandbad betritt.

Die in $[0;12]$ definierte Funktion g ist durch

$$g(x) = \begin{cases} f_{11}(x) & \text{für } 0 \leq x \leq 11 \\ 0 & \text{für } 11 < x \leq 12 \end{cases}$$

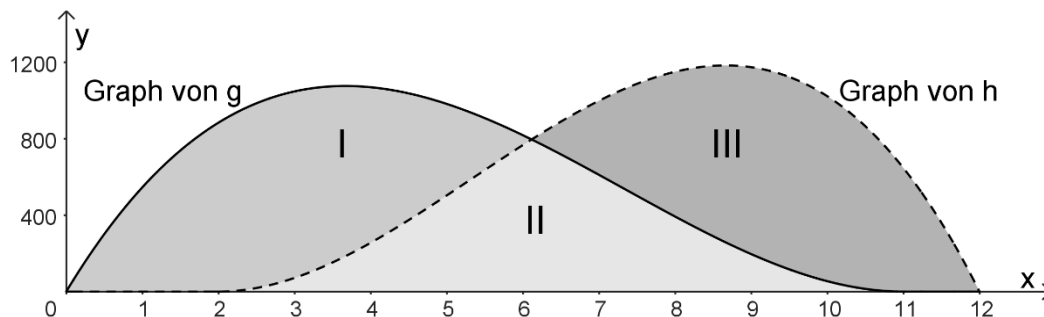
festgelegt. Die Funktion g beschreibt modellhaft die momentane Änderungsrate der erfassten Anzahl, die als Eingangsrate bezeichnet wird. Dabei ist x die seit 9:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $g(x)$ die Eingangsrate in der Einheit $\frac{1}{h}$.

e Begründen Sie die folgende Aussage:

Das Modell steht in Einklang damit, dass bereits ab 20:00 Uhr kein Gast mehr eingelassen wird.

f Es gibt genau einen Zeitpunkt, zu dem die Eingangsrate ihren größten Wert annimmt. Ermitteln Sie rechnerisch sowohl den Zeitpunkt als auch den Wert.

Die Anzahl der Gäste, die an dem betrachteten Tag bis zu einem bestimmten Zeitpunkt das Strandbad verlassen, wird ebenfalls erfasst. Die momentane Änderungsrate dieser Anzahl (Ausgangsrate) wird durch die in $[0;12]$ definierte Funktion h beschrieben. Dabei ist x die seit 9:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $h(x)$ die Ausgangsrate in der Einheit $\frac{1}{h}$. In der Abbildung sind die Graphen von g und h dargestellt.



g Die beiden Graphen und die x-Achse schließen drei Flächen ein, die in der Abbildung mit I, II und III bezeichnet sind. Erläutern Sie im Sachzusammenhang, dass die Inhalte der Flächen I und III gleich sind.

h Betrachtet wird zudem die in $[0;12]$ definierte Funktion D mit $D(x) = \int_0^x (g(t) - h(t)) dt$.

Im Bereich $2 \leq x \leq 11$ nimmt die Funktion D ihr Maximum an. In diesem Bereich schneiden sich die Graphen von g und h genau in einem Punkt, dessen x-Koordinate mit x_S bezeichnet wird. Begründen Sie, dass das Maximum von D an der Stelle x_S

angenommen wird, und geben Sie die Bedeutung des Maximums von D im Sachzusammenhang an.

30

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
a $\frac{60}{a} \cdot x \cdot (x-a)^2 = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee (x-a)^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=a$ $f_a'(0) = 60a$ $f_a'(a) = 0$	4
b $\int_0^a f_a(x) dx = 10 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{2}$	3
c $f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}a$ $\frac{2}{3}a = f_a\left(\frac{2}{3}a\right) \Leftrightarrow a = \frac{3}{20}$	4
d $s_x = \frac{10}{11}; s_y = \frac{11}{10}$ Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ werden als die Grundseiten der Dreiecke ABC bzw. A'B'C' betrachtet. Die zugehörigen Höhen sind die y-Koordinaten y_C und $y_{C'}$ der Punkte C bzw. C'. Wegen $ \overline{A'B'} = s_x \cdot \overline{AB} $ und $y_{C'} = s_y \cdot y_C$ folgt aus $s_x \cdot s_y = 1$, dass die Aussage wahr ist.	5
e Im Modell entspricht $x=11$ dem Zeitpunkt 20:00 Uhr. Für $x \geq 11$ ist $g(x) = 0$ und damit die Eingangsrate gemäß dem Modell gleich null.	2
f Für $0 \leq x \leq 11$ gilt: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{3} \vee x = 11$ $g\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{9680}{9}; g(11) = 0$ Um 12:40 Uhr ist die Eingangsrate mit etwa $1076 \frac{1}{h}$ am größten.	4
g Der Inhalt der Fläche, die der Graph von g und die x-Achse einschließen, entspricht der Anzahl aller Gäste, die am betrachteten Tag das Strandbad betreten. Der Inhalt der Fläche, die der Graph von h und die x-Achse einschließen, entspricht der Anzahl aller Gäste, die am betrachteten Tag das Strandbad verlassen. Die Gleichheit der Inhalte der Flächen I und III ist somit gleichbedeutend mit der Tatsache, dass am betrachteten Tag ebenso viele Gäste das Strandbad betreten wie verlassen.	4
h Im Bereich $2 \leq x \leq 11$ ist x_S wegen $D'(x) = g(x) - h(x)$ die einzige Nullstelle der Ableitungsfunktion D' von D. Da es sich um eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von plus nach minus handelt, nimmt die Funktion D an dieser Stelle ihr Ma-	4

Maximum an. Dieses Maximum entspricht im Modell der größten Anzahl der am betrachteten Tag sich gleichzeitig im Strandbad befindenden Gäste.	
	30

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	4	I	I			I		X		
b	3		II			I			X	
c	4	II	II			II	II		X	
d	5	III	III		II	II	III			X
e	2	I		I			I	X		
f	4			II		I	II		X	
g	4	II		II	I		II		X	
h	4	III	II	III		II	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.