

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2024

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	MMS

1 Aufgabe

- 1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{1000} \cdot x^4 - \frac{8}{100} \cdot x^3 + \frac{6}{10} \cdot x^2$.
Abbildung 1 zeigt den Graphen von f sowie den Punkt $P(0 | -\frac{5}{8})$.

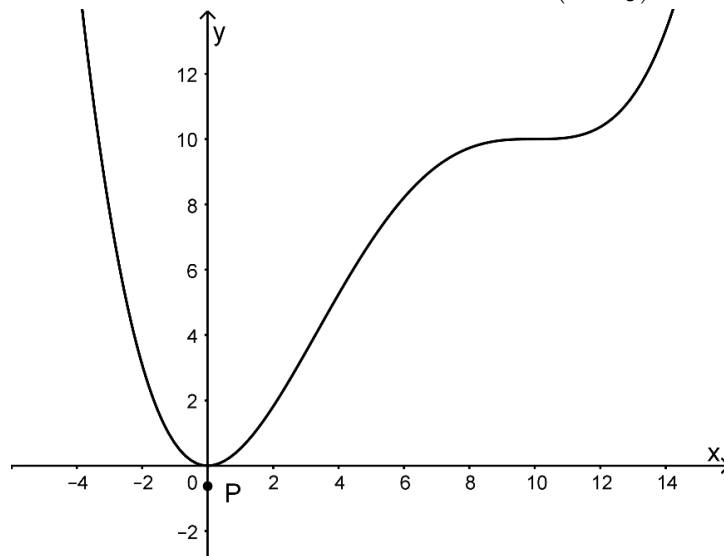


Abb. 1

- a Der Graph von f besitzt den Tiefpunkt $(0 | 0)$. Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von f keine weiteren Extrempunkte besitzt.

Die Gerade durch die Punkte P und $Q(-\frac{1}{4} | -1)$ wird mit t bezeichnet.

BE

3

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

- b** Ermitteln Sie eine Gleichung von t und weisen Sie rechnerisch nach, dass t die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(5 | f(5))$ ist.

(zur Kontrolle: Gleichung von t : $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}$)

- c** Der Graph von f und die Tangente t schließen eine Fläche ein, die aus zwei Flächenstücken besteht. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

- d** Skizzieren Sie in Abbildung 1 zwei von t verschiedene Tangenten an den Graphen von f , die die y -Achse im Punkt P schneiden und deren Steigungen unterschiedliche Vorzeichen haben.

- e** Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g kann aus dem Graphen von f erzeugt werden. Der Punkt $(12 | 12)$ des Graphen von g wird dabei aus dem Punkt $(10 | 10)$ des Graphen von f erzeugt und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g(x) = a \cdot f(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Geben Sie in diesem Zusammenhang die Bedeutung von a und b an und berechnen Sie die Werte von a und b .

- 2** Zwei Radfahrer starten gleichzeitig nebeneinander auf einer geradlinigen Bahn aus einer Ruheposition. Radfahrer A beschleunigt 10 Sekunden lang und fährt danach mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Radfahrer B beschleunigt 12 Sekunden lang und fährt dann mit konstanter Geschwindigkeit weiter.

Abbildung 2 stellt die Geschwindigkeitsverläufe der beiden Radfahrer in den ersten 15 Sekunden nach dem Start dar. Dabei wird der Geschwindigkeitsverlauf von Radfahrer A in den ersten 10 Sekunden nach dem Start durch die Funktion f aus Aufgabe 1 beschrieben. Der Geschwindigkeitsverlauf von Radfahrer B wird in den ersten 12 Sekunden nach dem Start durch die in $\mathbb{R}$

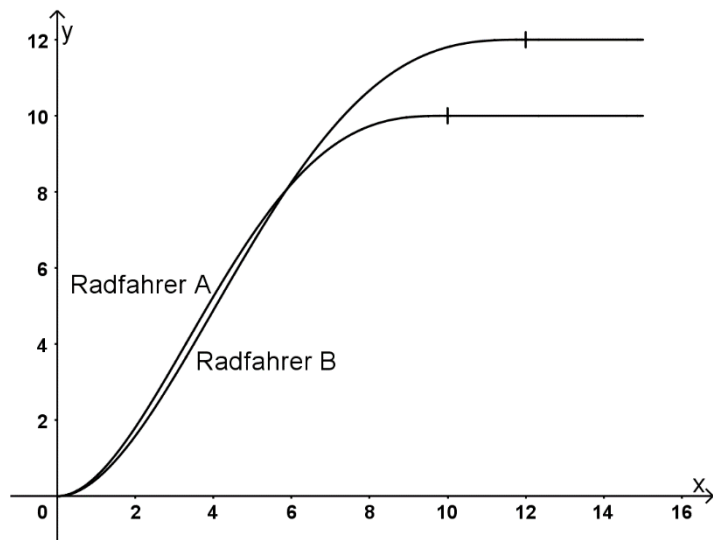


Abb. 2

definierte Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{576} \cdot x^4 - \frac{1}{18} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2$ beschrieben. Dabei ist x die seit dem Start vergangene Zeit in Sekunden und $f(x)$ bzw. $h(x)$ die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde.

- a** Berechnen Sie die Geschwindigkeit von Radfahrer A drei Sekunden nach dem Start sowie den Zeitpunkt, zu dem er eine Geschwindigkeit von 8 Meter pro Sekunde erreicht.

- b** Ermitteln Sie die konstante Geschwindigkeit, mit der sich Radfahrer B ab dem Zeitpunkt 12 Sekunden nach dem Start bewegt.

Zeigen Sie durch Rechnung, dass der zum Radfahrer B gehörende Graph in Abbildung 2 an der Stelle 12 keinen Knick aufweist.

Nach dem Start gibt es genau einen Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeiten beider Radfahrer gleich groß sind. Im Modell wird dieser Zeitpunkt mit x_s bezeichnet.

c Bestimmen Sie rechnerisch x_s .

2

d Im Folgenden ist ein Lösungsweg für eine Aufgabe im gegebenen Sachzusammenhang dargestellt. Geben Sie die Bedeutung von $d(x)$ für $0 < x < x_s$ im Sachzusammenhang an und interpretieren Sie das Ergebnis 0,37.

4

$$d(x) = f(x) - h(x)$$

$$d'(x) = 0 \text{ hat für } 0 < x < x_s \text{ nur die Lösung } x_1 \approx 3,64.$$

$$d''(x_1) \approx -0,13 < 0$$

$$d(x_1) \approx 0,37$$

e Es gibt genau einen Zeitpunkt in den ersten 10 Sekunden nach dem Start, zu dem einer der beiden Radfahrer den anderen überholt. Berechnen Sie, um wieviel Prozent die Geschwindigkeit des schnelleren Radfahrers die Geschwindigkeit des langsameren Radfahrers zum Zeitpunkt des Überholens übersteigt.

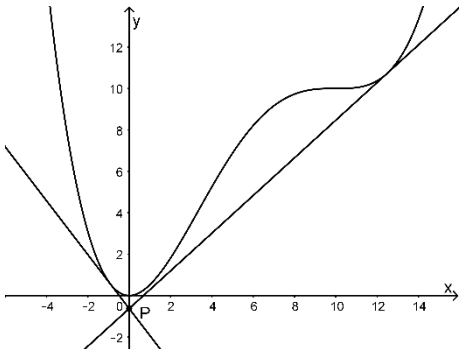
4

35

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 10$ Nur bei 0 und 10 können Extrempunkte vorliegen. $f''(10) = 0$, $f'''(10) = \frac{6}{25} \neq 0$ Somit besitzt der Graph von f keine weiteren Extrempunkte.	3
	b Gleichung von t: $y = mx - \frac{5}{8}$ $-1 = -\frac{1}{4}m - \frac{5}{8} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ Nachweis: $f'(5) = \frac{3}{2}$; $f(5) = \frac{3}{2} \cdot 5 - \frac{5}{8}$	4
	c Die Gleichung $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}$ hat die drei Lösungen $x_a = \frac{25-5\sqrt{22}}{3}$, $x_b = 5$ und $x_c = \frac{25+5\sqrt{22}}{3}$. Inhalt der Fläche: $\int_{x_a}^{x_c} \left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{8} - f(x) \right) dx = \frac{770}{81} \sqrt{22}$	5

d		3
e	Der Graph von g wird durch Streckung in y-Richtung mit dem Faktor a und durch Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ aus dem Graphen von f erzeugt. $g(12) = a \cdot f(10) \Leftrightarrow a = \frac{6}{5}$ $\frac{1}{b} \cdot 10 = 12 \Leftrightarrow b = \frac{5}{6}$	4
2 a	$f(3) = 3,483$, d. h. drei Sekunden nach dem Start beträgt die Geschwindigkeit von Radfahrer A etwa $3,5 \frac{m}{s}$. $f(x) = 8$ hat im betrachteten Zeitraum die Lösung $x \approx 5,82$, d. h. etwa 5,8 Sekunden nach dem Start erreicht der Radfahrer eine Geschwindigkeit von $8 \frac{m}{s}$.	3
b	$h(12) = 12$, d. h. die konstante Geschwindigkeit beträgt $12 \frac{m}{s}$. $h'(12) = 0$	3
c	$f(x) = h(x)$ hat für $0 < x < 10$ die Lösung $x_s = \frac{880 - 20\sqrt{298}}{91} \approx 5,88$.	2
d	$d(x)$ gibt für den Zeitpunkt x Sekunden nach dem Start an, um wie viele Meter pro Sekunde Radfahrer A schneller ist als Radfahrer B. Der größte Unterschied der Geschwindigkeiten innerhalb der ersten x_s Sekunden nach dem Start beträgt etwa $0,37 \frac{m}{s}$.	4
e	$\int_0^z (f(x) - h(x)) dx = 0$ hat für $0 < z < 10$ die Lösung $z_1 = \frac{1100 - 20\sqrt{295}}{91} \approx 8,31$. $\frac{h(z_1) - f(z_1)}{f(z_1)} \approx 0,11 = 11\%$	4
		35

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3	II				II			X	
b	4	I				I		X		
c	5		II		II	II			X	
d	3				I			X		

e	4		III		III		II			X
2 a	3			I		I		X		
b	3	II		II	II				X	
c	2		I	I		I		X		
d	4	II	II	II			II		X	
e	4		III	III		II				X

Anzahl ² der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
12	15	8

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster³ vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Die Ermittlung der Anzahlen erfolgt ausschließlich auf der Grundlage der Spalten „BE“ und „Anforderungsbereich“ in der vorhergehenden Tabelle.

Bei jeder Aufgabe zum Prüfungsteil B liegen die Anzahlen der Bewertungseinheiten – abhängig vom Anforderungsniveau – in den Bereichen, die der folgenden Tabelle zu entnehmen sind:

Anforderungsniveau	erhöht			grundlegend		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III
Anzahl der BE	8 - 10	17 - 21	11 - 13	10 - 12	14 - 18	7 - 9

³ Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.