

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2024

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	MMS

1 Aufgabe

1 Ein mit Wasser befülltes Glas wird aus einem Kühlschrank genommen. Die anschließende Entwicklung der Wassertemperatur infolge der höheren Raumtemperatur lässt sich mithilfe der in IR definierten Funktion $f: t \mapsto 25 - 20e^{-0,014t}$ modellhaft beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Minuten, die seit der Entnahme aus dem Kühlschrank vergangen ist, und $f(t)$ die Wassertemperatur in °C. Die Raumtemperatur beträgt konstant 25 °C.

a Geben Sie die Wassertemperatur zum Zeitpunkt der Entnahme aus dem Kühlschrank an. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wassertemperatur 12 °C beträgt.

b Berechnen Sie die Werte der folgenden Terme und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang:

$$(1) \quad f'(30) \qquad (2) \quad \frac{f(30)-f(0)}{30-0}$$

c Zeigen Sie, dass in diesem Modell gilt:

Es gibt eine Konstante c , sodass zu jedem Zeitpunkt die Differenz zwischen der Raumtemperatur und der Wassertemperatur das c -Fache der momentanen Änderungsrate der Wassertemperatur ist.

BE

3

5

3

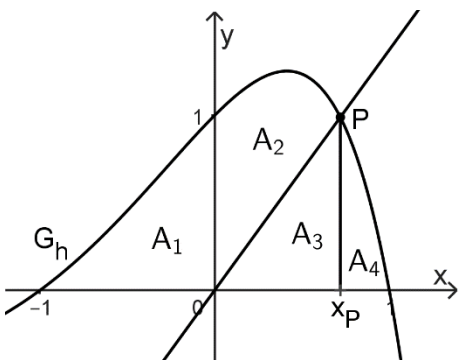
¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

d Die folgende Rechnung stellt die Lösung einer Aufgabe im vorliegenden Sachzusammenhang dar: $\text{Aus } f(t) = \frac{f(0)+25}{2} \text{ ergibt sich } t \approx 49,5.$ Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung.	3
2 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit $h(x) = (1-x^2) \cdot e^x$. Der Graph von h wird mit G_h bezeichnet.	
a Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass der Funktionswert $h(x)$ nur für $-1 < x < 1$ positiv ist.	3
b Die Gerade u ist die Tangente an G_h im Punkt $(0 1)$. Es gibt genau eine Tangente v an G_h, die zu u senkrecht ist. Geben Sie die notwendigen Schritte zur Berechnung einer Gleichung von v an und erläutern Sie diese.	5
c Berechnen Sie die Wendestellen von h. In einem der Wendepunkte von G_h ist die Steigung von G_h maximal. Berechnen Sie den Wert der maximalen Steigung.	4
d Für $0 < w < 1$ wird das Dreieck mit den Eckpunkten $(0 0)$, $(w 0)$ und $(w h(w))$ betrachtet. Für einen Wert von w ist der Flächeninhalt des Dreiecks maximal. Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt.	4
e G_h schließt mit der x-Achse eine Fläche A ein. Es gibt genau einen Punkt P auf G_h mit positiver x-Koordinate, sodass die Gerade durch die Punkte $O(0 0)$ und P die Fläche A in zwei Flächenstücke gleichen Inhalts teilt. Geben Sie eine Gleichung an, mit der die x-Koordinate von P bestimmt werden kann, und veranschaulichen Sie den Aufbau der Gleichung anhand einer Skizze.	5
35	

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	a Wassertemperatur zum Zeitpunkt der Entnahme: 5°C $f(t) = 12$ liefert $t \approx 30,8$. Das Wasser hat etwa 31 Minuten nach Beobachtungsbeginn eine Temperatur von 12°C.	3
	b $f'(30) \approx 0,18$ Die momentane Änderungsrate der Wassertemperatur 30 Minuten nach Beobachtungsbeginn beträgt etwa $0,18 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$. $\frac{f(30)-f(0)}{30-0} \approx 0,23$ Die mittlere Änderungsrate der Wassertemperatur innerhalb der ersten 30 Minuten beträgt etwa $0,23 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$.	5

	c $\frac{25-f(t)}{f'(t)} = \frac{500}{7}$ Der Quotient ist unabhängig von t, somit existiert die Konstante.	3
	d Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wassertemperatur den Mittelwert zwischen der Ausgangstemperatur und 25 °C annimmt.	3
2	a $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^x > 0$. Dann ist $h(x)$ genau dann positiv, wenn $(1 - x^2) > 0$, also für alle Werte zwischen den beiden Nullstellen.	3
	b Steigung von v: $-\frac{1}{h'(0)}$ Lösen der Gleichung $h'(x) = -\frac{1}{h'(0)}$ zur Bestimmung der x-Koordinate x_Q des Schnittpunkts Q von G_h und v. Bestimmung der y-Koordinate y_Q von Q: $y_Q = h(x_Q)$ Bestimmung des y-Achsenabschnitts von v mithilfe der Steigung von v und den Koordinaten von Q.	5
	c $h''(x) = 0$ liefert $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ und $x_2 = -2 + \sqrt{3}$. Da $h'''(x_1) > 0$ und $h'''(x_2) < 0$, ist x_2 die x-Koordinate des Punkts, in dem die Steigung von G_h maximal ist. $h'(x_2) = (2 \cdot \sqrt{3} - 2) \cdot e^{\sqrt{3}-2}$	4
	d Für die Funktion i mit $i(w) = \frac{1}{2} w \cdot h(w)$ und $0 < w < 1$ gilt: $i'(w) = 0$ liefert $w_1 \approx 0,68$. $i(w_1) \approx 0,36$	4
	e Für die x-Koordinate x_P von P gilt: $\int_{-1}^0 h(t) dt + \int_0^{x_P} h(t) dt - \frac{1}{2} \cdot x_P \cdot h(x_P) = \frac{1}{2} \cdot x_P \cdot h(x_P) + \int_{x_P}^1 h(t) dt$  $A_1 = \int_{-1}^0 h(t) dt$; $A_2 = \int_0^{x_P} h(t) dt - \frac{1}{2} \cdot x_P \cdot h(x_P)$; $A_3 = \frac{1}{2} \cdot x_P \cdot h(x_P)$; $A_4 = \int_{x_P}^1 h(t) dt$	5
		35

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3			I		I	I	X		
b	5			I		I	I	X		
c	3	II	II			II	III			X
d	3			II		II	II		X	
2 a	3	I			I	I		X		
b	5		II		II	I	II		X	
c	4		II			II	II		X	
d	4	II			I	II			X	
e	5		III		II	III	II			X

Anzahl ² der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
11	16	8

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster³ vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Die Ermittlung der Anzahlen erfolgt ausschließlich auf der Grundlage der Spalten „BE“ und „Anforderungsbereich“ in der vorhergehenden Tabelle.

Bei jeder Aufgabe zum Prüfungsteil B liegen die Anzahlen der Bewertungseinheiten – abhängig vom Anforderungsniveau – in den Bereichen, die der folgenden Tabelle zu entnehmen sind:

Anforderungsniveau	erhöht			grundlegend		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III
Anzahl der BE	8 - 10	17 - 21	11 - 13	10 - 12	14 - 18	7 - 9

³ Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.