

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2025

Aufgaben für das Fach Mathematik

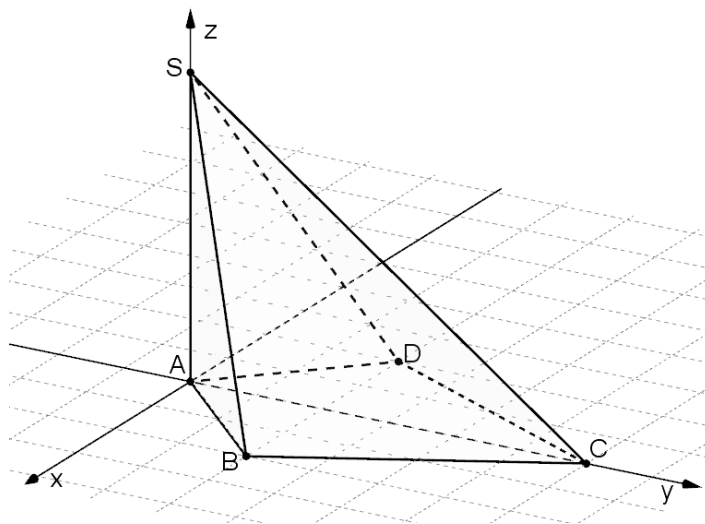
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	WTR

1 Aufgabe

Die Abbildung zeigt die Pyramide ABCDS. Ihre Grundfläche ABCD ist ein Drachenviereck mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(2|2|0)$, $C(0|6|0)$ und $D(-2|2|0)$. Die Spitze der Pyramide liegt im Punkt $S(0|0|6)$.

- a Berechnen Sie die Länge der kürzesten der acht Kanten sowie das Volumen der Pyramide ABCDS.



BE

4

Die Seitenfläche BCS der Pyramide liegt in der Ebene E.

- b Betrachtet werden die Vektoren $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, deren Koordinaten nicht alle gleich null sind.

3

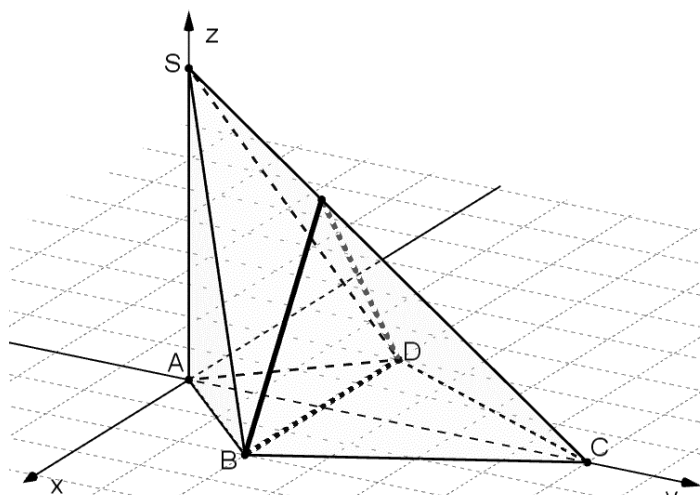
¹ Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Begründen Sie, dass ein solcher Vektor, für den $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ gilt, ein Normalenvektor von E ist.	
c Die Ebene E hat die Gleichung $2x + y + z = 6$. Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den E mit der xy-Ebene einschließt.	3
Gegeben ist die Schar der Ebenen $F_k: k \cdot y + (k - 2) \cdot z = 2k$ mit $k \in]0;3[$. Jede Ebene F_k der Schar schneidet die Pyramide ABCDS in einem Dreieck BDQ_k , wobei der Punkt Q_k auf der Strecke $\overline{SC}$ liegt.	
d Geben Sie eine Gleichung der Ebene F_2 an und zeichnen Sie in die Abbildung die Schnittfigur von F_2 mit der Pyramide ABCDS ein.	4
e Es gibt einen Wert von k, für den der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ_k minimal ist. Ermitteln Sie diesen Wert.	6
20	

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
a kleinste Kantenlänge: $\overline{AB} = \left \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right = 2\sqrt{2}$ Inhalt der Grundfläche der Pyramide: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$ Volumen der Pyramide: $\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 6 = 24$	4
b $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist kollinear zu $\overline{BC}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist kollinear zu $\overline{BS}$. Da die Vektoren $\overline{BC}$ und $\overline{BS}$ die Ebene E aufspannen und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ zu diesen Vektoren senkrecht steht, ist $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E.	3

c	$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ liefert } \alpha \approx 65,9^\circ.$	3
d	Gleichung von F_2: $y = 2$ 	4
e	Der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ_k ist minimal, wenn MQ_k am kleinsten ist, wobei M den Mittelpunkt von $\overline{BD}$ bezeichnet. Die zugehörige Ebene F_k steht in diesem Fall senkrecht zur Kante $\overline{SC}$. Für diesen Wert von k gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k-2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k-2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow k = 6\lambda \wedge k-2 = -6\lambda \Rightarrow k-2 = -k \Rightarrow k=1$	6
		20

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	4		I		I	I		X		
b	3	II	II		I		II		X	
c	3		I		I	II			X	
d	4	II			II	I			X	
e	6	III	III		II	II	III			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.