

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2026

Aufgaben für das Fach Mathematik

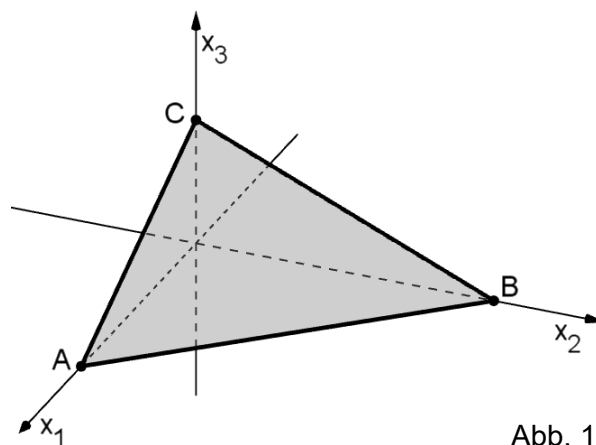
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	MMS

1 Aufgabe

In einem Koordinatensystem sind die Punkte $A(12|0|0)$, $B(0|12|0)$ und $C(0|0|6)$ die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen. Sie sind die Eckpunkte des in Abbildung 1 dargestellten Dreiecks ABC .

- a Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .
- b Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform.
(zur Kontrolle: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 12$)



- c Begründen Sie, dass die folgende Aussage falsch ist:
Für jeden Punkt $P(u|v|w)$ im Innern des Dreiecks ABC gilt: Der Punkt $Q(u|w|v)$ liegt ebenfalls im Innern des Dreiecks ABC .

Betrachtet wird zusätzlich die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

- d Weisen Sie nach, dass die Gerade g in der Ebene E liegt.

BE

3

3

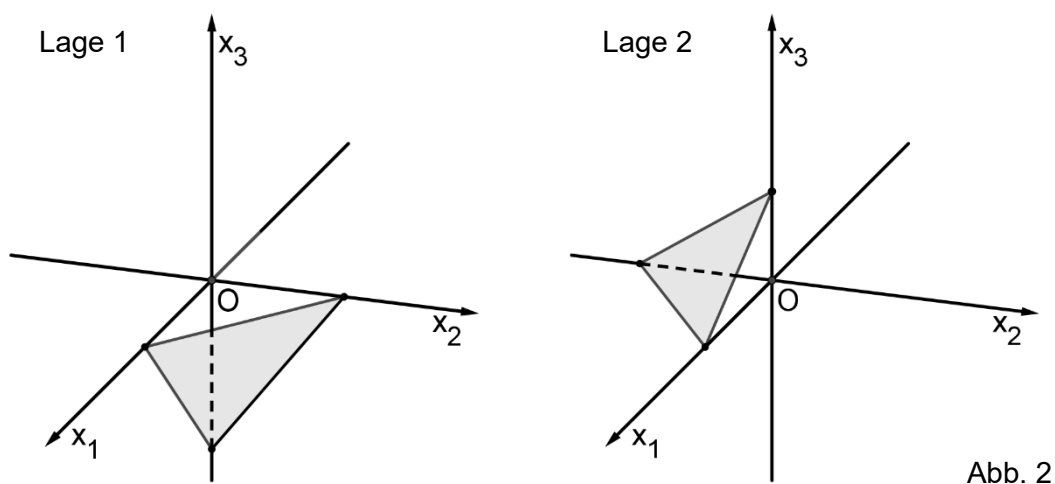
3

2

¹ Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Betrachtet wird die Schar der Ebenen $E_m: x_1 + x_2 - m \cdot x_3 = 4 \cdot (1 - m)$ mit $m \in \mathbb{R}$. Jede Ebene dieser Schar entspricht einer Position, in die E durch Drehung um die Gerade g gebracht werden kann.

- e Die Ebene E wird nun durch eine solche Drehung um einen Winkel der Größe 60° in eine neue Position gebracht. Berechnen Sie die Werte von m, für die die jeweilige Ebene E_m einer solchen Position entspricht. 3
- f Betrachtet werden alle Dreiecke, bei denen die Eckpunkte auf drei verschiedenen Koordinatenachsen liegen. Bei solchen Dreiecken liegt jeder der drei Eckpunkte entweder auf dem positiven oder auf dem negativen Teil der zugehörigen Koordinatenachse. Dementsprechend unterscheidet man bei solchen Dreiecken zwischen acht verschiedenen Lagen; in Abbildung 2 sind zwei dieser Lagen dargestellt (Lage 1 und Lage 2). 6



Für jeden Wert von m mit $m \neq 0$ und $m \neq 1$ schneidet die Ebene E_m die x_1 -Achse im Punkt A_m , die x_2 -Achse im Punkt B_m und die x_3 -Achse im Punkt C_m . Das Dreieck $A_m B_m C_m$ kann eine der beiden dargestellten Lagen annehmen, die andere nicht. Entscheiden Sie, welche der beiden Lagen nicht angenommen werden kann, und begründen Sie Ihre Entscheidung. Bestimmen Sie für die andere Lage alle zugehörigen Werte von m.

20

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
a Flächeninhalt: $\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{MC} = 36\sqrt{6}$ mit dem Mittelpunkt $M(6 6 0)$ der Seite $\overline{AB}$	3

b	$\overrightarrow{AB} \circ \vec{n} = 0 \wedge \overrightarrow{AC} \circ \vec{n} = 0$ liefert $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor von E. Somit hat E eine Gleichung der Form $x_1 + x_2 + 2x_3 = d$. Aus $A \in E$ folgt $d = 12$.	3
c	Der Punkt $P(1 1 5)$ liegt im Innern des Dreiecks ABC, da $1+1+2 \cdot 5 = 12$ gilt und alle Koordinaten positiv sind. Dagegen liegt der Punkt $Q(1 5 1)$ wegen $1+5+2 \cdot 1 \neq 12$ nicht in der Ebene E.	3
d	Einsetzen der Koordinaten von $(3+r 1-r 4)$ in die Gleichung von E liefert die wahre Aussage $3+r+1-r+2 \cdot 4 = 12$.	2
e	$\cos 60^\circ = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -m \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -m \end{pmatrix}} \Leftrightarrow m = \frac{8-3\sqrt{6}}{5} \vee m = \frac{8+3\sqrt{6}}{5}$	3
f	Es gilt: $A_m(4 \cdot (1-m) 0 0)$, $B_m(0 4 \cdot (1-m) 0)$, $C_m(0 0 4 - \frac{4}{m})$ Lage 2: Das Dreieck $A_mB_mC_m$ nimmt Lage 2 nicht an, da für jeden Wert von m die x_1 -Koordinate von A_m und die x_2 -Koordinate von B_m das gleiche Vorzeichen haben. Lage 1: Das Dreieck $A_mB_mC_m$ nimmt genau dann Lage 1 an, wenn gilt: ♦ Die x_1 -Koordinate von A_m und die x_2 -Koordinate von B_m sind positiv. Dies ist genau für alle Werte von m mit $4 \cdot (1-m) > 0$, also für $m < 1$ der Fall. ♦ Die x_3 -Koordinate von C_m ist negativ. Dies ist genau für alle Werte von m mit $4 - \frac{4}{m} < 0$, also für $0 < m < 1$ der Fall. Damit ergibt sich $0 < m < 1$.	6
		20

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	I	I			I		X		
b	3		II			II			X	
c	3	II	II		II		II		X	
d	2	I	I			I		X		
e	3		II			II			X	
f	6	III	III		III	II	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.