

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2017

Aufgabe für das Fach Mathematik

1 Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	WTR

2 Aufgabe

1 In einer Senke verläuft ein Fluss. Abbildung 1 zeigt modellhaft einen Querschnitt der Senke und der beiden horizontalen Uferzonen.

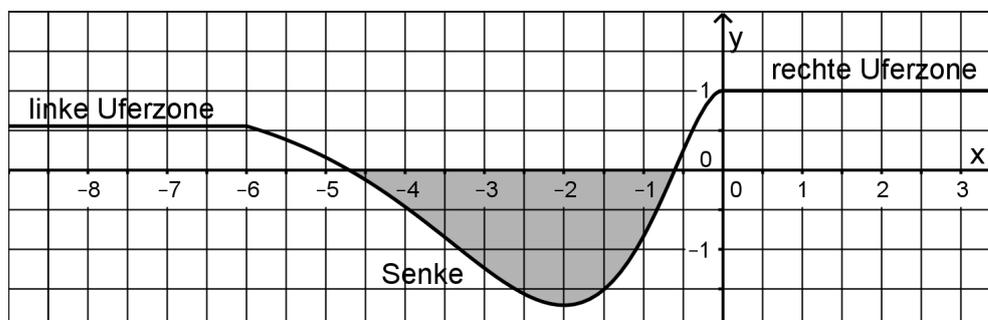


Abb. 1

Im Querschnitt kann die Profillinie der Senke modellhaft durch die Funktion f mit $f(x) = -5x^2e^x + 1$ und $x \in [-6; 0]$ beschrieben werden. Die Wasseroberfläche wird im Modell durch einen Abschnitt der x -Achse dargestellt, die Uferzonen durch zwei Strecken, die jeweils parallel zur x -Achse verlaufen und lückenlos an den Graphen von f anschließen. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

Zur Funktion f sind Gleichungen der ersten und zweiten Ableitungsfunktion sowie einer Stammfunktion gegeben:

- ◆ $f'(x) = -5x \cdot (2 + x) \cdot e^x$
- ◆ $f''(x) = -10e^x - 20xe^x - 5x^2e^x$
- ◆ $F(x) = x - 5 \cdot (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$

BE

- a Berechnen Sie den Höhenunterschied zwischen den beiden Uferzonen. 2
- b Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 1, wie breit die Senke einen Meter unterhalb der Wasseroberfläche ist. 2
- c Deuten Sie die Gleichung $f(x+3) = f(x)$ im Sachzusammenhang und bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 1 eine Lösung der Gleichung. 3
- d Leiten Sie aus der Funktionsgleichung von f die angegebene Funktionsgleichung von f' her. 3
- e Berechnen Sie die Tiefe des Wassers an der tiefsten Stelle der Senke. 4

Über die Senke soll eine Brücke gebaut werden. Das eine Ende der Brücke soll auf der linken Uferzone aufliegen, das andere Ende auf einem Sockel am rechten Ufer. Die Profillinie der Brücke wird im Modell durch eine Strecke dargestellt, der Auflagepunkt am rechten Ufer durch den Punkt $B(0|1,1)$.

- f Berechnen Sie die Länge der Brücke sowie deren Steigung in Prozent, wenn der linke Auflagepunkt im Modell durch den Punkt $A(-6|f(-6))$ dargestellt würde. 4
- g Ermitteln Sie, wie weit das linke Ende der Brücke vom Rand der Senke entfernt läge, wenn die Brücke eine Steigung von 6 % hätte. 3
- h Zwischen dem tiefsten Punkt der Senke und ihrem rechten Rand gibt es einen Punkt, in dem die Profillinie ihren größten Neigungswinkel gegenüber der Horizontalen hat. Berechnen Sie die Größe dieses Neigungswinkels. 5
- i Das Produkt aus dem Flächeninhalt des Flussquerschnitts (in m^2) und der Fließgeschwindigkeit des Wassers (in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$) wird als Durchflussrate bezeichnet. Die Fließgeschwindigkeit des Wassers beträgt $0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Der Abschnitt der x -Achse, der die Wasseroberfläche im Modell darstellt, wird näherungsweise durch $x \approx -4,7$ und $x \approx -0,6$ begrenzt. Berechnen Sie die Durchflussrate. 5

- 2 Abbildung 2 zeigt den Graphen einer in \mathbb{R} definierten ganzrationalen Funktion g vierten Grades.

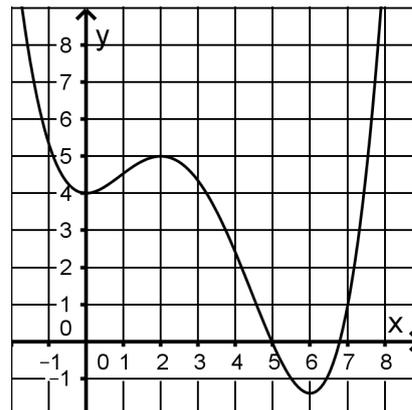
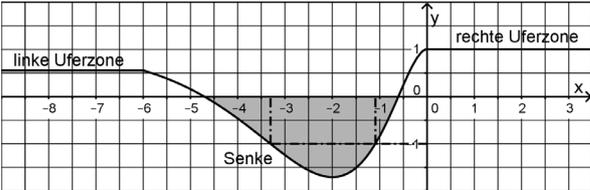
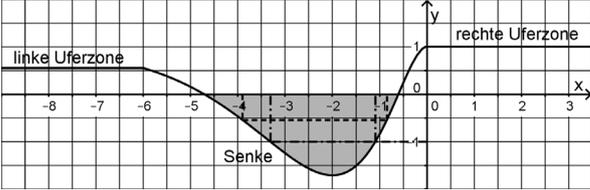


Abb. 2

- a Begründen Sie, dass der Graph von g außerhalb des abgebildeten Bereichs keine Extrempunkte besitzt. 3
- b Betrachtet wird die Gleichung $g(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$. Geben Sie alle Werte von a an, für die die Gleichung genau drei Lösungen hat. 2
- c Untersuchen Sie, ob der Wert des Terms $g'(3) \cdot g''(3)$ positiv ist. 4

3 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a	$f(0) - f(-6) \approx 0,45$, d. h. der Höhenunterschied beträgt etwa 45 cm.	2
b	 <p>Einen Meter unterhalb der Wasseroberfläche ist die Senke etwa 2,2 m breit.</p>	2
c	<p>Die Lösung der Gleichung liefert den Punkt der Profillinie der Senke, für den der auf gleicher Höhe gegenüberliegende Punkt der Profillinie 3 m entfernt ist.</p>  <p>$x \approx -3,9$</p>	3
d	$f'(x) = -10xe^x - 5x^2e^x = -5x \cdot (2 + x) \cdot e^x$	3
e	<p>Abbildung 1 ist zu entnehmen, dass die x-Koordinate des Tiefpunkts des Graphen von f zwischen $x = -2,5$ und $x = -1,5$ liegt.</p> <p>Für $x \in [-2,5; -1,5]$ gilt: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$</p> <p>$f(-2) \approx -1,7$</p> <p>Die Tiefe des Wassers beträgt an der tiefsten Stelle etwa 1,7 m.</p>	4
f	<p>$\sqrt{6^2 + (1,1 - f(-6))^2} \approx 6,0$, d. h. die Brücke ist etwa 6,0 m lang</p> <p>$\frac{1,1 - f(-6)}{6} \approx 9\%$</p>	4
g	<p>$\frac{1,1 - f(-6)}{\Delta x} = 0,06$ liefert $\Delta x \approx 9,1$.</p> <p>Das Ende der Brücke läge 3,1 m vom Rand der Senke entfernt.</p>	3
h	<p>Für $x \in]-2; 0[$ gilt: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 + \sqrt{2}$</p> <p>$\tan \alpha = f'(-2 + \sqrt{2})$, d. h. $\alpha \approx 67^\circ$</p>	5
i	<p>$0,5 \cdot \left \int_{-4,7}^{-0,6} f(x) dx \right = 0,5 \cdot \left \left[x - 5 \cdot (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x \right]_{-4,7}^{-0,6} \right \approx 2,1$</p> <p>Die Durchflussrate beträgt $2,1 \frac{m^3}{s}$.</p>	5
2 a	Als Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades hat der Graph von g höchstens drei Extrempunkte. Diese liegen im dargestellten Bereich.	3

b	$a = 4$ und $a = 5$	2
c	Der Graph von g ist im Punkt $(3 g(3))$ streng monoton fallend und rechtsgekrümmt. Damit ist $g'(3) < 0$ und $g''(3) < 0$, der Wert des Terms also positiv.	4
		40

4 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen ¹						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2			I		I	I	X		
b	2			I	I		I	X		
c	3		III	II	II					X
d	3					II			X	
e	4			I		I		X		
f	4			I		I	I	X		
g	3		III			II				X
h	5			I		II	I		X	
i	5			II		II	II		X	
2 a	3	II			II	II			X	
b	2	II	II		II				X	
c	4	III			II		II			X

5 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

¹ Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.