Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2025

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	AG/LA (A2)	MMS

1 Aufgabe

BE

Ein Partyzelt wird beschrieben durch einen zusammengesetzten Körper bestehend aus einem geraden Prisma und einer geraden Pyramide (vgl. Abbildung 1). Die Grundfläche des Prismas ist ein Achteck. Abbildung 2 zeigt den zusammengesetzten Körper in einem Koordinatensystem.

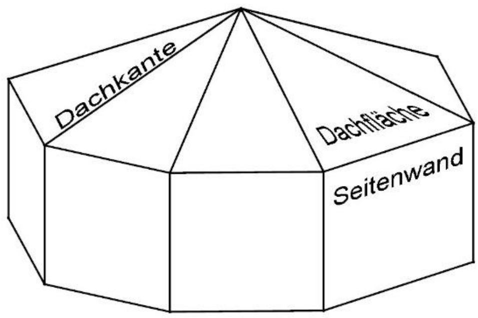


Abb. 1

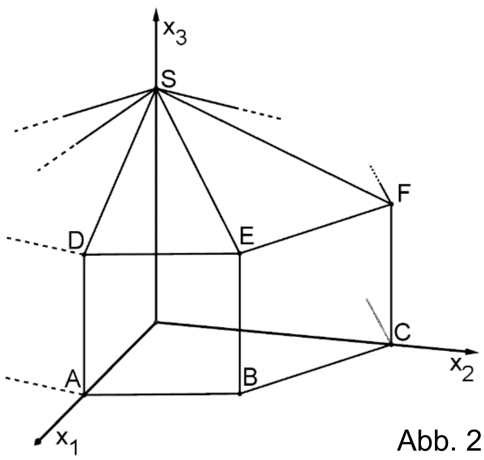


Abb. 2

Die Punkte $A(5|0|0)$, $B(4|3|0)$, $C(0|5|0)$, $D(5|0|3)$, $E(4|3|3)$, $F(0|5|3)$ und $S(0|0|5)$ sind Eckpunkte des zusammengesetzten Körpers. Die x_1x_3-Ebene und die x_2x_3-Ebene des Koordinatensystems sind Symmetrieebenen des zusammengesetzten Körpers. Die x_1x_2-Ebene beschreibt die Horizontale. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.

[1] Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

a Abbildung 3 zeigt einen Teil der Grundfläche des Prismas in der x_1x_2-Ebene. Vervollständigen Sie die Grundfläche in Abbildung 3. 2

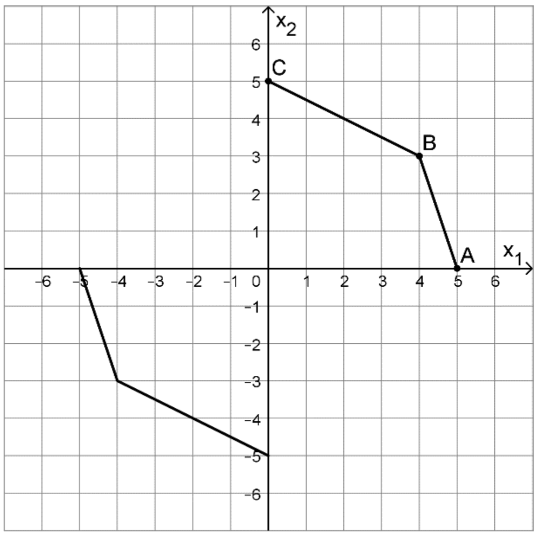


Abb. 3

b An allen acht gleich langen Dachkanten, die in der Spitze des Partyzeltes zusammenlaufen, soll jeweils eine Girlande angebracht werden. Dabei muss jede Girlande 60 cm länger als die zugehörige Dachkante sein. Bestimmen Sie die Gesamtlänge aller Girlanden. 3

c Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, in der das Dreieck EFS liegt, in Koordinatenform. 3

(zur Kontrolle: $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 25$)

d Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels der Dachfläche, die durch das Dreieck EFS beschrieben wird, gegenüber der Horizontalen. 3

e Im Inneren des Partyzelts befindet sich eine gerade Schiene, deren Enden im Modell der Punkt S und der Mittelpunkt $M(2|4|3)$ der Strecke $\overline{EF}$ sind. Ein Strahler bewegt sich entlang der gesamten Schiene und sendet dabei einen Laserstrahl in der Richtung, die durch den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden kann, in den Innenraum des Partyzelts aus. 4

Auf einer Zeltwand befindet sich an einer Stelle ein kleines Loch. Diese Stelle wird durch den Punkt $L(-2|-4|0{,}5)$ beschrieben. Um zu untersuchen, ob durch dieses Loch der Laserstrahl nach außen dringen kann, wird der Lösungsansatz

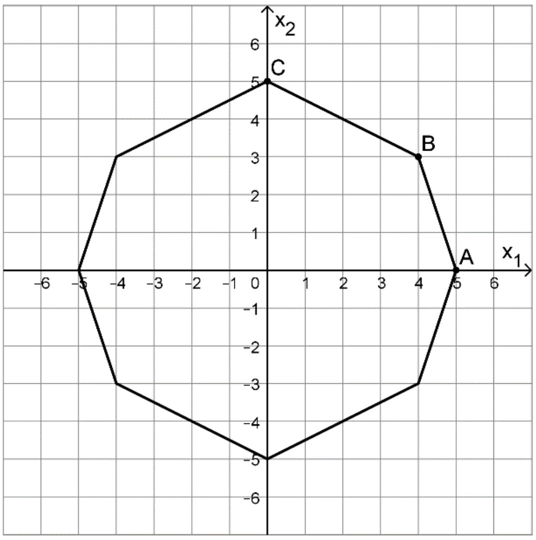
$\overrightarrow{OP_t} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ betrachtet, wobei $\overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $t \in [0;1]$ gilt.

Erläutern Sie die geometrischen Sachverhalte, die diesem Lösungsansatz zugrunde liegen, und deuten Sie diese im Sachzusammenhang.

15

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
a		2
b	$\left\lvert\overrightarrow{DS}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{29}$ $8 \cdot \sqrt{29} + 8 \cdot 0{,}6 \approx 47{,}88$ Die Gesamtlänge beträgt etwa 48 m.	3
c	$\vec{n} \circ \overrightarrow{SE} = 0 \; \wedge \; \vec{n} \circ \overrightarrow{SF} = 0$ liefert für $n_2 = 2$ den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Damit hat die gesuchte Gleichung die Form $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = c$. Da S in der Ebene liegt, gilt $c = 25$.	3
d	$\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right\rvert \cdot \left\lvert\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rvert}$ liefert den Neigungswinkel $\alpha \approx 24{,}1°$.	3
e	Die Positionen des Strahlers entlang der Schiene werden durch die Punkte P_t mit den Ortsvektoren $\overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in [0;1]$ beschrieben. Befindet sich der Strahler an der durch P_t festgelegten Position, dann wird der Laserstrahl durch die Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \overrightarrow{OP_t} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$ beschrieben. Liegt der Punkt L auf dieser Gerade, dann dringt der Laserstrahl durch das Loch nach außen.	4
		15

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2		I		I			X		
b	3	I	I		I	I	I	X		
c	3	I	I			II			X	
d	3			I		II			X	
e	4	II	III	III		II	III			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur", das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.