

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2025

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

1 Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$f_a: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - ax + 2a \text{ mit } a \in \mathbb{R}.$$

Abbildung 1 zeigt einen Graphen der Schar.

- a Der abgebildete Graph verläuft durch den Punkt $(0 | 4)$. Begründen Sie, dass es sich um den Graphen von f_2 handelt.
- b Zeigen Sie rechnerisch, dass jeder Graph der Schar genau einen Wendepunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an.
- c Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den $\int_0^2 f_a(x) dx = 0$ gilt.

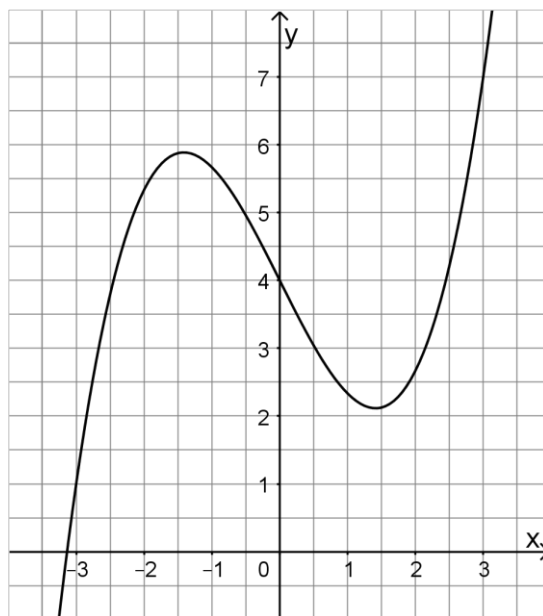


Abb. 1

BE

2

5

4

¹ Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Betrachtet wird im Folgenden die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 2x + 4$. Die Funktion f entspricht der Funktion f_2 der Schar, Abbildung 1 zeigt somit den Graphen G_f von f . Dieser ist symmetrisch bezüglich des Punkts $(0|4)$. Die Tangente an G_f im Punkt $P(3|f(3))$ wird mit t bezeichnet; $y = 7x - 14$ ist eine Gleichung von t .

- d** Zeigen Sie rechnerisch anhand geeigneter Termumformungen, dass $f(x) - (7x - 14) = \frac{1}{3} \cdot (x - 3)^2 \cdot (x + 6)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Begründen Sie mithilfe dieses Zusammenhangs, dass t und G_f neben P genau einen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen.

6

- e** Betrachtet wird die Gleichung $\int_k^{k+1} f(x) dx = 4$ mit $k \in \mathbb{R}$.

4

Für $-1,5 \leq k \leq 1,5$ besitzt diese Gleichung genau eine Lösung. Untersuchen Sie grafisch mithilfe von Abbildung 1, wie viele Lösungen diese Gleichung für $k \geq 1,5$ besitzt.

- 2** Die Länge einer Fahrstrecke, die ein Elektroauto mit vollständig geladener Batterie ohne erneutes Aufladen unter bestimmten Bedingungen zurücklegen kann, wird als Nennreichweite des Elektroautos bezeichnet und ist für jedes Elektroauto ein fester Wert. Die tatsächliche Reichweite hängt von vielen Faktoren ab; im Folgenden wird ausschließlich die Abhängigkeit von der Außentemperatur betrachtet.

Diese Abhängigkeit kann für eine Vielzahl von Elektroautos modellhaft im Intervall $[-12; 36]$ durch eine Funktion r beschrieben werden. Dabei ist x die Außentemperatur in $^{\circ}\text{C}$ und $r(x)$ der Quotient aus der tatsächlichen Reichweite eines Elektroautos und dessen Nennreichweite. Abbildung 2 zeigt den Graphen der Funktion r .

Hat also r beispielsweise für eine bestimmte Außentemperatur den Wert $0,6$, so beträgt die tatsächliche Reichweite eines Elektroautos bei dieser Außentemperatur 60 % seiner Nennreichweite.

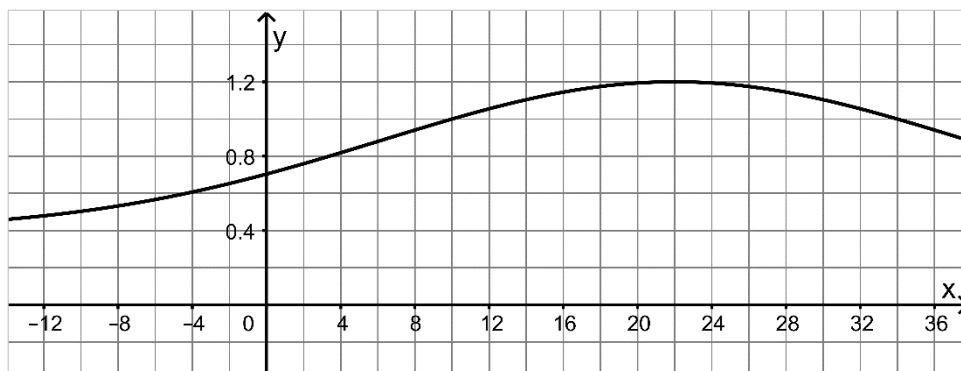


Abb. 2

Im Folgenden werden nur Temperaturen im Bereich von -12°C bis 36°C sowie Elektroautos betrachtet, bei denen der durch die Funktion r beschriebene Zusammenhang gilt.

- a** Geben Sie anhand von Abbildung 2 die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von r an. Beschreiben Sie die Bedeutung des Hochpunkts und seiner Koordinaten im Sachzusammenhang.

4

- b** Die Nennreichweite eines Elektroautos A beträgt 320 km, die Nennreichweite eines Elektroautos B beträgt 500 km. Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 2 eine Außentemperatur, bei der das Elektroauto A dieselbe tatsächliche Reichweite besitzt wie das Elektroauto B bei einer Außentemperatur von 0 °C.

5

30

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a	$f_a(0) = 4 \Leftrightarrow 2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$	2
b	$f'_a(x) = x^2 - a$; $f''_a(x) = 2x$; $f'''_a(x) = 2$ Wegen $f''_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und $f'''_a(0) = 2 \neq 0$ besitzt der Graph von f_a mit $(0 2a)$ genau einen Wendepunkt.	5
c	$\int_0^2 f_a(x) dx = \left[\frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{2} a x^2 + 2a x \right]_0^2 = \frac{4}{3} + 2a$ $\int_0^2 f_a(x) dx = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$	4
d	$f(x) - (7x - 14) = \frac{1}{3} x^3 - 2x + 4 - (7x - 14) = \frac{1}{3} x^3 - 9x + 18$; $\frac{1}{3} \cdot (x - 3)^2 \cdot (x + 6) = \frac{1}{3} \cdot (x^2 - 6x + 9) \cdot (x + 6) = \frac{1}{3} \cdot (x^3 - 6x^2 + 9x + 6x^2 - 36x + 54)$ $= \frac{1}{3} x^3 - 9x + 18$ Begründung: $f(x) = 7x - 14 \Leftrightarrow f(x) - (7x - 14) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot (x - 3)^2 \cdot (x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -6$	6
e	Der Wert des Integrals $\int_k^{k+1} f(x) dx$ entspricht für $k \geq 1,5$ dem Inhalt des Flächenstücks zwischen G_f und der x-Achse im Bereich $k \leq x \leq k + 1$; dieses erstreckt sich also jeweils auf einen Streifen der Breite 1. In Verbindung mit Abbildung 1 ergibt sich: Mit wachsendem Wert von k, beginnend bei $k = 1,5$, wird der Wert des Integrals, der für $k = 1,5$ kleiner als 4 ist, kontinuierlich größer. Da er für $k = 2,5$ bereits größer als 4 ist, gibt es im Bereich $k \geq 1,5$ genau eine Lösung der Gleichung.	4
2 a	$(22 1,2)$ Die größte tatsächliche Reichweite liegt bei einer Außentemperatur von 22 °C vor. Diese beträgt das 1,2-Fache der Nennreichweite.	4

b	$r(x) \cdot 320 \text{ km} = r(0) \cdot 500 \text{ km} \Rightarrow r(x) = r(0) \cdot \frac{500 \text{ km}}{320 \text{ km}} \approx 0,7 \cdot \frac{500 \text{ km}}{320 \text{ km}} \approx 1,1$ $r(14) \approx 1,1$ Mögliche Außentemperatur: etwa 14 °C	5
		30

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2	I				I		X		
b	5	I	I			I		X		
c	4	I				II			X	
d	6	II	II			II			X	
e	4	III	II		III		II			X
2 a	4			II	I		II		X	
b	5		III	II	II		II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.