

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2025

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

1 Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f_a mit $f_a(x) = -3x^2 \cdot e^{a \cdot x}$ gegeben. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

a Abbildung 1 zeigt für einen Wert von a den Graphen von f_a . Dieser verläuft durch den

Punkt $(-4 | -48e^{-2})$. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von a .

b Begründen Sie anhand des Funktionsterms für jeden Wert von a , dass f_a keine positiven Funktionswerte besitzt.

c G_a hat für jeden Wert von a genau zwei Extrempunkte, von denen einer im Koordinatenursprung liegt. Begründen Sie, dass im Koordinatenursprung der Hochpunkt von G_a liegt, und berechnen Sie die x -Koordinate des Tiefpunkts.

(zur Kontrolle: x -Koordinate des Tiefpunkts: $-\frac{2}{a}$)

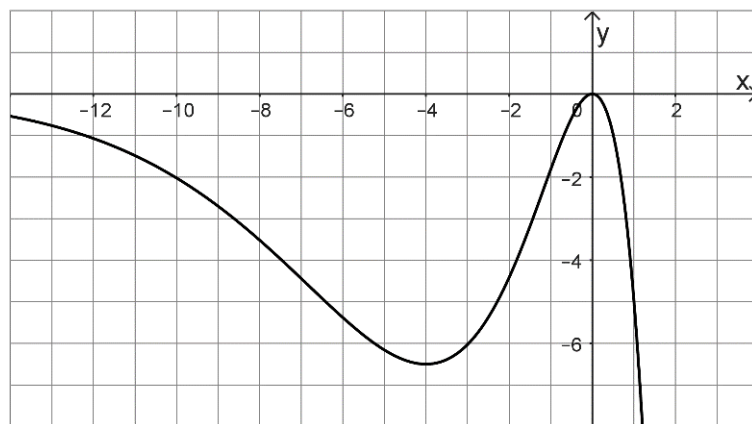


Abb. 1

BE

2

2

5

¹ Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

- d Es gibt einen positiven Wert von a , für den der Tiefpunkt von G_a Eckpunkt eines Quadrats ist, von dem zwei Seiten auf den Koordinatenachsen liegen. Ermitteln Sie diesen Wert von a sowie den Flächeninhalt des zugehörigen Quadrats.

5

2 Auf einem Einfamilienhaus ist eine Photovoltaikanlage installiert.

An einem bestimmten Tag kann die von der Anlage im Zeitraum von 6:00 Uhr bis 20:00 Uhr abgegebene elektrische Leistung durch die in IR definierte Funktion k mit

$$k(x) = 2,4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot (x - 7)\right) + 1$$

beschrieben werden.

Die in diesem Zeitraum im Haus aufgenommene elektrische Leistung kann durch eine in IR definierte Funktion h beschrieben werden. Dabei ist x jeweils die seit

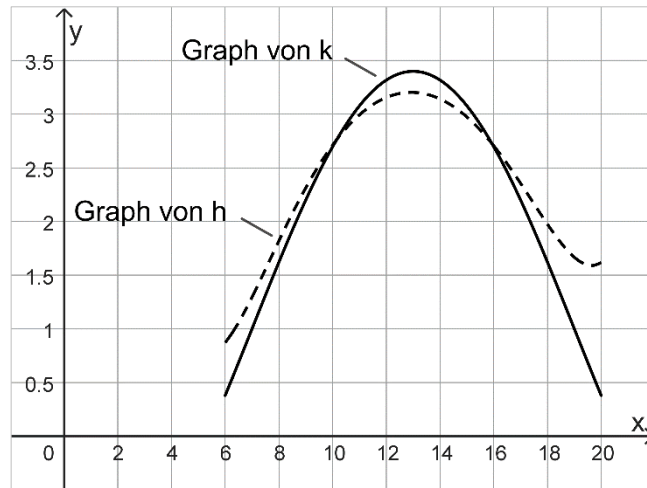


Abb. 2

0:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden, $k(x)$ die von der Photovoltaikanlage abgegebene elektrische Leistung und $h(x)$ die im Haus aufgenommene elektrische Leistung, jeweils in der Einheit Kilowatt (kW).

Abbildung 2 zeigt die zugehörigen Ausschnitte der Graphen von k und h .

- a Um 13:00 Uhr gibt die Photovoltaikanlage die maximale elektrische Leistung ab. Ermitteln Sie rechnerisch einen Zeitpunkt, zu dem die Photovoltaikanlage eine elektrische Leistung abgibt, die 50 % dieser Leistung entspricht; geben Sie die zugehörige Uhrzeit in Stunden und Minuten an.
- b Ermitteln Sie grafisch die Zeitpunkte, zu denen die von der Photovoltaikanlage abgegebene elektrische Leistung genauso groß ist wie die im Haus aufgenommene elektrische Leistung.

5

3

Die in einem bestimmten Zeitraum von der Photovoltaikanlage insgesamt abgegebene bzw. im Haus insgesamt aufgenommene elektrische Energie kann mithilfe des folgenden allgemeinen Zusammenhangs bestimmt werden:

Beschreibt eine Funktion p in einem Zeitraum, der durch ein Intervall $[a; b]$

beschrieben wird, eine elektrische Leistung, so gibt $\int_a^b p(x) dx$ die zugehörige

elektrische Energie an. Wird dabei die Zeit in Stunden und die elektrische Leistung in kW angegeben, so gibt das Integral die elektrische Energie in kWh an.

- c Die in IR definierte Funktion K mit $K(x) = -\frac{144}{5\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot (x - 7)\right) + x$ ist eine Stammfunktion von k . Berechnen Sie die von 6:00 Uhr bis 20:00 Uhr insgesamt von der Photovoltaikanlage abgegebene elektrische Energie.

4

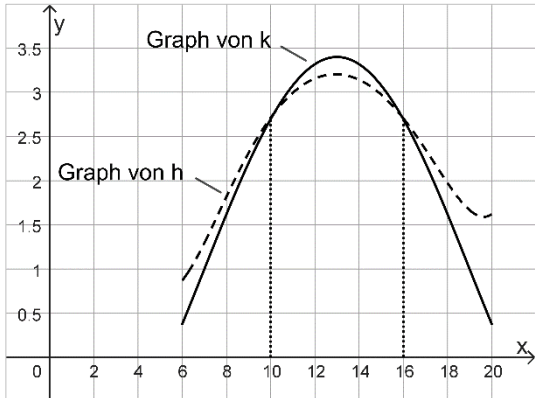
- d Begründen Sie mithilfe von Abbildung 2 die Aussage $\int_6^{20} (k(x) - h(x)) dx < 0$ und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.

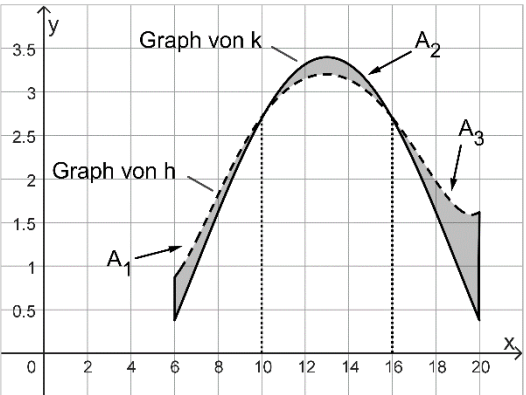
4

30

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	a $-48e^{-2} = -3 \cdot (-4)^2 \cdot e^{-4a} \Leftrightarrow a = 0,5$	2
	b Wegen $x^2 \geq 0$ und $e^{a \cdot x} > 0$ gilt: $f_a(x) = -3x^2 \cdot e^{a \cdot x} \leq 0$	2
	c Da f_a keine positiven Funktionswerte besitzt, liegt im Koordinatenursprung der Hochpunkt. $f'_a(x) = -6x \cdot e^{a \cdot x} - 3x^2 \cdot a \cdot e^{a \cdot x} = -3x \cdot (2 + a \cdot x) \cdot e^{a \cdot x}$ $f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (2 + a \cdot x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{2}{a}$ x-Koordinate des Tiefpunkts: $-\frac{2}{a}$	5
	d Für den gesuchten positiven Wert von a ist $(-\frac{2}{a} -\frac{2}{a})$ der dem Koordinatenursprung gegenüberliegende Eckpunkt des Quadrats. $f(-\frac{2}{a}) = -\frac{2}{a} \Leftrightarrow -3 \cdot \frac{4}{a^2} \cdot e^{-2} = -\frac{2}{a} \Leftrightarrow a = \frac{6}{e^2}$ Flächeninhalt des Quadrats: $\frac{e^2}{3} \cdot \frac{e^2}{3} = \frac{e^4}{9}$	5
2	a $0,5 \cdot k(13) = 1,7$ $k(x) = 1,7 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot (x - 7)\right) = \frac{7}{24}$ Damit ist beispielsweise $\frac{\pi}{12} \cdot (x - 7) \approx 0,296$ und somit $x \approx 8,13$. Uhrzeit: 8:08 Uhr	5
	b  Graph von k Graph von h 10 Uhr und 16 Uhr	3

c	$\int_6^{20} k(x) dx = \left[-\frac{144}{5\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot (x-7)\right) + x \right]_6^{20} = -\frac{144}{5\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) \right) + 14 \approx 31,7$ abgegebene elektrische Energie: etwa 32 kWh	4
d	 Der Flächeninhalt A_2 ist kleiner als die Summe der Flächeninhalte A_1 und A_3. Damit gilt: $\int_6^{20} (k(x) - h(x)) dx = -A_1 + A_2 - A_3 < 0$ Im Zeitraum von 6:00 Uhr bis 20:00 Uhr gibt die Photovoltaikanlage insgesamt weniger elektrische Energie ab als im Haus in diesem Zeitraum insgesamt aufgenommen wird.	4
		30

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2		I			I		X		
b	2	I	I					X		
c	5	II	II			II	II		X	
d	5	III	III		III	II				X
2 a	5		II	II		II			X	
b	3			I	I			X		
c	4			II		II			X	
d	4	III	III	III	II		II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.