Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2025

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

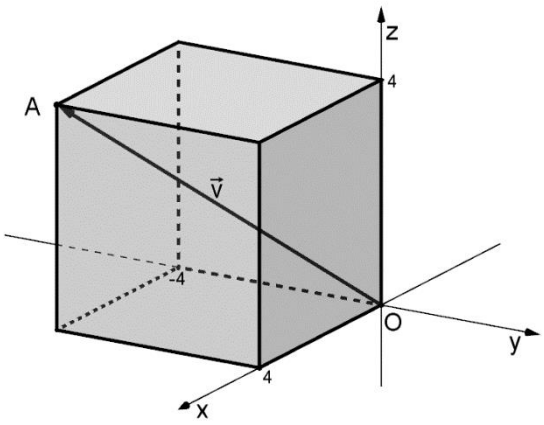
Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A1)	MMS

1 Aufgabe

BE

1 Die Abbildung zeigt einen Würfel, bei dem ein Eckpunkt im Koordinatenursprung liegt und jede Kante parallel zu einer der drei Koordinatenachsen verläuft.

Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist der Verbindungsvektor zwischen den beiden Eckpunkten O und A des Würfels.



a Geben Sie einen Vektor $\vec{u}$ an, der die folgenden drei Eigenschaften hat: 2

- $\vec{u}$ ist Verbindungsvektor zwischen zwei Eckpunkten des Würfels.
- $\vec{u}$ hat die gleiche Länge wie $\vec{v}$.
- $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind nicht kollinear.

b Betrachtet werden alle Dreiecke OAB, wobei B ein weiterer Eckpunkt des Würfels ist. Begründen Sie, dass alle diese Dreiecke kongruent sind. Ermitteln Sie den Flächeninhalt eines dieser Dreiecke. 5

[1] Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

2 In einem zweistufigen Produktionsprozess stellt ein Betrieb aus vier Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 zunächst die drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 her, aus denen dann die drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt werden. Den Tabellen ist zu entnehmen, wie viele Mengeneinheiten (ME) der Zwischenprodukte bzw. der Rohstoffe zur Herstellung von jeweils einer ME der Endprodukte verarbeitet werden.

	E_1	E_2	E_3
Z_1	3	0	0
Z_2	1	4	0
Z_3	0	5	2

	E_1	E_2	E_3
R_1	9	12	0
R_2	3	42	12
R_3	0	20	8
R_4	0	10	4

Für einen Auftrag sollen 10 ME von jedem der drei Endprodukte produziert werden.

a Berechnen Sie, wie viele ME des Rohstoffs R_2 benötigt werden. 2

b Bei diesem Auftrag sollen die gesamten Fertigungskosten für die Zwischenprodukte 1250 Geldeinheiten (GE) betragen. In diesem Zusammenhang wird die folgende Gleichung betrachtet: 6

$$(2z \quad z \quad 2z) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 1250$$

Erläutern Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang. Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung und deuten Sie die Lösung im Sachzusammenhang.

Nach einer Lieferung von Rohstoffen befinden sich 400 ME des Rohstoffs R_3 und 200 ME des Rohstoffs R_4 im Lager. Zudem sind die Rohstoffe R_1 und R_2 in beliebiger Menge verfügbar.
Für einen anderen Auftrag sollen 10 ME des Endprodukts E_2 und 25 ME des Endprodukts E_3 produziert werden. Für diesen Auftrag soll der komplette Lagerbestand der Rohstoffe R_3 und R_4 aufgebraucht werden und der Anteil des Rohstoffs R_1 unter allen vier Rohstoffen 25 % betragen.

c Ermitteln Sie die Anzahl von ME des Endprodukts E_1 dieses Auftrags. 5

20

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$	2

	b	Die betrachteten Dreiecke sind kongruent, da deren Seiten stets die Raumdiagonale $\overline{OA}$, eine Flächendiagonale und eine Kante des Würfels sind. Das Dreieck OAB mit $B(4\,|\,-4\,|\,0)$ hat bei B einen rechten Winkel. Kantenlänge des Würfels: 4 Flächeninhalt des Dreiecks: $\frac{1}{2}\cdot\left\|\overrightarrow{OB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 8\sqrt{2}$	5
2	**a**	$\begin{pmatrix}3 & 42 & 12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} = 570$ Für den Auftrag werden 570 ME von R_2 benötigt.	2
	b	Werden je 10 ME aller drei Endprodukte produziert, so ist $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\1 & 4 & 0\\0 & 5 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}30\\50\\70\end{pmatrix}$ der Vektor der Anzahlen von ME der Zwischenprodukte. Die Summe der Fertigungskosten der drei Zwischenprodukte beträgt 1250 GE, wobei die Fertigungskosten (pro ME) für die Zwischenprodukte Z_1 und Z_3 jeweils doppelt so hoch wie die Fertigungskosten z in GE (pro ME) für das Zwischenprodukt Z_2 sind. $\begin{pmatrix}2z & z & 2z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\1 & 4 & 0\\0 & 5 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} = 1250 \Leftrightarrow z = 5$ Die für den Auftrag anfallenden Fertigungskosten für eine ME von Z_2 betragen 5 GE.	6
	c	r_1: Anzahl der ME von R_1; r_2: Anzahl der ME von R_2; e_1: Anzahl der ME von E_1 $\begin{pmatrix}9 & 12 & 0\\3 & 42 & 12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e_1\\10\\25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix} \Rightarrow r_1 = 9\cdot e_1 + 120 \wedge r_2 = 3\cdot e_1 + 720$ Da die im Lager befindlichen 400 ME des Rohstoffs R_3 und 200 ME des Rohstoffs R_4 vollständig aufgebraucht werden, ist der Anteil des Rohstoffs R_1 unter allen vier Rohstoffen gegeben durch $\frac{r_1}{r_1 + r_2 + 600}$. $\frac{9e_1+120}{12e_1+1440} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow e_1 = 40$	5
			20

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2				I	I	I	X		
b	5	II	II		II	I	II		X	

2 a	2			I	I	I		X		
b	6	I	I	II	I	II	II		X	
c	5	II	III	III		II	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.