

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2024

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	MMS

1 Aufgabe

	BE
1 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a^3}x^3 - \frac{1}{a}x^2 + x$ und $a \in \mathbb{R}^+$.	
a Berechnen Sie die Stellen, an denen der Graph von f_4 eine Steigung von $-\frac{1}{4}$ hat.	3
b Bestimmen Sie den Wert von a so, dass der Punkt $(2 2)$ auf dem Graphen von f_a liegt.	2
c Ermitteln Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen von f_1 und f_2 . Weisen Sie nach, dass es genau einen Punkt gibt, der auf jedem Graphen der Schar liegt.	5
d Die Gleichung $f_a(x) = 0$ hat in Abhängigkeit von a die Lösungen 0 und $\frac{a^2 + \sqrt{a^3(a-4)}}{2}$ und $\frac{a^2 - \sqrt{a^3(a-4)}}{2}$. Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a an und begründen Sie Ihre Angabe anhand der obigen Terme.	4
e Der Graph jeder Funktion f_a hat genau einen Wendepunkt. Bestimmen Sie den Wert von a zu dem Wendepunkt mit der größten y -Koordinate.	5

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

f Im Folgenden gilt $0 < a < 4$.

Abbildung 1 zeigt beispielhaft den Graphen einer Funktion f_a sowie die Gerade g mit der Gleichung $y = x$, die den Graphen in den Punkten $O(0|0)$ und $P(u_a | f_a(u_a))$ schneidet. Die Gerade g , die x -Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = u_a$ begrenzen ein rechtwinkliges Dreieck.

Die folgenden Schritte stellen die Lösung einer Aufgabe dar:

$$\blacklozenge f_a(x) = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = a^2$$

$$\blacklozenge \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot f_a(a^2) = 3 \cdot \int_0^{a^2} (x - f_a(x)) dx \Leftrightarrow a = 2$$

Erläutern Sie diese Schritte und interpretieren Sie die Lösung $a = 2$ geometrisch.

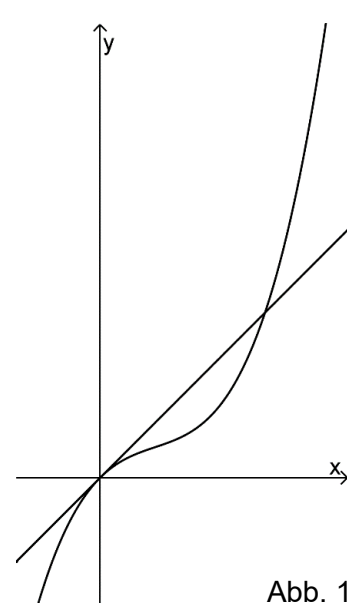


Abb. 1

- 2 Für ein Umweltschutzprojekt sollen zwei Unterwasserdrohnen U1 und U2 in einem See Messungen in unterschiedlichen Tiefen vornehmen. Sie bewegen sich nur in vertikaler Richtung, d. h. senkrecht zur Wasseroberfläche des Sees. Ihre Geschwindigkeiten lassen sich für $0 \leq t \leq 30$ mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen v bzw. w beschreiben, wobei gilt:

$$v(t) = -\frac{6}{25}t \cdot (4t - 25) \cdot e^{-\frac{1}{5}t}$$

$$w(t) = \frac{1}{216}t^3 - \frac{1}{6}t^2 + t$$

Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten, $v(t)$ die Geschwindigkeit von U1 in Meter pro Minute und $w(t)$ die Geschwindigkeit von U2 in Meter pro Minute. Wenn die Geschwindigkeit in diesem Modell negativ ist, sinkt die Unterwasserdrohne. Wenn die Geschwindigkeit positiv ist, steigt die Unterwasserdrohne.

- a Bestimmen Sie die Koordinaten des Tiefpunktes des Graphen von v und interpretieren Sie die Werte im Sachkontext.

- b Mit v' wird die erste Ableitungsfunktion von v bezeichnet.

Innerhalb eines bestimmten Zeitraums gilt für jeden Zeitpunkt t die folgende Aussage: $v(t) < 0$ und $v'(t) > 0$

Interpretieren Sie dies in Bezug auf die Bewegung von U1 in diesem Zeitraum.

- c Im Beobachtungszeitraum beträgt der geringste Abstand von U1 zur Wasseroberfläche des Sees 10 Meter. Ermitteln Sie den Abstand von U1 zur Wasseroberfläche zu Beobachtungsbeginn.

- d U2 ist zu Beobachtungsbeginn 5 Meter tiefer als U1 und steigt langsamer als U1. Der Graph in Abbildung 2 zeigt für die ersten Minuten des Beobachtungszeitraums die zeitliche Entwicklung des vertikalen Abstands der beiden Unterwasserdrohnen zueinander. Im dargestellten Bereich hat der Graph nur einen Hochpunkt $H(t_H | y_H)$.

Erläutern Sie, wie man t_H anhand der Graphen von v und w ermitteln kann, und geben Sie einen Term zur Berechnung von y_H an.

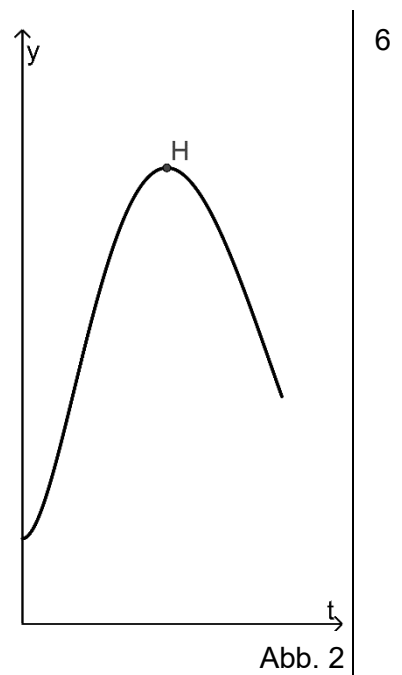


Abb. 2

40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a	$f'_4(x) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = \frac{20}{3}$	3
b	Für $a \in \mathbb{R}^+$ gilt: $f_a(2) = 2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}$	2
c	$f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{4}{7}$. $(0 0)$ und $(\frac{4}{7} \frac{148}{343})$ sind die gemeinsamen Punkte der Graphen von f_1 und f_2 . $f_a(0) = 0$ gilt unabhängig von a . Wegen $f_3(\frac{4}{7}) \neq f_1(\frac{4}{7})$ liegt ausschließlich der Koordinatenursprung auf allen Graphen der Schar.	5
d	Der Wert des Terms $a^3(a-4)$ ist für $a = 4$ null, für $0 < a < 4$ negativ und für $a > 4$ positiv. Damit ergibt sich: $a = 4$: zwei Nullstellen; $0 < a < 4$: eine Nullstelle; $a > 4$: drei Nullstellen	4
e	$f''_a(x) = 0$ liefert $x = \frac{a^2}{3}$. Der Term $f_a(\frac{a^2}{3})$ ist für $a = 3$ maximal.	5
f	Zunächst werden die Schnittstellen der Gerade g mit dem Graphen von f_a berechnet.	5

	Die Lösung der Gleichung im zweiten Schritt gibt denjenigen Wert von a an, für den das rechtwinklige Dreieck den dreifachen Flächeninhalt besitzt wie das Flächenstück, das von g und dem Graphen von f_a eingeschlossen ist.	
2 a	Tiefpunkt $(t_1 y_1)$ mit $t_1 \approx 14$ und $y_1 \approx -6,3$ U1 hat etwa 14 Minuten nach Beobachtungsbeginn eine Geschwindigkeit von $-6,3$ Meter pro Minute.	3
b	In diesem Zeitraum sinkt U1 immer langsamer.	2
c	Es gilt $v(t) > 0$ für $0 < t < 6,25$ und $v(t) < 0$ für $6,25 < t \leq 30$. U1 hat somit 6,25 Minuten nach Beobachtungsbeginn den kleinsten Abstand zur Wasseroberfläche. Abstand von U1 zur Wasseroberfläche zu Beobachtungsbeginn in Metern: $10 + \int_0^{6,25} v(t) dt \approx 31,7$	5
d	Bei der t -Koordinate t_s des einzigen Schnittpunkts der Graphen von v und w innerhalb der ersten Minuten wechselt $w(t) < v(t)$ zu $v(t) < w(t)$. Somit nimmt der vertikale Abstand von U1 und U2 bis zum Zeitpunkt t_s zu und danach wieder ab. Folglich ist $t_H = t_s$. $y_H = 5 + \int_0^{t_s} (v(t) - w(t)) dt$	6
		40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3					I		X		
b	2		I			I		X		
c	5	II	II			I			X	
d	4	II				II	II		X	
e	5	II	II			II			X	
f	5		II		II		II		X	
2 a	3		I	I		I		X		
b	2	II		II			II		X	
c	5		III	III		II				X
d	6	II		III	III		III			X

Anzahl ² der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
8	21	11

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster³ vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Die Ermittlung der Anzahlen erfolgt ausschließlich auf der Grundlage der Spalten „BE“ und „Anforderungsbereich“ in der vorhergehenden Tabelle.

Bei jeder Aufgabe zum Prüfungsteil B liegen die Anzahlen der Bewertungseinheiten – abhängig vom Anforderungsniveau – in den Bereichen, die der folgenden Tabelle zu entnehmen sind:

Anforderungsniveau	erhöht			grundlegend		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III
Anzahl der BE	8 - 10	17 - 21	11 - 13	10 - 12	14 - 18	7 - 9

³ Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.