Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2025

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	MMS

1 Aufgabe

	BE
1 Um Regenwasser zu speichern, wird es kontrolliert in ein unterirdisches Auffangbecken geleitet, das ein Fassungsvermögen von $800\,\text{m}^3$ hat. Für ein bestimmtes Regenereignis wird das Volumen des Regenwassers im Auffangbecken für $0 \leq x \leq 5$ modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion v mit $v(x) = -\frac{5}{2}x^4 + \frac{50}{3}x^3 + 190$ beschrieben. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $v(x)$ das Wasservolumen in Kubikmetern.	
a Begründen Sie, dass zu Beobachtungsbeginn das Wasservolumen im Auffangbecken $190\,\text{m}^3$ beträgt, und berechnen Sie das Volumen des Wassers, das in den ersten 1,5 h nach Beobachtungsbeginn in das Auffangbecken fließt.	3
Betrachtet wird außerdem die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion r mit $r(x) = 10x^2 \cdot (5 - x)$.	
b Zeigen Sie, dass die momentane Änderungsrate des Volumens des Wassers im Auffangbecken in $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ für den betrachteten Zeitraum durch r beschrieben werden kann.	3
c Weisen Sie anhand des gegebenen Terms von r nach, dass für den durch $0 < x < 5$ beschriebenen Zeitraum das Volumen des Wassers im Auffangbecken zu jedem Zeitpunkt zunimmt.	3
d Es wird geplant, zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn eine Pumpe einzuschalten, die Wasser aus dem Auffangbecken mit einer konstanten Rate von $100\,\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$	5

[1] Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

abpumpt. Die momentane Zuflussrate des Regenwassers in das Auffangbecken wird dabei weiterhin durch r beschrieben.

Eine Lösung t der folgenden Gleichung hat im Sachzusammenhang eine Bedeutung.

$$190+\int_0^2 r(x)\,dx+\int_2^t \left(r(x)-100\right)dx=400$$

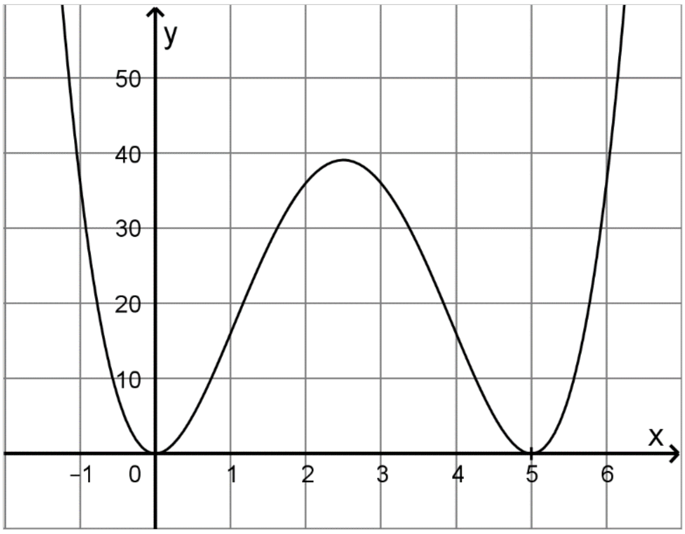
Geben Sie diese Bedeutung von t an und erläutern Sie den Aufbau der Gleichung in Bezug auf diese Bedeutung.

2 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x)=x^2\cdot(x-5)^2$ und die Stelle $x_W=\frac{15-5\sqrt{3}}{6}$.

a Weisen Sie rechnerisch nach, dass x_W eine Wendestelle von f ist. 3

b Es gibt im ersten Quadranten ein Flächenstück, das von der y-Achse, dem Graphen von f und der Gerade parallel zur x-Achse, die durch den Wendepunkt $\left(x_W \mid f(x_W)\right)$ verläuft, eingeschlossen wird. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks. 3

c Die Abbildung zeigt den Graphen von f. Die Punkte $A(u\mid f(u))$, $B(1\mid 0)$, $C(4\mid 0)$ und $D(5-u\mid f(5-u))$ sind für jeden Wert von u mit $0<u<2{,}5$ die Eckpunkte eines symmetrischen Trapezes. Skizzieren Sie das symmetrische Trapez für $u=1{,}5$ in der Abbildung. Ermitteln Sie einen Term, der den Flächeninhalt des symmetrischen Trapezes in Abhängigkeit von u angibt. 5

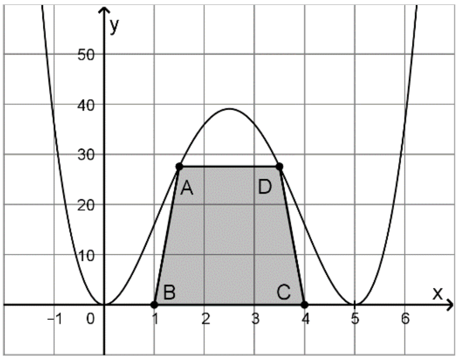


25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	$v(0)=190$ $v(1{,}5)-190=\frac{1395}{32}$	3

		Es fließen etwa $44\,\mathrm{m}^3$ Wasser in das Auffangbecken.	
	b	$v'(x) = 50x^2 - 10x^3 = r(x)$	3
	c	Für $0 < x < 5$ sind die Faktoren $10x^2$ und $5 - x$ positiv und damit auch $r(x)$. Folglich ist v in $0 < x < 5$ streng monoton wachsend.	3
	d	Zum Zeitpunkt t beträgt das Volumen im Wasserbecken $400\,\mathrm{m}^3$. Die beiden ersten Summanden beschreiben das Wasservolumen im Becken beim Einschalten der Pumpe in m^3. Die Differenzfunktion $r(x) - 100$ beschreibt die momentane Änderungsrate des Wasservolumens bei laufender Pumpe in $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$. Der Term $\int_2^t (r(x) - 100)\,dx$ beschreibt daher die Änderung des Wasservolumens nach Einschalten der Pumpe in m^3 bis zum Zeitpunkt t.	5
2	**a**	$f''\left(\frac{15-5\sqrt{3}}{6}\right) = 0$ und $f'''\left(\frac{15-5\sqrt{3}}{6}\right) = -20\sqrt{3} \neq 0$	3
	b	$\int_0^{x_W} (f(x_W) - f(x))\,dx = \frac{2500\sqrt{3} - 1875}{216} \approx 11{,}4$	3
	c	 Die Höhe des Trapezes entspricht der y-Koordinate von A, ist also $f(u)$. Die Länge der Seite $\overline{BC}$ ist 3, die Länge der Seite $\overline{AD}$ ist $5 - 2u$. Somit wird der Flächeninhalt des Trapezes durch $\frac{1}{2} \cdot (3 + 5 - 2u) \cdot f(u)$ angegeben.	5
			25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3		I	I		I		X		
b	3	I		I		I		X		
c	3	II		II		II	II		X	
d	5	II	III	III	II		III			X
2 a	3	I				I		X		
b	3		II			I			X	
c	5		II		II	II			X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.