

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2024

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	MMS

1 Aufgabe

1 Ein mit Wasser befülltes Glas wird aus einem Kühlschrank genommen. Die anschließende Entwicklung der Wassertemperatur infolge der höheren Raumtemperatur lässt sich mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: t \mapsto 25 - 20e^{-0,014t}$ modellhaft beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Minuten, die seit der Entnahme aus dem Kühlschrank vergangen ist, und $f(t)$ die Wassertemperatur in $^{\circ}\text{C}$. Die Raumtemperatur beträgt konstant 25°C .

a Geben Sie die Wassertemperatur zum Zeitpunkt der Entnahme aus dem Kühlschrank an. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wassertemperatur 12°C beträgt.

b Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Wassertemperatur innerhalb der ersten 30 Minuten. Berechnen Sie $f'(30)$ und geben Sie die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang an.

c Ausgehend von einem beliebigen Zeitpunkt t^* dauert es eine gewisse Zeit, bis die Wassertemperatur den Mittelwert zwischen der Temperatur zum Zeitpunkt t^* und der Raumtemperatur angenommen hat. Zeigen Sie, dass diese Zeitdauer unabhängig von t^* ist.

Bei einem anderen Vorgang wird die Entwicklung der Temperatur von Wasser in einem zweiten Glas durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g: t \mapsto 5 + 20e^{-0,014t}$ modellhaft beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in

BE

3

4

4

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Minuten und $g(t)$ die Wassertemperatur in $^{\circ}\text{C}$. Bei den durch f und g beschriebenen Vorgängen sind die durch $t = 0$ festgelegten Zeitpunkte identisch.

d Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f erzeugt werden kann. 2

e Beurteilen Sie jede der folgenden Aussagen: 4

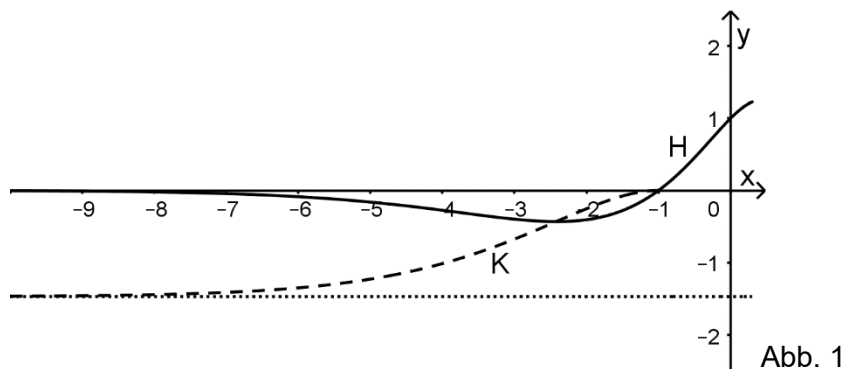
- I Die Temperatur des Wassers im zweiten Glas nimmt während des gesamten Beobachtungszeitraums ab.
- II Für beide Gläser stimmen zu jedem Zeitpunkt die Beträge der momentanen Änderungsraten der Wassertemperaturen überein.

2 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit $h(x) = (1 - x^2) \cdot e^x$. Der Graph von h wird mit H bezeichnet.

a Geben Sie den Grenzwert von h für $x \rightarrow -\infty$ an und begründen Sie Ihre Angabe anhand des Funktionsterms. 3

b Es gibt eine Zahl $b > 1$, sodass die Fläche, die H , die x -Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = b$ im vierten Quadranten einschließen, den gleichen Inhalt hat wie die Fläche, die H mit der x -Achse im ersten und zweiten Quadranten einschließt. Bestimmen Sie b . 3

c Gegeben ist die in $]-\infty; -1]$ definierte Funktion k mit $k(x) = \int_x^{-1} h(t) dt$. Ihr Graph wird mit K bezeichnet. Abbildung 1 zeigt H und K . Für $x \rightarrow -\infty$ kommt K der Gerade mit der Gleichung $y = -\frac{4}{e}$ beliebig nahe. 5



Begründen Sie mithilfe des Funktionsterms, dass k die Nullstelle -1 besitzt und dass K im Bereich $x < -1$ unterhalb der x -Achse verläuft. Deuten Sie damit unter Verwendung von Abbildung 1 den Wert $-\frac{4}{e}$ in Bezug auf H geometrisch.

Die Funktion h gehört zur Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen h_a mit

$h_a(x) = \frac{1}{a} \cdot (a - x^2) \cdot e^x$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von h_a wird mit H_a bezeichnet.

d Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ die Funktionswerte von h_a nur für $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$ positiv sind. 3

e Es gibt einen Wert von a , sodass das Produkt der x -Koordinaten der beiden Extrempunkte von H_a gleich dem Produkt der y -Koordinaten dieser beiden Punkte ist. Berechnen Sie diesen Wert von a .

f Die Schnittpunkte von H_a mit der x -Achse und der Hochpunkt von H_a sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Dieses Dreieck rotiert um die x -Achse. Die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion v gibt das Volumen dieses Rotationskörpers in Abhängigkeit von a an. Abbildung 2 zeigt drei Graphen G_1 , G_2 und G_3 , von denen einer die Ableitungsfunktion v' von v darstellt.

Beurteilen Sie ohne Rechnung und unter Verwendung der Tatsache, dass die y -Koordinate des Hochpunkts von H_a umso größer ist, je größer der Wert von a ist, welcher Graph dies ist.

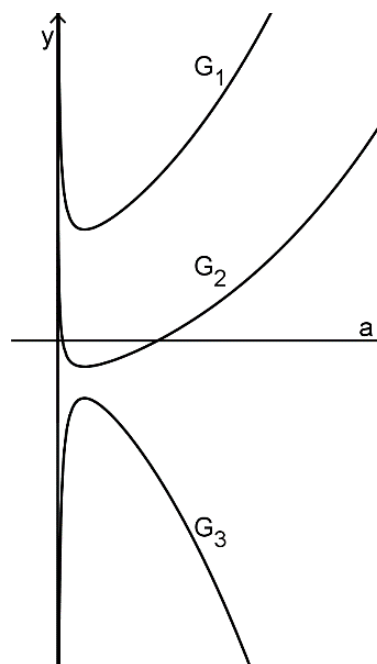


Abb. 2

40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a	Wassertemperatur zum Zeitpunkt der Entnahme: 5°C $f(t) = 12$ liefert $t \approx 30,8$. Somit hat das Wasser etwa 31 Minuten nach Beobachtungsbeginn eine Temperatur von 12°C .	3
b	mittlere Änderungsrate in $\frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$: $\frac{f(30)-f(0)}{30-0} \approx 0,23$ $f'(30) \approx 0,18$ Die momentane Änderungsrate der Wassertemperatur 30 Minuten nach Beobachtungsbeginn beträgt etwa $0,18 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$.	4
c	Für jeden Zeitpunkt t^* liefert die Gleichung $f(t) = \frac{25+f(t^*)}{2}$ eine Lösung t , mit der die Differenz $t - t^*$ den Wert $\frac{500}{7} \cdot \ln 2$ annimmt und damit unabhängig von t^* ist.	4
d	Der Graph von g kann aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der t -Achse und Verschiebung um 30 in positive y -Richtung erzeugt werden.	2

e	Die Aussage I ist richtig. Der Graph von g ist streng monoton fallend. Die Aussage II ist richtig. Für alle $t \geq 0$ gilt $ f'(t) = g'(t) $.	4
2 a	$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ Es gilt $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Für h als ein Produkt aus der natürlichen Exponentialfunktion und einer ganzrationalen Funktion ist der Grenzwert 0.	3
b	$\int_{-1}^b h(x) dx = 0$ liefert $b \approx 1,56$.	3
c	$k(-1) = 0$, da bei übereinstimmenden Grenzen des Integrals dieses den Wert 0 hat. Für $x < -1$ ist $k(x) < 0$, da H in diesem Bereich unterhalb der x-Achse verläuft. Für $c < -1$ gibt der Betrag von $\int_c^{-1} h(t) dt$ den Inhalt der Fläche an, den H und die x-Achse zwischen den Geraden mit den Gleichungen $x = c$ und $x = -1$ einschließen. Die Annäherung von K an die Gerade mit der Gleichung $y = -\frac{4}{e}$ bedeutet daher für H geometrisch, dass der Inhalt der oben beschriebenen Fläche für kleiner werdende Werte von c dem Wert $\frac{4}{e}$ beliebig nahe kommt.	5
d	$h_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{a} \vee x = \sqrt{a}$ Für $a \in \mathbb{R}^+$ und alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\frac{1}{a} > 0$ und $e^x > 0$. Dann ist $h_a(x)$ genau dann positiv, wenn $(a - x^2) > 0$ ist, also für alle x-Werte zwischen den beiden Nullstellen.	3
e	$h'_a(x) = 0$ liefert $x_1 = -1 - \sqrt{a+1}$ und $x_2 = -1 + \sqrt{a+1}$. Die Gleichung $x_1 \cdot x_2 = h_a(x_1) \cdot h_a(x_2)$ besitzt $a = \frac{2}{e}$ als einzige positive Lösung.	5
f	Der Rotationskörper setzt sich aus zwei Kegeln mit gleicher Grundfläche zusammen. Sein Volumen nimmt sowohl mit größer werdendem Radius als auch mit größer werdendem Abstand der beiden Spitzen zu. Dabei entspricht der Radius der Höhe des Dreiecks, also der y-Koordinate des Hochpunkts, und der Abstand der Spitzen des Doppelkegels dem Abstand der beiden Nullstellen von h_a . Beide Größen nehmen mit ansteigendem Wert von a zu. Die Funktion v ist somit monoton wachsend und v' nimmt folglich keine negativen Funktionswerte an, sodass nur G_1 infrage kommt.	4
		40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3			I		I	I	X		

b	4			I		I	I	X		
c	4		II	III		II	III			X
d	2				II		II		X	
e	4	II		II		II	II		X	
2 a	3	I			I	I		X		
b	3		II		II	II			X	
c	5	II			III		III			X
d	3		II			II			X	
e	5		II			II			X	
f	4	II			II		III			X

Anzahl ² der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
10	17	13

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster³ vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Die Ermittlung der Anzahlen erfolgt ausschließlich auf der Grundlage der Spalten „BE“ und „Anforderungsbereich“ in der vorhergehenden Tabelle.

Bei jeder Aufgabe zum Prüfungsteil B liegen die Anzahlen der Bewertungseinheiten – abhängig vom Anforderungsniveau – in den Bereichen, die der folgenden Tabelle zu entnehmen sind:

Anforderungsniveau	erhöht			grundlegend		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III
Anzahl der BE	8 - 10	17 - 21	11 - 13	10 - 12	14 - 18	7 - 9

³ Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.