

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2024

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{1000} \cdot x^4 - \frac{8}{100} \cdot x^3 + \frac{6}{10} \cdot x^2$.

Abbildung 1 zeigt den Graphen von f sowie den Punkt $P(0 | -\frac{5}{8})$.

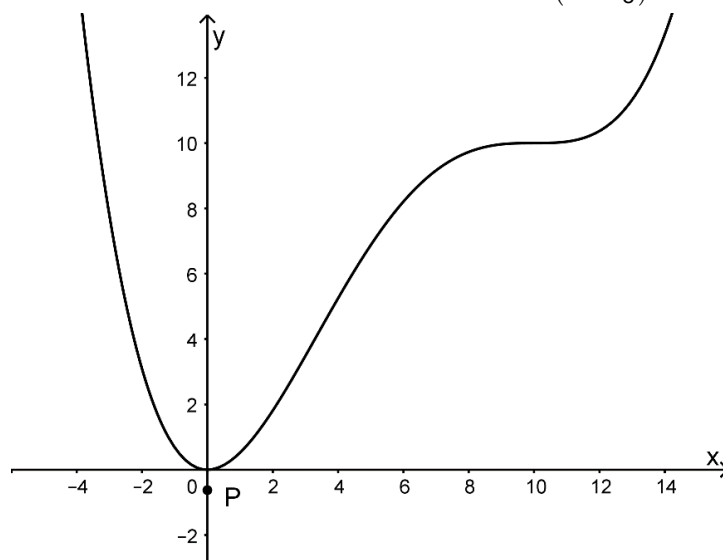


Abb. 1

a Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen von f an. Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von f keine weiteren Extrempunkte besitzt.

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(5 | f(5))$ wird mit t bezeichnet.

BE

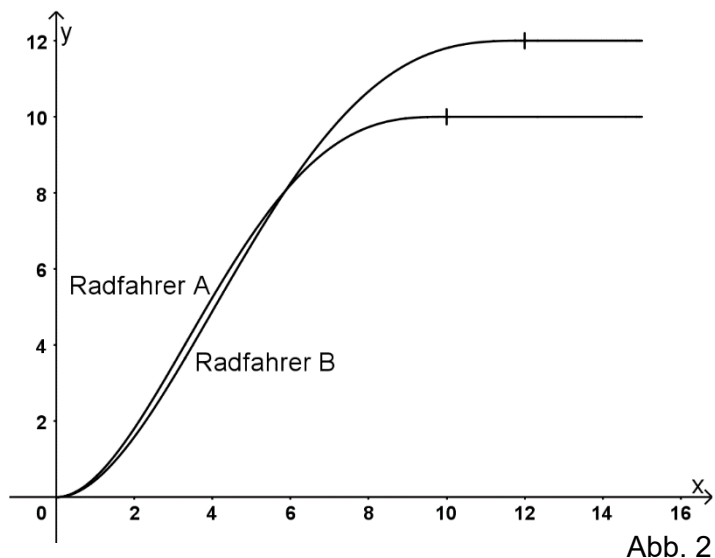
6

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

- b** Ermitteln Sie eine Gleichung von t . 4
- c** Skizzieren Sie in Abbildung 1 zwei von t verschiedene Tangenten an den Graphen von f , die die y -Achse im Punkt P schneiden und deren Steigungen unterschiedliche Vorzeichen haben. 3
- d** Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g kann aus dem Graphen von f erzeugt werden. Der Punkt $(12|12)$ des Graphen von g wird dabei aus dem Punkt $(10|10)$ des Graphen von f erzeugt und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g(x) = a \cdot f(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$. 4
- Geben Sie in diesem Zusammenhang die Bedeutung von a und b an und berechnen Sie die Werte von a und b .

- 2** Zwei Radfahrer starten gleichzeitig nebeneinander auf einer geradlinigen Bahn aus einer Ruheposition. Radfahrer A beschleunigt 10 Sekunden lang und fährt danach mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Radfahrer B beschleunigt 12 Sekunden lang und fährt dann mit konstanter Geschwindigkeit weiter.

Abbildung 2 stellt die Geschwindigkeitsverläufe der beiden Radfahrer in den ersten 15 Sekunden nach dem Start dar. Dabei wird der Geschwindigkeitsverlauf von Radfahrer A in den ersten 10 Sekunden nach dem Start durch die Funktion f aus Aufgabe 1 beschrieben. Der Geschwindigkeitsverlauf von Radfahrer B wird in den ersten 12 Sekunden nach dem Start durch eine Funktion h beschrieben.



Dabei ist x die seit dem Start vergangene Zeit in Sekunden und $f(x)$ bzw. $h(x)$ die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde.

- a** Berechnen Sie die Geschwindigkeit von Radfahrer A drei Sekunden nach dem Start. 2
- Nach dem Start gibt es genau einen Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeiten beider Radfahrer gleich groß sind. Im Modell wird dieser Zeitpunkt mit x_s bezeichnet.
- b** Ermitteln Sie x_s mithilfe von Abbildung 2 und geben Sie den Zeitraum an, in dem die Geschwindigkeit von Radfahrer A größer ist als die Geschwindigkeit von Radfahrer B. 3

- c Im Folgenden ist ein Lösungsweg für eine Aufgabe im gegebenen Sachzusammenhang dargestellt. Geben Sie die Bedeutung von $d(x)$ für $0 < x < x_s$ im Sachzusammenhang an und interpretieren Sie das Ergebnis 0,37.

$$d(x) = f(x) - h(x)$$

$$d'(x) = 0 \text{ hat für } 0 < x < x_s \text{ nur die Lösung } x_1 \approx 3,64.$$

$$d''(x_1) \approx -0,13 < 0$$

$$d(x_1) \approx 0,37$$

- d Berechnen Sie die Länge der Strecke, die Radfahrer A in den ersten 15 Sekunden nach dem Start zurücklegt.

- e Es gibt ein z mit $0 < z < 10$, für das gilt:

$$\int_0^z (f(x) - h(x)) dx = 0$$

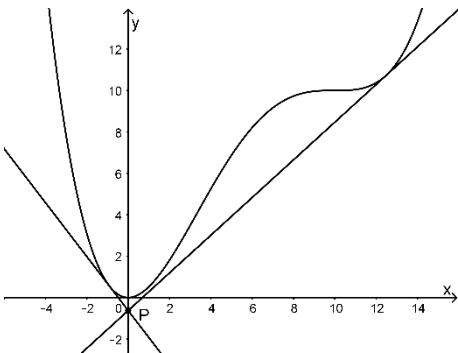
Geben Sie die Bedeutung von z im Sachzusammenhang an und begründen Sie im Sachzusammenhang, dass $z > x_s$ gilt.

35

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a	$T(0 0)$ $f'(x) = \frac{12}{1000} \cdot x^3 - \frac{24}{100} \cdot x^2 + \frac{12}{10} \cdot x$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 20x + 100) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - 10)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 10$ Nur bei 0 und 10 können Extrempunkte vorliegen. An der Stelle 10 ändert sich das Vorzeichen von $f'(x)$ nicht; somit besitzt der Graph von f keine weiteren Extrempunkte.	6
b	$f'(5) = \frac{3}{2}$ $\frac{55}{8} = \frac{3}{2} \cdot 5 + n \Leftrightarrow n = -\frac{5}{8}$ $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}$	4

c		3
d	Der Graph von g wird durch Streckung in y-Richtung mit dem Faktor a und durch Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ aus dem Graphen von f erzeugt. $g(12) = a \cdot f(10) \Leftrightarrow 12 = a \cdot 10 \Leftrightarrow a = \frac{6}{5}$ $\frac{1}{b} \cdot 10 = 12 \Leftrightarrow b = \frac{5}{6}$	4
2 a	$f(3) = 3,483$, d. h. drei Sekunden nach dem Start beträgt die Geschwindigkeit von Radfahrer A etwa $3,5 \frac{m}{s}$.	2
b	$x_s \approx 6$ Zeitraum: Vom Zeitpunkt des Starts bis zum Zeitpunkt x_s Sekunden nach dem Start	3
c	$d(x)$ gibt für den Zeitpunkt x Sekunden nach dem Start an, um wie viele Meter pro Sekunde Radfahrer A schneller ist als Radfahrer B. Der größte Unterschied der Geschwindigkeiten innerhalb der ersten x_s Sekunden nach dem Start beträgt etwa $0,37 \frac{m}{s}$.	4
d	$\int_0^{10} f(x) dx = \left[\frac{3}{5000} x^5 - \frac{1}{50} x^4 + \frac{1}{5} x^3 \right]_0^{10} = 60 - 200 + 200 = 60$ $60 + 10 \cdot 5 = 110$ Die Länge der zurückgelegten Strecke beträgt 110 m.	6
e	Zum Zeitpunkt, der im Modell durch z angegeben ist, haben beide Radfahrer die gleiche Strecke zurückgelegt. Es gilt $z > x_s$, da sich Radfahrer A in den ersten x_s Sekunden nach dem Start stets vor Radfahrer B befindet.	3
		35

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	6	II			I	II			X	
b	4					I		X		
c	3				I			X		

d	4		III		III		II			X
2 a	2			I		I		X		
b	3		I	I	I		I	X		
c	4	II	II	II			II		X	
d	6		II	II		II			X	
e	3	III	II	III	II		II			X

Anzahl ² der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
12	16	7

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster³ vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Die Ermittlung der Anzahlen erfolgt ausschließlich auf der Grundlage der Spalten „BE“ und „Anforderungsbereich“ in der vorhergehenden Tabelle.

Bei jeder Aufgabe zum Prüfungsteil B liegen die Anzahlen der Bewertungseinheiten – abhängig vom Anforderungsniveau – in den Bereichen, die der folgenden Tabelle zu entnehmen sind:

Anforderungsniveau	erhöht			grundlegend		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III
Anzahl der BE	8 - 10	17 - 21	11 - 13	10 - 12	14 - 18	7 - 9

³ Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.