Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2025

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	MMS

1 Aufgabe

	BE
1 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit $$f_k(x) = \frac{1}{2k} \cdot x^2 \cdot (x-2k)^2 \text{ und } k \in \mathbb{R}^+.$$ Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.	
a Begründen Sie, dass f_k für jeden Wert von k genau zwei Nullstellen hat, und geben Sie diese an.	3
b Der Hochpunkt von G_k hat zu den beiden Tiefpunkten von G_k denselben Abstand. Berechnen Sie diesen Abstand.	4
c Betrachtet wird die Fläche, die G_k, die x-Achse und die beiden Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = 1$ einschließen. Sie setzt sich aus mehreren Flächenstücken zusammen. Beurteilen Sie die folgende Aussage, ohne den Wert eines Integrals zu berechnen: *Für jeden Wert von k gibt der Term $\int_{-1}^{1} f_k(x)\,dx$ den Inhalt der betrachteten Fläche an.*	4
d Für jeden Wert von k schließen G_k und der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h_k mit $h_k(x) = \frac{k}{2} \cdot (x-2k)^2$ eine Fläche ein, die sich aus zwei Flächenstücken zusammensetzt. Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist: *Für $k > 3$ ist der Inhalt der Fläche kleiner als k^5.*	5

[1] Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

2 Um Regenwasser zu speichern, wird es kontrolliert in ein unterirdisches Auffangbecken geleitet. Für ein bestimmtes Regenereignis wird die momentane Zuflussrate des Regenwassers in das Auffangbecken durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion r mit $r(x) = e^x \cdot f_{2,5}(x)$ für $0 \leq x \leq 5$ modellhaft beschrieben. Dabei ist x die Zeit in Stunden, die seit Beginn des Zuflusses in das Auffangbecken vergangen ist, und $r(x)$ die momentane Zuflussrate in $\frac{m^3}{h}$ (Kubikmeter pro Stunde). Die Funktion $f_{2,5}$ ist die Funktion der Schar aus Aufgabe 1 mit $k = 2{,}5$.

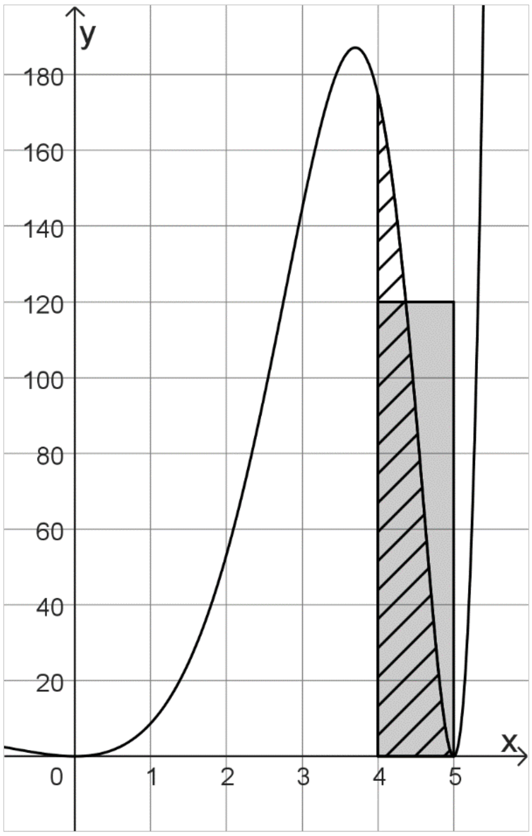
a Berechnen Sie die größte und die kleinste momentane Zuflussrate im betrachteten Zeitraum. 4

b Im Intervall $[0;5]$ besitzt r genau zwei Wendestellen x_0 und x_1. Außerdem gilt $r'(x_0) \approx 100{,}5$ und $r'(x_1) \approx -240{,}2$ sowie $r'(0) = 0$ und $r'(5) = 0$. Beschreiben Sie die Bedeutung des Wertes $r'(x_0)$, die sich aus diesen Informationen ergibt, im Sachzusammenhang. 3

c Die Abbildung zeigt den Graphen von r mit einigen Eintragungen. 4
Erläutern Sie, dass mit diesen Eintragungen die folgende Aussage begründet werden kann:

$$\int_4^5 r(x)\,dx < 120$$

Interpretieren Sie diese Aussage im Sachzusammenhang.



d Zu Beginn des Zuflusses ist das Auffangbecken bereits mit $186\,m^3$ Regenwasser gefüllt. 3
Nach dreieinhalb Stunden wird eine Pumpe eingeschaltet. Diese pumpt bis zum Ende des betrachteten Zeitraums Wasser aus dem Auffangbecken mit einer konstanten Rate ab. Die momentane Zuflussrate des Regenwassers in das Auffangbecken wird dabei weiterhin durch r beschrieben. Geben Sie einen Term an, der das Wasservolumen im Auffangbecken zu einem beliebigen Zeitpunkt nach dem Einschalten der Pumpe in Kubikmetern beschreibt.

30

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	a	0; 2k Wegen $k>0$ gibt es genau zwei Nullstellen.	3
	b	$f_k'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=k \vee x=2k$ $\sqrt{(k-0)^2+(f_k(k)-f_k(0))^2}=\frac{k\cdot\sqrt{k^4+4}}{2}$	4
	c	Der Funktionsterm ist als Produkt von drei Faktoren gegeben, die alle nur nicht negative Werte annehmen: $\frac{1}{2k}>0$, weil $k>0$ ist; x^2 und $(x-2k)^2$ sind quadratische Terme. Folglich gibt es keine Flächenstücke unterhalb der x-Achse, womit die Aussage richtig ist.	4
	d	$f_k(x)=h_k(x) \Leftrightarrow x=-k \vee x=k \vee x=2k$ Flächeninhalt: $\int_{-k}^{k}(h_k(x)-f_k(x))dx+\int_{k}^{2k}(f_k(x)-h_k(x))dx=\frac{29}{10}k^4$ $\frac{29}{10}k^4<k^5$ gilt, wenn $k>\frac{29}{10}$. Daher ist die Aussage für alle $k>3$ richtig.	5
2	a	$r'(x)=0$ liefert $x=0$, $x=\frac{1+\sqrt{41}}{2}$ und $x=5$. Außerdem gilt $r(0)=0$, $r\left(\frac{1+\sqrt{41}}{2}\right)\approx 187$ und $r(5)=0$. Die kleinste momentane Zuflussrate beträgt somit $0\,\frac{m^3}{h}$, die größte etwa $187\,\frac{m^3}{h}$.	4
	b	Die momentane Zuflussrate steigt im betrachteten Zeitraum mit etwa $100{,}5\,\frac{m^3}{h}$ pro Stunde am stärksten zu dem Zeitpunkt an, der durch x_0 beschrieben wird.	3
	c	In der Abbildung hat das Rechteck mit 120 einen größeren Inhalt als die schraffierte Fläche, weil die nicht schraffierte graue Fläche einen größeren Inhalt hat als der Teil der schraffierten Fläche, der nicht zum Rechteck gehört. In der letzten Stunde des betrachteten Zeitraums sind weniger als $120\,m^3$ Regenwasser in das Auffangbecken geflossen.	4
	d	$186+\int_0^x r(t)dt-c\cdot(x-3{,}5)$, wobei c die konstante Entnahmerate der Pumpe in $\frac{m^3}{h}$ beschreibt.	3
			30

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3	I				I		X		
b	4		II			II			X	

c	4	II	II			I	II		X	
d	5	III	II		III	II	II			X
2 a	4		I	I		I		X		
b	3	I	II	II			II		X	
c	4	II	II	II	II		II		X	
d	3		III	III	II	II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur", das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.