

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2024

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

- 1 Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot (x^2 - 1) \cdot e^x$.

- a Zeigen Sie, dass für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt:

$$f'(x) = 2 \cdot (x^2 + 2x - 1) \cdot e^x$$

- b Weisen Sie nach, dass f genau zwei Nullstellen hat und dass diese -1 und 1 sind. Berechnen Sie die x -Koordinate des Tiefpunkts des Graphen von f .

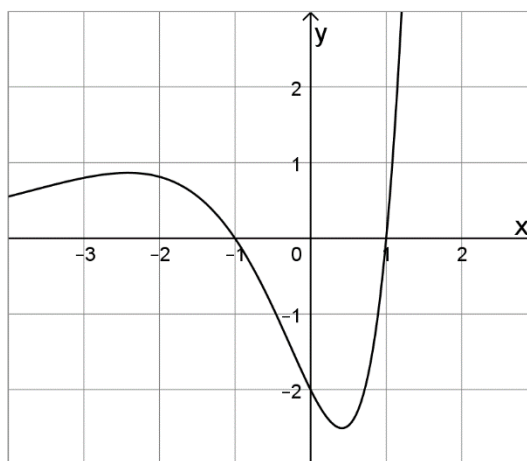


Abb. 1

(zur Kontrolle: x -Koordinate des Tiefpunkts: $-1 + \sqrt{2}$)

- c Begründen Sie mithilfe der Abbildung 1, dass es eine Zahl $b > 1$ gibt, für die

$$\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^b f(x) dx = 0 \text{ gilt.}$$

Für jeden Wert $k \in \mathbb{R}^+$ wird die Funktion h_k mit $h_k(x) = k \cdot (x^2 - 1) \cdot e^x$ und $x \in \mathbb{R}$ betrachtet. Damit entspricht die Funktion h_2 der Funktion f , deren Graph in Abbildung 1 dargestellt ist.

BE

2

6

3

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

- d Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Graph von h_1 einen Tiefpunkt besitzt, der im gleichen Quadranten wie der Tiefpunkt des Graphen von h_2 liegt. Skizzieren Sie den Graphen von h_1 in der Abbildung 1.

4

Die Funktion H_k mit $H_k(x) = k \cdot (x^2 - 2x + 1) \cdot e^x$ und $x \in \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von h_k .

- e Für jeden Wert von k schließen der Graph von h_k und die x -Achse ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie denjenigen Wert von k , für den das Flächenstück den Inhalt 1 hat.

5

- f Die Funktion h_2 besitzt zwei Stammfunktionen, deren Graphen jeweils in einem Punkt die x -Achse als Tangente haben. Ermitteln Sie jeweils einen Term dieser Stammfunktionen.

4

- 2 Zur Bestimmung der Wasserqualität eines Gewässers wurde über einen Zeitraum von 40 Jahren der Zusammenhang zwischen der Phosphorkonzentration und der Algenkonzentration in dem Gewässer untersucht.

Die zeitliche Entwicklung der Phosphorkonzentration kann modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion p und die zeitliche Entwicklung der zugehörigen Algenkonzentration durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion a beschrieben werden. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Jahren, $p(t)$ die Phosphorkonzentration in $\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$ und $a(t)$

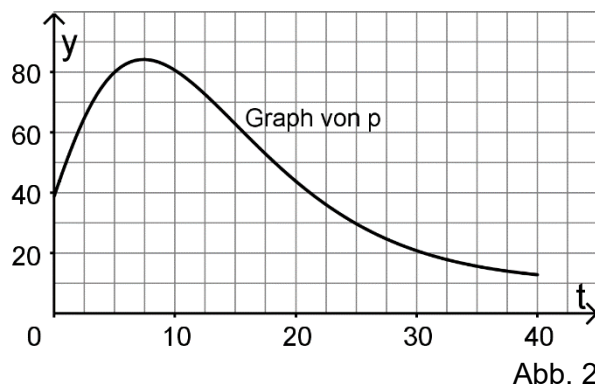


Abb. 2

die Algenkonzentration in $\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$.

Für $0 \leq t \leq 40$ zeigt die Abbildung 2 den Graphen von p , die Abbildung 3 den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von a .

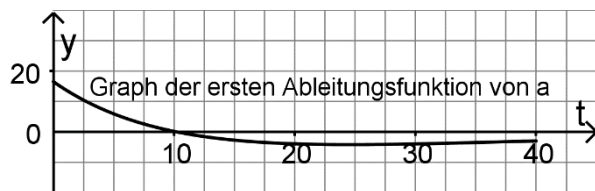


Abb. 3

- a Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem die Phosphorkonzentration $30 \frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$ beträgt.
- b Der Graph von p besitzt für $t \geq 10$ einen Wendepunkt. Beschreiben Sie die Bedeutung dieses Wendepunkts für die Entwicklung der Phosphorkonzentration im Gewässer.
- c Beurteilen Sie anhand der Abbildungen 2 und 3 die folgende Aussage:
Ab dem Zeitpunkt, ab dem sich die Phosphorkonzentration verringert, verringert sich auch die Algenkonzentration.
- d Zehn Jahre nach Beobachtungsbeginn beträgt die Algenkonzentration $100 \frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$.
 Bestimmen Sie die Algenkonzentration zu Beobachtungsbeginn. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung 3.

2

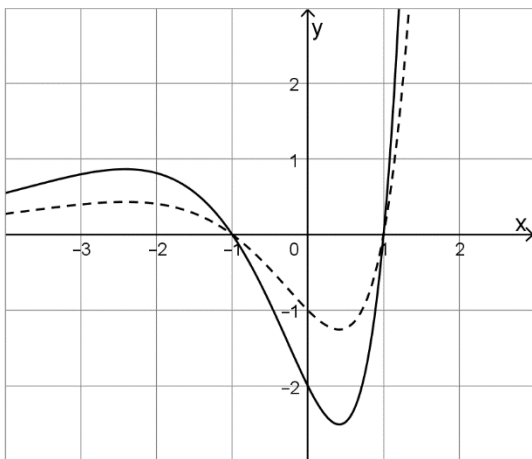
2

3

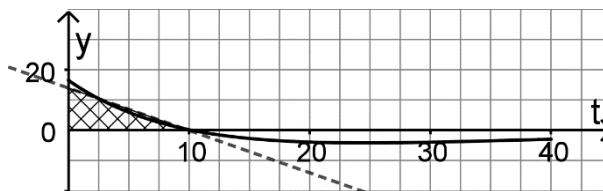
4

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	a $f'(x) = 2 \cdot (x^2 - 1) \cdot e^x + 2 \cdot 2x \cdot e^x = 2 \cdot (x^2 + 2x - 1) \cdot e^x$	2
	b Wegen $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$. Für $x > 0$ gilt: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{2}$	6
	c Die Funktionswerte von f sind für $-1 < x < 1$ negativ und für $x > 1$ positiv. Damit ist $\int_{-1}^1 f(x) dx < 0$ und $\int_1^b f(x) dx > 0$. Für $x > 1$ ist f streng monoton zunehmend. Also gibt es eine Zahl b, für die $\int_1^b f(x) dx = -\int_{-1}^1 f(x) dx$ gilt.	3
	d Der Graph von h_1 geht aus dem Graphen von h_2 durch Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung hervor. 	4
	e Die Nullstellen von h_k sind -1 und 1. $\int_{-1}^1 h_k(x) dx = k \cdot \left[(x^2 - 2x + 1) \cdot e^x \right]_{-1}^1 = -\frac{4k}{e}$ Da das Flächenstück den Inhalt 1 hat, gilt $\frac{4k}{e} = 1$ und somit $k = \frac{e}{4}$.	5
	f Die Terme aller Stammfunktionen von h_2 lassen sich durch $H_2(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ darstellen. $H_2(-1) + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{8}{e}$, $H_2(1) + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$	4
2	a Etwa 25 Jahre nach Beobachtungsbeginn beträgt die Phosphorkonzentration $30 \frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$.	2
	b Die t-Koordinate des Wendepunkts gibt den Zeitpunkt an, zu dem die Phosphorkonzentration des Gewässers innerhalb des Beobachtungszeitraums am stärksten abnimmt.	2
	c Die Aussage ist falsch.	3

	Begründung: Zu dem Zeitpunkt, ab dem die Phosphorkonzentration abnimmt, ist die momentane Änderungsrate der Algenkonzentration positiv.	
d	Der Inhalt der Fläche, die der Graph der ersten Ableitungsfunktion von a mit der t-Achse im Bereich $0 \leq t \leq 10$ einschließt, entspricht in etwa dem Inhalt der Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten der Länge 10 und 14. Wegen $100 - \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 10 = 30$ beträgt die Algenkonzentration zu Beobachtungsbeginn etwa $30 \frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$.	4
		35



3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2					I		X		
b	6	I				I		X		
c	3	II	II			II	II		X	
d	4	II	I		II		I		X	
e	5		II		II	II			X	
f	4		III		II	II	III			X
2 a	2			I	I			X		
b	2	II		II	II		II		X	
c	3	II		II	II				X	
d	4		III	III	II		II			X

Anzahl ² der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
10	17	8

² Die Ermittlung der Anzahlen erfolgt ausschließlich auf der Grundlage der Spalten „BE“ und „Anforderungsbereich“ in der vorhergehenden Tabelle.

Bei jeder Aufgabe zum Prüfungsteil B liegen die Anzahlen der Bewertungseinheiten – abhängig vom Anforderungsniveau – in den Bereichen, die der folgenden Tabelle zu entnehmen sind:

Anforderungsniveau	erhöht			grundlegend		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III
Anzahl der BE	8 - 10	17 - 21	11 - 13	10 - 12	14 - 18	7 - 9

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster³ vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

³ Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.