

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2025

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

- 1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion
 $f: x \mapsto 5x \cdot e^{-x}$.

Abbildung 1 zeigt den Graphen G von f.

- a G hat genau einen Extrempunkt.
Berechnen Sie die Koordinaten des
Extrempunkts von G.

(zur Kontrolle: $(1 | \frac{5}{e})$)

- b Die Tangente t an G in dessen Wende-
punkt hat die Gleichung $y = -\frac{5}{e^2}x + \frac{20}{e^2}$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Gera-
de, die den Extrempunkt von G enthält
und senkrecht zu t verläuft.

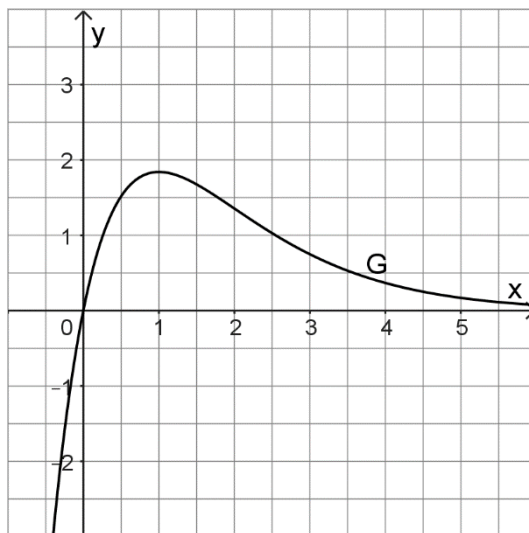


Abb. 1

Betrachtet wird die in $[1; +\infty[$ definierte Funktion h mit $h(x) = f(x)$.

- c Begründen Sie, dass die Funktion f nicht umkehrbar, die Funktion h jedoch um-
kehrbar ist. Geben Sie den Definitions- und den Wertebereich der Umkehrfunktion
von h an.

BE

4

3

6

¹ Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Abbildung 2 zeigt eine Figur, die modellhaft das Wappen eines Sportvereins beschreibt.

Die Begrenzungslinien der Figur werden durch einen Teil der Gerade mit der Gleichung $y = 5$ sowie durch die Kurvenstücke H_1 und H_2 beschrieben:

- ♦ H_1 entsteht, indem G für $x \in [\ln 5; 5]$ an der Gerade mit der Gleichung $y = x$ gespiegelt wird.
- ♦ H_2 entsteht durch Spiegeln von H_1 an der Gerade mit der Gleichung $x = \ln 5$.

Der Punkt $S(\ln 5 | \ln 5)$ ist gemeinsamer Punkt von H_1 und H_2 .

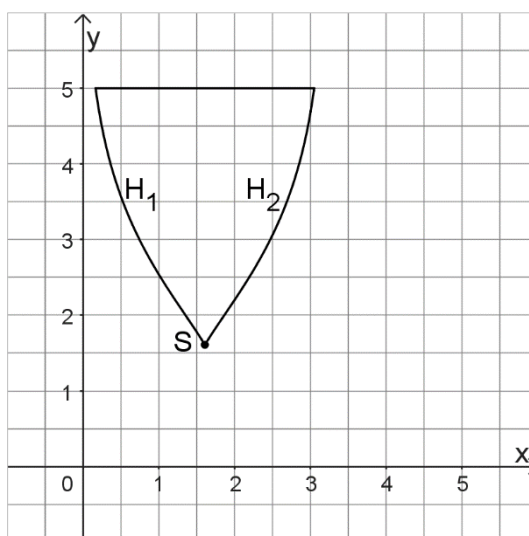


Abb. 2

d Begründen Sie, dass mit dem Term

$$2 \cdot \left((5 - \ln 5) \cdot \ln 5 - \int_{\ln 5}^5 f(x) dx \right)$$

der Flächeninhalt der Figur berechnet werden kann.

- e Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $F: x \mapsto -5(x+1) \cdot e^{-x}$ ist eine Stammfunktion von f . Bestimmen Sie mit dem Term aus Aufgabe 1d den Flächeninhalt der Figur auf Zehntel gerundet.

- 2 Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_k: x \mapsto -5x \cdot e^{-kx}$ mit $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Abbildung 3 zeigt vier Graphen der Schar, die zu den Werten $k = -1$, $k = -0,5$, $k = 0,5$ und $k = 1$ gehören.

- a Der Graph III kann durch Spiegeln von G (vgl. Abbildung 1) an der x-Achse erzeugt werden. Geben Sie den zugehörigen Wert von k sowie die Koordinaten des Tiefpunkts von Graph III an. Ordnen Sie den drei übrigen Werten von k den jeweils passenden Graphen zu.

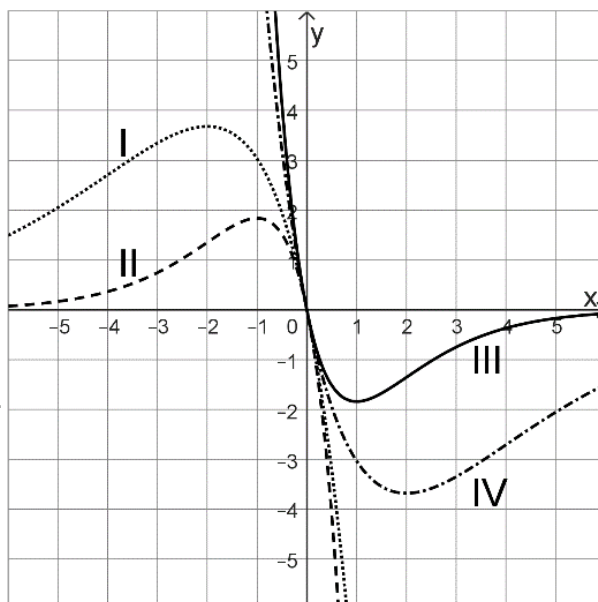
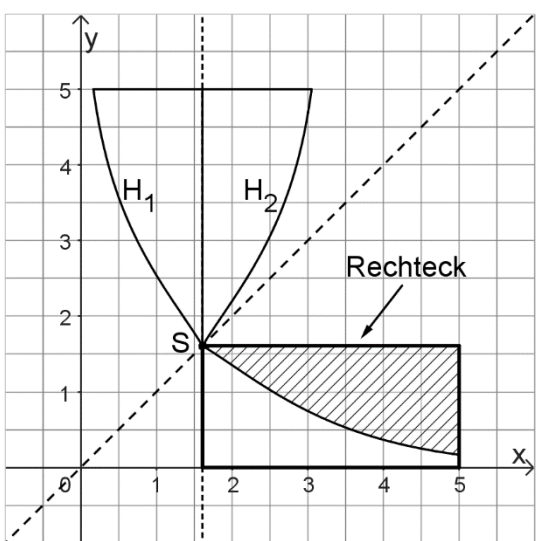


Abb. 3

- b Zeigen Sie, dass $g_k(-x) = -g_{-k}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und interpretieren Sie diese Gleichung mit Blick auf die Graphen der Funktionen g_k und g_{-k} .

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	a $f'(x) = 5e^{-x} + 5x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 5 \cdot (1-x) \cdot e^{-x}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $f(1) = \frac{5}{e}$; Extrempunkt: $(1 \frac{5}{e})$	4
	b Gleichung der Gerade: $y = \frac{e^2}{5} \cdot x + n$ $\frac{5}{e} = \frac{e^2}{5} \cdot 1 + n \Leftrightarrow n = \frac{5}{e} - \frac{e^2}{5}$	3
	c Abbildung 1 ist zu entnehmen, dass es zwei x-Werte gibt, für die $f(x) = 1$ gilt. Daher ist f nicht umkehrbar. Die Funktion h ist umkehrbar, da f nur die Extremstelle 1 besitzt und somit im Intervall $[1; +\infty[$ streng monoton ist. Definitionsbereich der Umkehrfunktion von h: $]0; \frac{5}{e}]$ Wertebereich der Umkehrfunktion von h: $[1; +\infty[$	6
	d Der Wert des Terms $(5 - \ln 5) \cdot \ln 5$ kann als Flächeninhalt eines Rechtecks der Länge $5 - \ln 5$ und der Breite $\ln 5$ gedeutet werden. Der Wert des Terms $\int_{\ln 5}^5 f(x) dx$ entspricht dem Inhalt des Flächenstücks, das G und die Geraden mit den Gleichungen $x = \ln 5$ und $x = 5$ mit der x-Achse einschließen. Subtrahiert man vom Flächeninhalt des Rechtecks den Flächeninhalt des beschriebenen Flächenstücks, so erhält man den Inhalt der schraffierten Fläche. Dieser entspricht dem Flächeninhalt derjenigen Hälfte der Figur, die durch Spiegeln an der Gerade mit der Gleichung $y = x$ aus der schraffierten Fläche hervorgeht.	5
		
	e $2 \cdot ((5 - \ln 5) \cdot \ln 5 - (F(5) - F(\ln 5))) \approx 6,1$	3
2	a Graph III: $k=1$, Koordinaten des Tiefpunkts: $(1 -\frac{5}{e})$ I: $k = -0,5$; II: $k = -1$; IV: $k = 0,5$	5

	b $-g_{-k}(x) = -(-5x \cdot e^{-(k)x}) = -5 \cdot (-x) \cdot e^{-k \cdot (-x)} = g_k(-x)$ Die Graphen der Funktionen g_k und g_{-k} sind zueinander symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.	4
		30

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4					I		X		
b	3		II			II	II		X	
c	6	II	II		I		II		X	
d	5	III			III		II			X
e	3					I		X		
2 a	5		II		I	I	II		X	
b	4	III			III	III				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.