

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2025

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	MMS

1 Aufgabe

1 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_b : x \mapsto \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-b \cdot x + 4b}$ mit $b \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_b wird mit G_b bezeichnet.

- a Geben Sie das Verhalten von f_b für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow +\infty$ an.
Zeigen Sie, dass der Funktionswert von f_b an der Stelle 4 unabhängig von b ist.
- b Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art der beiden Extrempunkte von G_b .
Berechnen Sie einen Wert von b , für den die beiden Extrempunkte den Abstand 6 haben, und geben Sie diesen Wert auf Hundertstel gerundet an.
- c Begründen Sie, ohne Terme von Stammfunktionen zu bestimmen, dass die folgende Aussage wahr ist:

Der Graph jeder Stammfunktion von f_b hat mit der positiven x -Achse höchstens einen gemeinsamen Punkt.

BE

3

6

3

¹ Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

- 2 Betrachtet wird nun die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $r : x \mapsto \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$. Somit ist r die Funktion $f_{0,25}$ der Schar aus Aufgabe 1. Ihr Graph wird mit G bezeichnet.

Die Konstruktion einer Wasserrutsche, die aus einer Rutschbahn und einem horizontalen Startpodest besteht, wird geplant. Dabei beschreibt G für $-4 \leq x \leq 10$ die Profillinie der Rutschbahn und die x -Achse den horizontalen Boden sowie die Wasseroberfläche (vgl.

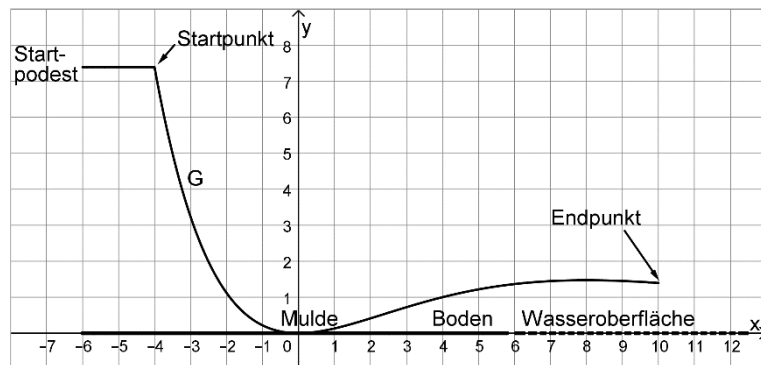


Abb. 1

Abbildung 1). Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht dabei 1 m in der Realität.

- a Berechnen Sie die Höhe des Startpodests über dem Boden und die Höhe des Endpunkts der Rutschbahn über der Wasseroberfläche. 3
- b Betrachtet wird der Winkel β , der im Sachzusammenhang von Bedeutung ist. Mit Hilfe der folgenden beiden Gleichungen kann die Größe des Winkels β ermittelt werden: 4

$$r'(-4) = \tan(\alpha), \quad \alpha \in]-90^\circ; 0^\circ[$$

$$\beta = 180^\circ - |\alpha|$$

Zeichnen Sie die Winkel α und β in Abbildung 1 geeignet ein und geben Sie die Bedeutung von β im Sachzusammenhang an.

- c Da die 1,5 m breite Rutschbahn durch vertikale Wände begrenzt werden soll, kann sich Wasser in der Mulde sammeln. Berechnen Sie das Volumen des Wassers in der Mulde in Litern, wenn es dort an der tiefsten Stelle eine Höhe von 5 cm hat (vgl. Abbildung 2). 6

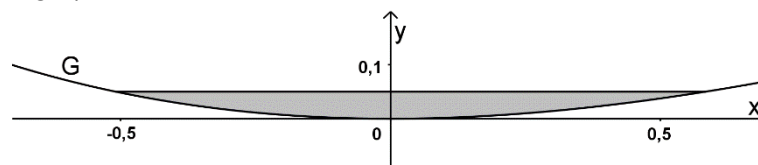


Abb. 2

- d In der folgenden Untersuchung wird erneut nur die Profillinie der Rutschbahn betrachtet. 5

Um die Sicherheit der Badegäste zu erhöhen, soll eine in alle Richtungen drehbare Überwachungskamera angebracht werden, deren Position im Modell durch den Punkt $(12 | 3)$ beschrieben wird. Die Sichtlinie der Kamera in Richtung eines Punktes der Rutschbahn, der durch $(a | r(a))$ mit $-4 \leq a \leq 10$ dargestellt wird,

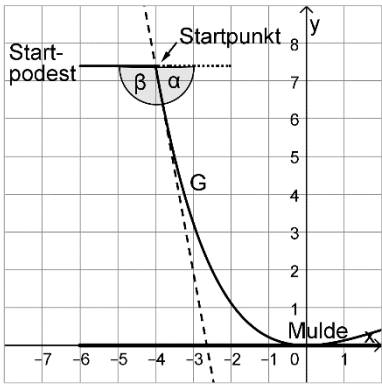
kann durch die Gerade g_a mit der Gleichung $y = \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot x + \left(3 - \frac{3-r(a)}{12-a} \cdot 12\right)$ be-

schrieben werden.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Teil der Rutschbahn, der durch den rechtsgekrümmten Teil von G dargestellt wird, von der Kamera vollständig einsehbar ist.

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_b(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f_b(x) = 0$ $f_b(4) = 1$	3
	b $f'_b(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2}{b}$ $f''_b(0) = \frac{1}{8}e^{4b} > 0; f''_b\left(\frac{2}{b}\right) = -\frac{1}{8}e^{4b-2} < 0$ G_b besitzt den Tiefpunkt $(0 0)$ und den Hochpunkt $\left(\frac{2}{b} \mid \frac{1}{4b^2} \cdot e^{4b-2}\right)$. Die Gleichung $\sqrt{\left(\frac{2}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{4b^2} \cdot e^{4b-2}\right)^2} = 6$ hat b_1 mit $b_1 \approx 0,34$ als Lösung.	6
	c Sei F_b eine Stammfunktion von f_b. Wegen $F'_b(x) = f_b(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}^+$ ist die Funktion F_b für $x \in \mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend, weshalb sie höchstens eine positive Nullstelle besitzen kann.	3
2	a $r(-4) \approx 7,39$, d. h. die Höhe des Startpodests ist etwa 7,39 m. $r(10) \approx 1,39$, d. h. die Höhe des Endpunkts der Rutschbahn ist etwa 1,39 m.	3
	b  Der Winkel β ist der Winkel zwischen Startpodest und Rutschbahn.	4
	c Die Gleichung $r(x) = 0,05$ besitzt für $-4 \leq x \leq 10$ die Lösungen x_1 mit $x_1 \approx -0,51$ und x_2 mit $x_2 \approx 0,58$. $1,5 \cdot \int_{x_1}^{x_2} (0,05 - r(x)) dx \approx 0,054$ Das Volumen des Wassers in der Mulde beträgt etwa 54 Liter.	6
	d Für jede Lösung a der Gleichung $r'(a) = \frac{3-r(a)}{12-a}$ ist g_a eine Tangente an G im Punkt $(a r(a))$, die auch durch den Punkt $(12 3)$ verläuft. Der zur Lösung $a = 4$ der Gleichung gehörende Punkt $(4 r(4))$ liegt wegen $r''(4) = -\frac{1}{16} < 0$ auf dem rechtsgekrümmten Teil von G. Damit beschreiben die auf dem rechtsgekrümmten Teil von G liegenden Punkte $(a r(a))$ mit $a < 4$ einen Bereich der Rutschbahn, der von der Kamera nicht einsehbar ist.	5

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3	I			I	I	I	X		
b	6		II			II			X	
c	3	III	III				II			X
2 a	3			I		I		X		
b	4		II	I	II	II	II		X	
c	6		II	II		II			X	
d	5	III	II	III		II	III			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.