

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2024

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	MMS

1 Aufgabe

Abbildung 1 zeigt modellhaft eine Terrasse, die von zwei Hauswänden und einer Rasenfläche begrenzt wird. Ebenfalls dargestellt ist ein ausfahrbares Sonnendach, im Folgenden als Markise bezeichnet.

Der horizontale Boden, zu dem die Terrasse und die Rasenfläche gehören, wird im abgebildeten Koordinatensystem durch die x_1x_2 -Ebene dargestellt.

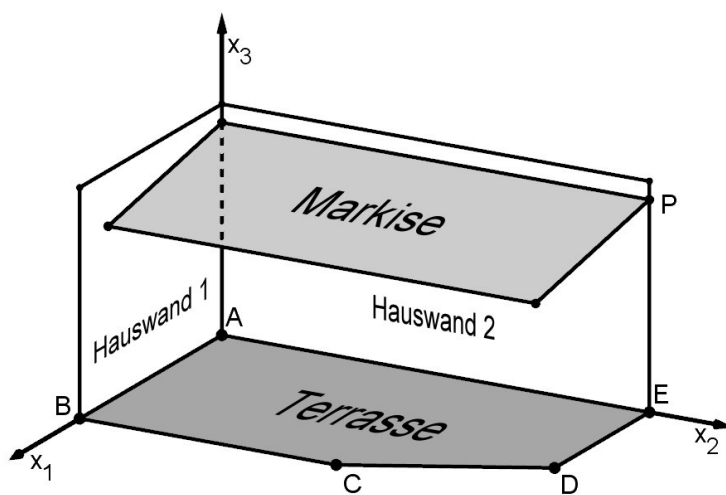


Abb. 1

Die Terrasse wird durch das Fünfeck mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(3|0|0)$, $C(3|3|0)$, $D(2|5|0)$ und $E(0|5|0)$ beschrieben. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht dabei 1 m in der Realität.

- a Bestimmen Sie die Gesamtlänge der an die Terrasse angrenzenden Rasenkanten sowie den Flächeninhalt der Terrasse.

BE

5

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Die Befestigung der Markise an der Hauswand 2 verläuft horizontal in einer Höhe von 2,3 m über dem Boden. Beim Ausfahren der Markise vergrößert sich der Abstand ihrer vorderen Kante zur Hauswand 2. Wenn die Markise vollständig ausgefahren ist, hat ihre vordere Kante einen Abstand von 2,4 m zur Hauswand 2 und befindet sich in einer Höhe von 1,9 m über dem Boden. Die Markise befindet sich im Modell stets in derselben Ebene M und hat die Form eines Rechtecks. Der Punkt $P(0 \mid 5 \mid 2,3)$ stellt eine Ecke der Markise dar. Die Materialstärken aller Gegenstände bleiben unberücksichtigt.

b Bestimmen Sie eine Gleichung von M in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $x_1 + 6x_3 = 13,8$)

c Das zu einem bestimmten Zeitpunkt auf die Terrasse einfallende Sonnenlicht kann

im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -0,92 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ beschrieben

werden. Untersuchen Sie, ob zu diesem Zeitpunkt bei vollständig ausgefahrener Markise mehr als die Hälfte der Terrassenfläche im Schatten liegt.

Abbildung 2 zeigt schematisch die Oberseite der Markise mit ihren zwei gestrichelt dargestellten Gelenkarmen. Im Folgenden wird nur der rechte Gelenkarm betrachtet. Er besteht aus der oberen Stange, einem Gelenk und der unteren Stange, die im Modell durch die Strecke $\overline{PG_k}$, den Punkt G_k bzw. die Strecke $\overline{G_kQ_k}$ dargestellt werden.

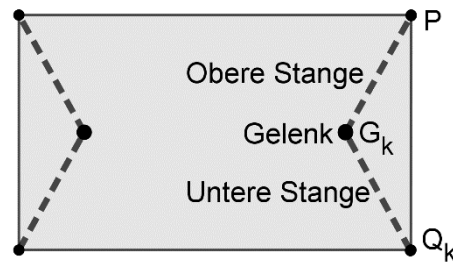


Abb. 2

Die obere und die untere Stange sind gleich lang.

Beim Ausfahren der Markise verändern sich die Positionen der Punkte G_k und Q_k .

Im Modell kann die jeweilige Position der oberen Stange durch eine Gerade der Schar

$\alpha_k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2,3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2,4k \\ -0,8 \\ -0,4k \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $0,04 \leq k \leq 1$ beschrieben werden. Je größer

der Wert von k ist, desto weiter ist die Markise ausgefahren, wobei für $k = 0,04$ die Markise vollständig eingefahren und für $k = 1$ vollständig ausgefahren ist.

d Zeigen Sie, dass alle Geraden α_k der Schar in der Ebene M liegen.

e Die nachfolgende Rechnung liefert die Größen zweier Winkel. Geben Sie die Bedeutung von α und β im Sachzusammenhang an.

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,4 \\ -0,8 \\ -0,4 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2,4 \\ -0,8 \\ -0,4 \end{pmatrix} \right|} \text{ liefert } \alpha \approx 71,8^\circ \text{ und damit } \beta = 2 \cdot \alpha \approx 143,6^\circ.$$

f Sowohl die obere als auch die untere Stange des Gelenkarms sind 1,28 m lang. Mit g wird diejenige Gerade bezeichnet, die im Modell die Lage der unteren Stange für $k = 0,5$ beschreibt. Bestimmen Sie die Koordinaten von $G_{0,5}$ und geben Sie einen Richtungsvektor von g an.

4

6

3

3

4

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
a $3 + \sqrt{1^2 + 2^2} + 2 \approx 7,24$; $3 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 14$ Gesamtlänge der an die Terrasse angrenzenden Rasenkanten: 7,24 m Flächeninhalt der Terrasse: 14 m²	5
b Die Punkte $(0 0 2,3)$, $(0 5 2,3)$ und $(2,4 0 1,9)$ sind Eckpunkte des Rechtecks, das die vollständig ausgefahrene Markise darstellt. $\vec{n} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \wedge \vec{n} \circ \begin{pmatrix} 2,4 \\ 0 \\ -0,4 \end{pmatrix} = 0$ liefert $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0 \\ 2,4 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor von M. Somit hat M eine Gleichung der Form $0,4x_1 + 2,4x_3 = c$. Mit $(0 0 2,3) \in M$ ergibt sich $c = 5,52$.	4
c Die Gleichung $\begin{pmatrix} 2,4 \\ 5 \\ 1,9 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -0,92 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert $x_1 = 1,526$. Da der Lichteinfall parallel zur x_1x_3-Ebene verläuft, liegt die Terrasse bis zu einem Abstand von etwa 1,53 m von der Hauswand 2 im Schatten. Da jede Stelle der Terrasse maximal drei Meter von der Hauswand 2 entfernt ist, liegt mehr als die Hälfte der Terrasse im Schatten.	6
d Das Einsetzen des allgemeinen Punkts $(2,4k\lambda 5 - 0,8\lambda 2,3 - 0,4k\lambda)$ der Gerade o_k in die Gleichung von M liefert die wahre Aussage $2,4k\lambda + 6 \cdot (2,3 - 0,4k\lambda) = 13,8$.	3
e Bei vollständig ausgefahrener Markise gilt: α ist die Größe des Winkels zwischen der hinteren Kante der Markise und der oberen Stange; β ist die Größe des Winkels zwischen den beiden Stangen des Gelenkarms.	3
f $\overrightarrow{OG_{0,5}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2,3 \end{pmatrix} + \frac{1,28}{\sqrt{1,2^2 + (-0,8)^2 + (-0,2)^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1,2 \\ -0,8 \\ -0,2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,05 \\ 4,30 \\ 2,12 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1,2 \\ 0,8 \\ -0,2 \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor von g.	4
	25

3 Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen	Anforderungsbereich
--	----	--------------------------------------	---------------------

Teilaufgabe		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	5	I	I	I	I	I		X		
b	4		II		I	II	II		X	
c	6	II	II	II		II	II		X	
d	3	II	II			II			X	
e	3			III	II		III			X
f	4	II	III			III				X

Anzahl ² der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
5	13	7

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster³ vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Die Ermittlung der Anzahlen erfolgt ausschließlich auf der Grundlage der Spalten „BE“ und „Anforderungsbereich“ in der vorhergehenden Tabelle.

Bei jeder Aufgabe zum Prüfungsteil B liegen die Anzahlen der Bewertungseinheiten – abhängig vom Anforderungsniveau – in den Bereichen, die der folgenden Tabelle zu entnehmen sind:

Anforderungsniveau	erhöht			grundlegend		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III
Anzahl der BE	5 - 6	11 - 13	7 - 8	6 - 7	8 - 10	4 - 5

³ Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.