Kompetenzstufenmodell Mathematik Sek I

Das Globalmodell wurde im Zusammenhang mit dem IQB-Ländervergleich in Mathematik und Naturwissenschaften 2012 überarbeitet.

Die Beschreibung des Globalmodells ist aus dem Bericht zum Ländervergleich 2012 entnommen.

Der Berichtsband zum Ländervergleich ist beim Waxmann-Verlag unter dem Titel „IQB-Ländervergleich 2012. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I“ erschienen (Herausgeber: Hans Anand Pant, Petra Stanat, Ulrich Schroeders, Alexander Roppelt, Thilo Siegle & Claudia Pöhlmann).

Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss und den Mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik

(Vorbehaltlich redaktioneller Änderungen)

Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 20./21.10.2011

Auf Grundlage des Ländervergleichs 2012 überarbeitete Version in der Fassung vom 11.10.2013

3.2 Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik

Werner Blum, Alexander Roppelt und Marcel Müller

Für die Bildungsstandards im Fach Mathematik am Ende der Sekundarstufe I liegen ein Kompetenzstufenmodell für das Fach insgesamt (Globalmodell) sowie feiner differenzierte Stufenbeschreibungen für die fünf inhaltlichen Kompetenzbereiche (Leitideen) vor. Das im Folgenden beschriebene Kompetenzstufenmodell mit seinen Ausdifferenzierungen gilt gemeinsam für den Hauptschulabschluss (HSA) und den Mittleren Schulabschluss (MSA). Es ist aus den ursprünglich getrennten Modellen für den HSA und den MSA hervorgegangen, die bereits im Jahr 2008 (MSA) beziehungsweise im Jahr 2009 (HSA) von der Kultusministerkonferenz (KMK) verabschiedet worden waren. Diesen beiden Modellen lag eine große Zahl gemeinsamer Aufgaben zugrunde. Demgemäß wurden bei den Beschreibungen der Stufen viele ähnliche Formulierungen verwendet, wobei die Stufen im MSA-Modell gegenüber den entsprechenden Stufen im HSA-Modell systematisch nach oben verschoben waren. Aufgrund ihrer Ähnlichkeiten ließen sich die beiden Modelle zum hier beschriebenen gemeinsamen Kompetenzstufenmodell für den HSA und den MSA integrieren.

Die Integration der beiden Modelle trägt der schulstrukturellen Entwicklung in vielen Ländern der Bundesrepublik Deutschland in den letzten Jahren Rechnung, die dazu führt, dass die Abgrenzung zwischen HSA- und MSA-Bildungsgängen zunehmend schwieriger wird. Dies manifestiert sich unter anderem in der Tendenz zu zweigliedrigen Schulsystemen sowie in der Tendenz, den MSA als den Regelabschluss der Sekundarstufe I anzusehen. Die schulstrukturellen Entwicklungen in den Ländern waren und sind zudem verbunden mit einer erhöhten Durchlässigkeit zwischen den Bildungsgängen, insbesondere mit der Möglichkeit für Schülerinnen und Schüler aus Bildungsgängen, die zum HSA führen, nachträglich auch den MSA zu erwerben. Eine getrennte Ausweisung von Kompetenzstufenmodellen für die beiden Bildungsgänge erschien deshalb nicht mehr angemessen. Mit Beschluss der KMK im Jahr 2011 ersetzt das im Folgenden dargestellte integrierte Kompetenzstufenmodell die beiden getrennten Modelle für den HSA und den MSA und ermöglicht es, die Verteilung der Gesamtpopulation der Neuntklässlerinnen und Neuntklässler auf die Stufen abzubilden. Damit wird auch ein übersichtlicher Bezug zwischen den Mindest-, Regel- und Optimalstandards in den beiden Bildungsgängen hergestellt (siehe Tabelle 2.1).

Im Folgenden werden die einzelnen Stufen des integrierten Modells genauer beschrieben, indem typische Anforderungen dargestellt werden, die die Aufgaben auf der jeweiligen Stufe zu ihrer Lösung verlangen. Dabei werden die Stufen zuerst in eher globaler Weise über die fünf Leitideen hinweg charakterisiert (Abschnitt 3.2.1) sowie anschließend mit stärkerem Fokus auf die Inhalte getrennt nach den einzelnen Leitideen (Abschnitte 3.2.2–3.2.7). Beispielaufgaben zur Illustration der einzelnen Kompetenzstufen finden sich in den Abbildungen 3.3–3.5.

Quelle: Pant, H. A., Stanat, P., Schroeders, U., Roppelt, A., Siegle, T. & Pöhlmann, C. (Hrsg.). (2013). IQB-Ländervergleich 2012. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I. Münster: Waxmann.

Tabelle 3.1: Kompetenzstufengrenzen und Standards des integrierten Kompetenzstufenmodells für den Mittleren Schulabschluss und den Hauptschulabschluss im Fach Mathematik

Kompetenzstufen	Punktwerte	Standards Mittlerer Schulabschluss	Standards Hauptschulabschluss
V	675 und darüber	Optimalstandard	
IV	595 bis 674	Regelstandard plus	Optimalstandard
III	515 bis 594	Regelstandard	Regelstandard plus
II	435 bis 514	Mindeststandard	Regelstandard
I.b	355 bis 434		Mindeststandard
I.a	unter 355		

3.2.1 Globalmodell

Kompetenzstufe I.a (Punktwerte unter 355)

Schülerinnen und Schüler am oberen Ende dieser Kompetenzstufe können aus sehr kurzen mathematikhaltigen Texten oder bekannten Darstellungen einzelne Informationen entnehmen und einschrittige Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen oder mit entsprechenden Größen (z. B. Längen) durchführen. Sie können einfache ebene oder räumliche Objekte (z. B. Quadrat, Rechteck oder Würfel) benennen und skizzieren sowie deren Maße ausrechnen, sofern sie ganzzahlig sind. Weiterhin können sie Trefferchancen bei einfachen vertrauten Zufallsexperimenten (z. B. beim Ziehen aus einer Urne) nach Größe vergleichen. Die beherrschten mathematischen Tätigkeiten auf dieser Stufe beschränken sich durchweg auf gut bekannte Routineverfahren, während Argumentationen und Begründungen noch nicht bewältigt werden.

Insgesamt gehen die Kompetenzen auf dieser Stufe nicht über solche hinaus, die bereits in der Grundschule gefordert waren. Schülerinnen und Schüler auf dieser Stufe verfehlen selbst die Mindestanforderungen für den HSA. Sie werden vermutlich nicht in der Lage sein, selbst einfache mathematikhaltige Situationen in Alltag und Beruf zu bewältigen (z. B. einen „Dreisatzschluss“ durchzuführen oder einen Prozentwert zu berechnen).

Kompetenzstufe I.b (Punktwerte von 355 bis 434)

Schülerinnen und Schüler auf dieser Kompetenzstufe können direkt erkennbare Standardmodelle in vertrauten Realkontexten anwenden (z. B. ein Proportionalmodell für „Dreisatzschlüsse“) und aus überschaubaren Texten einzelne Informationen entnehmen. Sie können einfache Prozentwerte berechnen, mit einfachen Termen mit einer Variablen rechnen und Werte in einfache Formeln einsetzen (z. B. vom Typ $a = b \cdot c$). Die Schülerinnen und Schüler können direkte Beziehungen zwischen einfachen Polyedern (wie Quadern) und deren Netzen herstellen sowie Wahrscheinlichkeiten für Elementarereignisse bei vertrauten Zufallsexperimenten (z. B. Würfeln oder Lose ziehen) berechnen. Weiterhin können sie vorgegebene Standardargumentationen nachvollziehen.

Die Kompetenzen auf dieser Stufe sollten typischerweise bis etwa zum siebten Schuljahr des Hauptschulbildungsganges erreicht werden. Dies bedeutet, dass auf dieser Stufe nun auch einige basale Bereiche der Hauptschulmathematik beherrscht werden. Man kann hier von einem *Mindeststandard* für den HSA

Abbildung 3.3: Beispielaufgaben auf der Kompetenzstufenskala Mathematik (1)

V

705

Stadion 2:

Ein Fußballstadion hat 14 600 Plätze, davon sind 5 300 Sitzplätze und 9 300 Stehplätze. Ein Sitzplatz kostet 14,00 € und ein Stehplatz 5,00 €.

Welche Belegungen des Stadions ergeben eine Einnahme von 100 000,- €?

Es gibt mehrere Möglichkeiten. Gib zwei davon konkret an. Schreib auf, wie du zu diesen Ergebnissen gekommen bist.

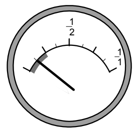
675

IV

645

Tankanzeige:

Der Tank des Autos von Herrn Müller fasst laut Hersteller maximal 55 Liter. An der Tankanzeige erkennt man den aktuellen Füllstand:



Die nächste Tankstelle ist 60 km entfernt. Kann Herr Müller bei einem durchschnittlichen Benzinverbrauch von 7,5 Liter pro 100 km noch bis zu dieser Tankstelle fahren? Begründe deine Antwort.

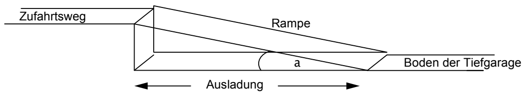
595

III

535

Tiefgarage 1:

Die Rampe zu einer Tiefgarage hat eine Ausladung (siehe Bild) von 15 m. Der Boden der Tiefgarage liegt 2,90 m tiefer als der Zufahrtsweg.



Welche Länge hat die Rampe?

Kreuze die Zahl an, die deiner Berechnung am nächsten kommt.

- ☐ 12,10 m
- ☐ 14,70 m
- ☐ 15,30 m
- ☐ 17,90 m

515

II

515

Zapfsäule 1:

Eine Tankstelle informiert mit dem Aufkleber „Je Euro 73 Cent Steuern" über die Steuerbelastung beim Benzinpreis.

Wie viel erhält der Staat bei der dargestellten Tankfüllung an Steuern?

Kreuze die richtige Antwort an.

- ☐ 15,80 €
- ☐ 34,47 €
- ☐ 42,71 €
- ☐ 73,00 €
- ☐ 90,45 €

435

I.b

425

Blitz und Donner:

Bei einem Gewitter kann man über die Zeit, die zwischen Blitz und Donner vergeht, die Entfernung des Gewitters berechnen. Bei einem Herbstgewitter liegen zwischen Blitz und Donner 6 Sekunden.

Wie weit ist das Gewitter ungefähr entfernt, wenn der Schall pro Sekunde ca. 0,3 km zurücklegt?

Kreuze die richtige Lösung an.

- ☐ 1,8 km
- ☐ 6,3 km
- ☐ 18 km
- ☐ 20 km

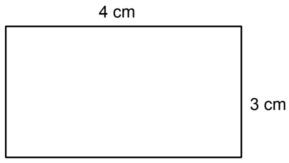
355

I.a

335

Rechteck:

Ein Rechteck ist 4 cm lang und 3 cm breit. Wie groß ist sein Flächeninhalt? Kreuze an.

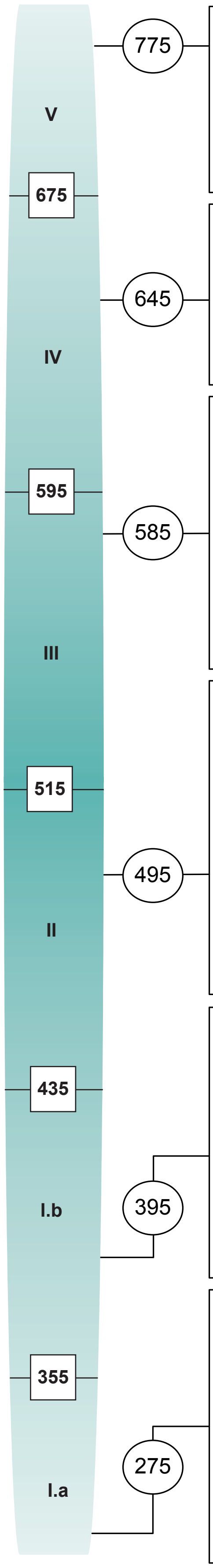


(Zeichnung nicht maßgetreu)

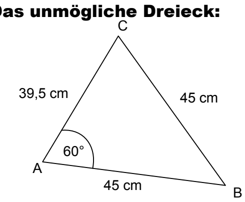
- ☐ 12 cm²
- ☐ 7 cm
- ☐ 7 cm²
- ☐ 12 cm
- ☐ 14 cm

Anmerkung. Aus Platzgründen sind die Aufgabenbeispiele in modifiziertem Layout dargestellt.

Abbildung 3.4: Beispielaufgaben auf der Kompetenzstufenskala Mathematik (2)

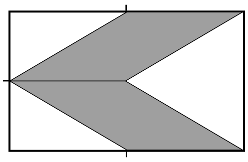


Das unmögliche Dreieck:



Begründe, warum es kein Dreieck mit diesen Maßen geben kann.

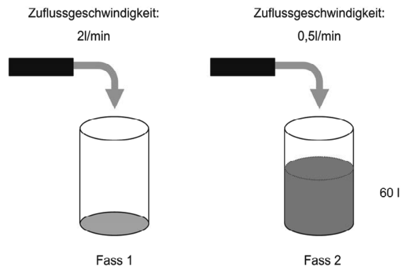
Parallelogramm:



In einem Rechteck wurden drei Seitenmitten markiert und zwei Parallelogramme eingezeichnet (siehe Bild).

Welcher Bruchteil des Rechtecks ist dunkel gefärbt? Schreib auf, wie du zu deinem Ergebnis gekommen bist.

Zwei Fässer 1:



Jedes der beiden dargestellten Fässer fasst genau 100 l. Sie werden mit Wasser gefüllt. Zu Beginn des Füllvorgangs enthält Fass 2 bereits 60 l. Fass 1 wird mit 2 l/min gleichmäßig gefüllt, Fass 2 mit 0,5 l/min.

Stimmt es, dass Fass 2 zuerst überläuft? Schreibe auf, wie du zu deiner Entscheidung gekommen bist.

Brüche vergleichen:
Welcher der beiden Brüche $\frac{2}{5}$ und $\frac{4}{7}$ ist kleiner?

Kreuze die Antwort mit der richtigen Begründung an.

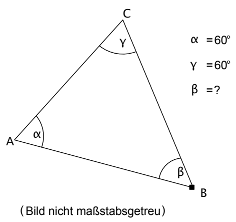
☐ $\frac{2}{5}$ ist kleiner als $\frac{4}{7}$, weil der Zähler von $\frac{2}{5}$ kleiner ist als der Zähler von $\frac{4}{7}$.

☐ $\frac{2}{5}$ ist kleiner als $\frac{4}{7}$, weil 2 von 5 Teilen weniger als die Hälfte ist und 4 von 7 Teilen mehr als die Hälfte.

☐ $\frac{4}{7}$ ist kleiner als $\frac{2}{5}$, weil der Nenner von $\frac{4}{7}$ größer ist als der Nenner von $\frac{2}{5}$.

☐ $\frac{2}{5}$ ist größer als $\frac{4}{7}$, weil der Zähler bei $\frac{2}{5}$ nur durch 5 und nicht durch 7 geteilt wird.

Dreieckswinkel 1:
Tim ist sich sicher, dass der gesuchte Winkel β eine Größe von 60° hat. Was meinst du dazu?



Kreuze die richtige Antwort an.

☐ Die Frage kann ohne weitere Angaben zu den Seitenlängen des Dreiecks nicht beantwortet werden, da das Dreieck durch die Angabe der Winkel α und γ nicht eindeutig bestimmt ist.

☐ Da die Innenwinkelsumme in einem Dreieck immer 180° beträgt, gilt $\beta = 180° - (60° + 60°) = 60°$.

☐ $\beta = 60°$, da nach dem Satz des Pythagoras gilt: $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$

☐ Wegen $\alpha = \gamma$ ist das Dreieck gleichschenklig, mit $\overline{AC}$ als Basis. Deshalb ist β kleiner als α und γ, ungefähr 50°.

Rapido:
Aus der Preistabelle des Paketdienstes „Rapido" kann man zu jedem Paketgewicht den zugehörigen Preis ablesen:

Bis 1 kg	3,50 €
Über 1 kg bis 2 kg	4,00 €
Über 2 kg bis 3 kg	4,50 €
Über 3 kg bis 5 kg	5,00 €
Über 5 kg bis 8 kg	5,50 €
Über 8 kg bis 10 kg	6,00 €

Beantworte mit Hilfe der Tabelle folgende Frage: Wie viel kostet ein Paket, das 9 kg wiegt?

Kreuze die richtige Lösung an.

☐ 5,50 €

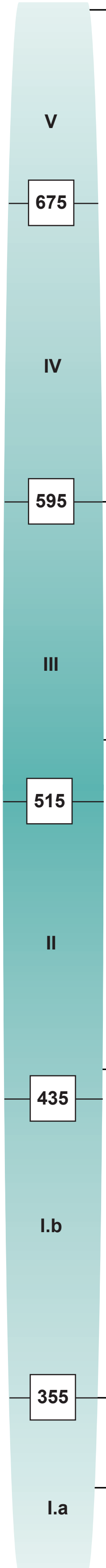
☐ 9,00 €

☐ 6,00 €

☐ 13,50 €

Anmerkung. Aus Platzgründen sind die Aufgabenbeispiele in modifiziertem Layout dargestellt.

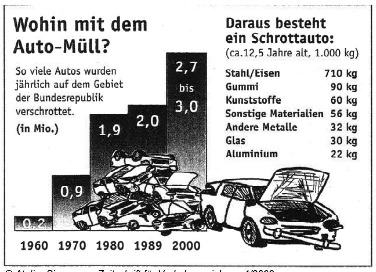
Abbildung 3.5: Beispielaufgaben auf der Kompetenzstufenskala Mathematik (3)



725

Automüll:
Das folgende Diagramm zeigt die zahlenmäßige Entwicklung der verschrotteten Autos in Deutschland. Weiter sind auch die durchschnittlichen Materialbestandteile eines Schrottautos angegeben.

Kreuze jeweils an, ob die Aussage richtig oder falsch ist.



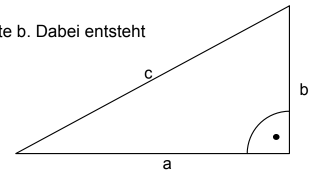
© Atelier Siems, aus Zeitschrift für Verkehrserziehung 4/2003, Verlag Heinrich Vogel, München

	richtig	falsch
Von 1970 bis 2000 hat sich die Anzahl der jährlich verschrotteten Autos mindestens verdreifacht.	☐	☐
Der absolute Anstieg der Anzahl der Schrottautos von 1960 bis 1970 und von 1989 bis 2000 ist etwa gleich groß.	☐	☐
In den Jahren von 1980 bis einschließlich 1989 sind insgesamt zwei Millionen Autos verschrottet worden.	☐	☐
1989 wurden etwa 100000 Autos mehr verschrottet als 1980.	☐	☐
Ein Schrottauto besteht zu mehr als $\frac{3}{4}$ aus Stahl- und Eisenteilen.	☐	☐
Bei einem Schrottauto machen Gummiteile 9 % der Gesamtmasse aus.	☐	☐

595

Rotation 1:
Das nebenstehende rechtwinklige Dreieck rotiert um die Kathete b. Dabei entsteht ein Körper. Was für ein Körper entsteht?

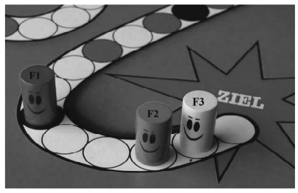
Kreuze an.



☐ Pyramide ☐ Kreiszylinder ☐ Kreiskegel ☐ Quader ☐ Kugel

535

Conflix 1:
Das Foto zeigt eine Spielsituation kurz vor dem Erreichen des Zielfeldes. Die Figur F1 ist am Zug, danach wäre F2 an der Reihe, dann F3. Wer an der Reihe ist, würfelt mit einem normalen Spielwürfel und kann dann die gewürfelte Augenzahl in Richtung Ziel weiterziehen. Falls die Figur damit auf ein Feld kommt, wo schon eine gegnerische Figur steht, wird diese hinausgeworfen. Das Zielfeld muss punktgenau erreicht werden, bei einer größeren Augenzahl muss man stehen bleiben. Z. B. braucht F3 genau eine „2", um ins Ziel zu kommen.



Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht F1 mit dem nächsten Wurf das Ziel?

Kreuze an.

☐ 6 ☐ 1/6 ☐ 6 % ☐ 60 % ☐ Das kann man nicht wissen

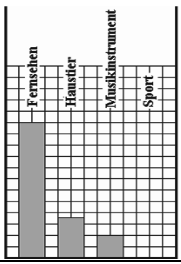
445

Freizeitverhalten1:
Eine Umfrage zum Freizeitverhalten von 25 Schülerinnen und Schülern einer 8. Klasse hat ergeben, dass

24 regelmäßig fernsehen,
7 ein Haustier pflegen,
4 ein Musikinstrument spielen,
9 regelmäßig Sport treiben.

Das nebenstehende Diagramm soll dies darstellen.

Ergänze im Diagramm die Säule für Sport.



355

Schlüsselbund:
Gaby hat an ihrem Schlüsselbund 3 Schlüssel, die sich sehr ähnlich sehen, aber für verschiedene Türen vorgesehen sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Tür mit dem ersten Schlüssel, den sie zufällig probiert, aufgeht?

Kreuze an.

☐ 1/6 ☐ 0,3 ☐ 1/3 ☐ 1/2 ☐ 1

345

Feriengeld:
Wenn Beate jeden Tag 10 € ausgibt, reicht ihr Feriengeld für 9 Tage. Wie lange reicht es, wenn Beate nur 6 € täglich ausgibt?

Kreuze an.

☐ 5 Tage ☐ 10 Tage ☐ 15 Tage ☐ 20 Tage ☐ 25 Tage

Anmerkung. Aus Platzgründen sind die Aufgabenbeispiele in modifiziertem Layout dargestellt.

sprechen, den jede Schülerin und jeder Schüler dieses Bildungsgangs erreichen sollte. Allerdings besteht auch für diese Schülerinnen und Schüler noch die Gefahr, dass sie in typischen mathematikhaltigen schulischen, alltäglichen oder beruflichen Situationen nicht ohne Hilfe zurechtkommen.

Kompetenzstufe II (Punktwerte von 435 bis 514)

Schülerinnen und Schüler auf dieser Kompetenzstufe können einfache Aufgaben mit bekannten Verfahren lösen (z.B. die Grundaufgaben der Prozentrechnung) und wenigschrittige Operationen mit einfachem Zahlenmaterial (auch im Realkontext) durchführen. Sie können Beziehungen zwischen Mathematik und Realität herstellen, denen lineare Modelle zugrunde liegen. Diese Schülerinnen und Schüler sind ferner in der Lage, einfache geometrische Konstruktionen durchzuführen (wie das Zeichnen von Drei- und Vierecken) und Winkelgrößen in solchen Figuren zu bestimmen. Des Weiteren können sie Beziehungen zwischen zwei vertrauten Darstellungen (z.B. zwischen Text und Tabelle) herstellen und mehrere Werte aus solchen Darstellungen (z.B. Balkendiagrammen) ablesen. Sie können relevante Informationen aus mehreren gegebenen auswählen und einfachste Standardargumentationen durchführen.

Die Kompetenzen auf dieser Stufe umfassen grundlegende Methoden und Verfahren der Sekundarstufe I, die jede Schülerin und jeder Schüler, die beziehungsweise der den MSA anstrebt, beherrschen sollte. Sie konstituieren somit einen *Mindeststandard* für den MSA. Für den HSA kann dies bereits als der *Regelstandard* angesehen werden, den die Schülerinnen und Schüler dieses Bildungsgangs zumindest im Durchschnitt erreichen sollten.

Kompetenzstufe III (Punktwerte von 515 bis 594)

Schülerinnen und Schüler auf dieser Kompetenzstufe können Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung einer naheliegenden Strategie erfordert, und sind in der Lage, überschaubare Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse selbstständig darzustellen. Sie können wenigschrittige Operationen mit Zahlen oder Größen auch rückwärts durchführen und geometrische Berechnungen ausführen (z.B. Flächeninhaltsberechnungen bei zusammengesetzten Figuren oder Längenberechnungen mit Hilfe des Satzes des Pythagoras). Weiterhin können sie einem mathematischen Modell passende Situationen zuordnen und selber Modellierungen vornehmen, die wenige Schritte erfordern und vertraute Kontexte beinhalten. Schülerinnen und Schüler auf dieser Stufe sind ferner in der Lage, einschrittige Operationen mit Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen sowie einfache Argumentationen in einem überschaubaren mathematischen Kontext durchzuführen. Zudem können diese Schülerinnen und Schüler Wahrscheinlichkeiten auch bei mehrstufigen vertrauten Zufallsexperimenten berechnen.

Diese Stufe ist durch mathematische Kompetenzen gekennzeichnet, die als typisch für die Sekundarstufe I gelten können. Sie konstituieren eine mathematische Grundbildung, die zum verständigen Handeln in typischen Berufs- und Alltagssituationen befähigt und einen Übergang in die Sekundarstufe II ermöglicht. Hier kann man vom *Regelstandard* für den MSA sprechen, den die Schülerinnen und Schüler dieses Bildungsgangs zumindest im Durchschnitt erreichen sollten. Für Schülerinnen und Schüler, die den HSA anstreben, kann dies bereits als *Regelstandard plus* angesehen werden.

Kompetenzstufe IV (Punktwerte von 595 bis 674)

Schülerinnen und Schüler auf dieser Kompetenzstufe können mehrschrittige Operationen mit Zahlen (auch Bruchzahlen), Größen (u.a. Flächeninhalte und Volumina) oder Variablen durchführen und Längen in komplexeren geometrischen Konfigurationen (z.B. in Vielecken oder Quadern) mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen. Sie können Informationen auch aus längeren mathematikhaltigen Texten zielgerichtet entnehmen und Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung einer selbstentwickelten Strategie erfordert. Weiterhin sind sie in der Lage, überschaubare mehrschrittige Modellierungen (insbesondere mit linearen Funktionen) und ebensolche Argumentationen (z.B. über Beziehungen zwischen Figureneigenschaften) zu entwickeln. Auch nicht lineare funktionale Zusammenhänge (z.B. Beziehungen zwischen Graph und Term bei quadratischen Funktionen oder Veränderungen von Flächeninhalt und Volumen bei Veränderung der Seitenlängen) werden auf dieser Stufe beherrscht. Diese Schülerinnen und Schüler können eigene Darstellungen zu gegebenen Daten entwickeln (z.B. Kreisdiagramme) und Wahrscheinlichkeiten auch bei mehrstufigen Zufallsexperimenten berechnen.

Die auf dieser Stufe gezeigten Kompetenzen gehen über die grundlegenden Zielsetzungen der Bildungsstandards für die Sekundarstufe I hinaus und bilden ein Kompetenzniveau ab, das auf der Basis curricularer Vorgaben das eigentliche Ziel des schulischen Unterrichts sein sollte. Für die Schülerinnen und Schüler, die einen MSA anstreben, könnte man von einem *Regelstandards plus* sprechen; für den HSA bildet diese Stufe bereits den *Optimalstandard*.

Kompetenzstufe V (Punktwerte ab 675)

Schülerinnen und Schüler auf dieser Kompetenzstufe können Möglichkeiten und Grenzen der Nutzung mathematischer Operationen reflektieren und Lösungsverfahren bewerten. Sie können zudem umfangreiche oder logisch komplexe mathematikhaltige Texte Sinn entnehmend erfassen, anspruchsvolle Probleme bearbeiten und Lösungswege reflektieren. Auch zu komplexeren außermathematischen Problemsituationen können sie mathematische Modelle entwickeln und verwendete Modelle kritisch beurteilen. Schülerinnen und Schüler auf dieser Stufe sind weiterhin in der Lage, komplexe Darstellungen anzufertigen und verschiedene Formen von Darstellungen zu beurteilen. Sie können sowohl algebraisch rechnen als auch selbstständig Algebraisierungen durchführen (z.B. geometrische Formeln entwickeln oder Terme zu rekursiv gegebenen Folgen aufstellen). Auch Berechnungen mit Hilfe trigonometrischer Beziehungen oder der Strahlensätze werden auf dieser Stufe beherrscht. Weiterhin können diese Schülerinnen und Schüler komplexe Argumentationen erläutern, selbst entwickeln und bewerten.

Schülerinnen und Schüler auf dieser Stufe haben einen Leistungsstand erreicht, der über die Zielsetzungen der Sekundarstufe I hinausgeht und nur bei optimalen schulischen und außerschulischen Lehr-Lern-Bedingungen erwartet werden kann. Man kann hier von einem *Optimalstandard* für den MSA sprechen. Schülerinnen und Schüler, die den HSA anstreben, werden wohl nur in Ausnahmefällen diese Stufe erreichen.

3.2.2 Leitidee Zahl

Kompetenzstufe I.a (Punktwerte unter 355)

Schülerinnen und Schüler am oberen Ende dieser Kompetenzstufe können Grundoperationen mit natürlichen Zahlen ausführen, auch im Kontext von Situationen aus dem täglichen Leben.

Kompetenzstufe I.b (Punktwerte von 355 bis 434)

Schülerinnen und Schüler auf dieser Stufe können einschrittige Grundoperationen mit Bruch- oder Prozentzahlen in überschaubaren Realkontexten ausführen (z. B. einfache Prozentwerte berechnen) und zwischen verschiedenen Darstellungen bei natürlichen Zahlen oder einfachen Prozentangaben übersetzen. Sie können direkt erkennbare arithmetische Modelle in vertrauten Realkontexten anwenden sowie Terme aufstellen und Gleichungen lösen, die ausschließlich natürliche Zahlen beinhalten und lediglich die Ausführung von Grundoperationen erfordern.

Kompetenzstufe II (Punktwerte von 435 bis 514)

Schülerinnen und Schüler auf dieser Kompetenzstufe können wenigschrittige Operationen mit Bruchzahlen und Prozenten ausführen, zu den Grundoperationen die dazugehörigen Umkehroperationen (in überschaubaren und vertrauten Realkontexten) anwenden und zwischen Prozent-, Bruch- und Verhältnisschreibweise im Kontext übersetzen. Sie können Kleiner-größer-Beziehungen zwischen einfachen Bruchzahlen erkennen sowie Zusammenhänge bezüglich Grundoperationen bei konkreten Zahlen erkennen und begründet darlegen (z. B. gerade Zahl + gerade Zahl = gerade Zahl).

Kompetenzstufe III (Punktwerte von 515 bis 594)

Schülerinnen und Schüler auf dieser Kompetenzstufe sind in der Lage, vielschrittige Operationen mit Bruchzahlen und Prozenten durchzuführen und auf Richtigkeit zu prüfen, in überschaubaren Fällen auch in umgekehrter Richtung. Sie können das arithmetische Mittel von gegebenen Daten berechnen, einfache Rechnungen mit Quadratwurzeln ausführen und Teilbarkeitsregeln anwenden.

Kompetenzstufe IV (Punktwerte von 595 bis 674)

Schülerinnen und Schüler auf dieser Kompetenzstufe können Rechengesetze zur Potenzrechnung anwenden und mehrschrittige kombinatorische Überlegungen in Realsituationen durchführen. Sie erkennen Kleiner-größer-Relationen zwischen verschiedenen Zahlen, die unterschiedlich dargestellt sind (z. B. Bruch, Prozent, Dezimalbruch), auch im Kontext.

Kompetenzstufe V (Punktwerte ab 675)

Schülerinnen und Schüler auf dieser Kompetenzstufe können mehrschrittige Operationen (vorwärts oder rückwärts) mit Dezimalzahlen durchführen und Begründungen für Operationen mit Bruchzahlen geben. Sie sind in der Lage, die Grundoperationen bei Brüchen auch mit Variablen durchzuführen und in komplexen Realsituationen gegebene Aussagen zu Prozenten zu beurteilen.

3.2.3 Leitidee Messen

Kompetenzstufe I.a (Punktwerte unter 355)

Schülerinnen und Schüler am oberen Ende dieser Kompetenzstufe können vertraute Größenangaben (z. B. Gewichte) miteinander vergleichen. Weiterhin können sie Inhalte von einfachen ebenen oder räumlichen Objekten (Rechteck, Würfel) ausrechnen, sofern diese ganzzahlig sind.

Kompetenzstufe I.b (Punktwerte von 355 bis 434)

Diese Schülerinnen und Schüler können mit ganzzahligen Größen in vertrauten Realkontexten rechnen und einfache Entfernungen (z. B. zwischen Punkt und Gerade) mit dem Geodreieck bestimmen. Sie können Flächeninhalte von aus Rechtecken zusammengesetzten Figuren miteinander vergleichen und bei zwei gegebenen Winkeln im Dreieck den dritten Winkel bestimmen.

Kompetenzstufe II (Punktwerte von 435 bis 514)

Diese Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, Entfernungen zwischen parallelen Geraden mit dem Geodreieck zu bestimmen, Winkelgrößen in Drei- und Vierecken unter Verwendung von Winkelsätzen zu bestimmen und Volumina von aus Würfeln zusammengesetzten Körpern miteinander zu vergleichen. Sie können Flächeninhalt, Umfang und Seitenlängen bei Rechtecken in Beziehung zueinander setzen und auch Umfang beziehungsweise Flächeninhalt von Kreisen bestimmen.

Kompetenzstufe III (Punktwerte von 515 bis 594)

Diese Schülerinnen und Schüler können mehrschrittige geometrische Berechnungen ausführen (z. B. Flächeninhalte bei aus n-Ecken zusammengesetzten Figuren oder Längen mit Hilfe des Satzes des Pythagoras berechnen). Sie können Grundoperationen mit Größen verschiedener Einheiten im Realkontext durchführen beziehungsweise diesbezügliche Rechnungen beurteilen und auch Berechnungen an Kreisen in überschaubaren Realkontexten durchführen.

Kompetenzstufe IV (Punktwerte von 595 bis 674)

Diese Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, Formeln zur Berechnung verschiedener Größen bei n-Ecken oder Quadern aufzustellen beziehungsweise passende Formeln zuzuordnen. Sie können Längen in komplexeren geometrischen Konfigurationen (z. B. in Vielecken oder Quadern, etwa die Raumdiagonale eines Würfels) mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen und Flächen von n-Ecken bezüglich Inhalt oder Umfang begründet miteinander vergleichen. Weiterhin können sie maßstäbliche Umrechnungen vornehmen und Größen realer Objekte durch Modellierung bestimmen (z. B. Flächeninhalt einer Hand).

Kompetenzstufe V (Punktwerte ab 675)

Diese Schülerinnen und Schüler können Flächeninhaltsformeln herleiten und Berechnungen mit Hilfe trigonometrischer Beziehungen oder der Strahlensätze durchführen. Sie können auch Existenzaussagen über geometrische Figuren begründet darlegen.

3.2.4 Leitidee Raum und Form

Kompetenzstufe I.a (Punktwerte unter 355)

Schülerinnen und Schüler am oberen Ende dieser Kompetenzstufe können einfache ebene oder räumliche Objekte (z. B. Quadrat, Rechteck, Dreieck oder Würfel) benennen und skizzieren.

Kompetenzstufe I.b (Punktwerte von 355 bis 434)

Diese Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, einfache geometrische Objekte in Realkontexten zu erkennen. Sie können Gitterpunkt-n-Ecke an einer achsenparallelen Geraden im Koordinatensystem spiegeln, die Koordinaten eines gegebenen Punktes ablesen sowie zu gegebenen Koordinaten den entsprechenden Punkt zeichnen. Weiterhin können sie die Symmetrieachsen eines Quadrats bestimmen und direkte Beziehungen zwischen einfachen Polyedern (wie Quadern) und deren Netzen herstellen.

Kompetenzstufe II (Punktwerte von 435 bis 514)

Diese Schülerinnen und Schüler können einfache geometrische Figuren (z. B. Dreiecke) im kartesischen Koordinatensystem darstellen und einfache geometrische Konstruktionen durchführen (wie das Zeichnen von Drei- und Vierecken oder die Punktspiegelung eines gegebenen Punktes). Sie können geometrische Eigenschaften entsprechenden Vierecken zuordnen und gegebene Aussagen zur Beziehung paralleler und orthogonaler Geraden auf ihre Korrektheit überprüfen.

Kompetenzstufe III (Punktwerte von 515 bis 594)

Diese Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, die Symmetrieachsen bei krummlinigen Figuren zu bestimmen und zu gegebener Figur und Bildfigur das Zentrum einer Punktspiegelung zu ermitteln. Sie können auch komplexere geometrische Strukturen in der Umwelt erkennen und diese fortführen (z. B. unvollständige Pflasterungen), anhand der Dreiecksungleichung die Konstruierbarkeit von Dreiecken beurteilen sowie komplexere Beziehungen zwischen Polyedern und deren Netzen herstellen (z. B. Schnittlinien im Netz markieren).

Kompetenzstufe IV (Punktwerte von 595 bis 674)

Diese Schülerinnen und Schüler können begründen, warum eine Figur nicht achsensymmetrisch ist, und anhand der Dreiecksungleichung nicht nur die Konstruierbarkeit von Dreiecken beurteilen, sondern auch eine richtige Begründung hierfür identifizieren. Sie sind in der Lage, Aussagen zur Beziehung von Geraden in der Ebene zu treffen (z. B. maximale Anzahl der Schnittpunkte) und allgemeingültige Aussagen über Beziehungen zwischen bekannten geometrischen Figuren (z. B. Quadrat und Rechteck) zu beurteilen.

Kompetenzstufe V (Punktwerte ab 675)

Diese Schülerinnen und Schüler können einer einfachen geometrischen Figur (z. B. Dreieck) den zugehörigen Rotationskörper zuordnen sowie dessen Volumen berechnen und gegebene Netze zusammengesetzter Köper diesen zuordnen. Weiterhin können sie Winkelgrößen in komplexen Figuren begründet miteinander in Beziehung setzen und den Satz des Pythagoras begründet auf andere Flächen (z.B. gleichseitiges Dreieck oder Halbkreis) beim rechtwinkligen Dreieck übertragen.

3.2.5 Leitidee Funktionaler Zusammenhang

Kompetenzstufe I.a (Punktwerte unter 355)

Schülerinnen und Schüler am oberen Ende dieser Kompetenzstufe können einfache lineare Gleichungen lösen und einzelne Werte aus Graphen oder Tabellen ablesen.

Kompetenzstufe I.b (Punktwerte von 355 bis 434)

Diese Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, direkt erkennbare Standardmodelle für Beziehungen zwischen Größen in vertrauten Realkontexten anzuwenden (z.B. ein Proportionalmodell für „Dreisatzschlüsse“) und einzelne Werte innerhalb solcher Realkontexte zu bestimmen. Weiter können sie bei inhaltlich gegebenen einfachen Folgen die unmittelbar nächsten Folgenglieder ermitteln.

Kompetenzstufe II (Punktwerte von 435 bis 514)

Diese Schülerinnen und Schüler können Beziehungen zwischen Mathematik und Realität herstellen, denen lineare Modelle zugrunde liegen, also gegebene lineare Gleichungen entsprechenden realen Kontexten zuordnen und umgekehrt einfache Realsituationen passenden gegebenen Funktionstypen zuordnen. Sie können anhand einer verbal beschriebenen Zuordnungsvorschrift im Realkontext konkrete x- und y-Werte bestimmen und bei inhaltlich gegebenen Folgen weitere Folgenglieder ermitteln. Weiter sind sie in der Lage, gegebene einfache Behälter und Füllgraphen einander korrekt zuzuordnen.

Kompetenzstufe III (Punktwerte von 515 bis 594)

Diese Schülerinnen und Schüler können einfachen Realsituationen passende lineare Ungleichungen zuordnen, durch lineare Gleichungen beschriebene realitätsbezogene Zuordnungsvorschriften inhaltlich interpretieren und lineare Modellierungen vornehmen, die vertraute Kontexte beinhalten. Weiter können sie bei tabellarisch dargestellten Folgen zu gegebenen Gliedern die dazugehörige Platznummer bestimmen.

Kompetenzstufe IV (Punktwerte von 595 bis 674)

Diese Schülerinnen und Schüler können zwischen einer verbalen Darstellung einer Realsituation und ihrer Darstellung durch Graphen einfache Beziehungen herstellen und überschaubare mehrschrittige Modellierungen (insbesondere mit linearen Funktionen) entwickeln. Anhand gegebener Weg-Zeit-Graphen linearer Funktionen können sie die zugehörigen Geschwindigkeiten bestimmen. Auch einfache nicht lineare funktionale Zusammenhänge können sie begründet erschließen (z.B. Beziehungen zwischen Graph und Term beziehungsweise Gleichung bei quadratischen Funktionen oder Veränderungen von Flächeninhalt und Volumen bei Veränderung der Seitenlängen).

Kompetenzstufe V (Punktwerte ab 675)

Diese Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, komplexere Modellierungen in einem funktionalen Kontext durchzuführen und zu realitätsbezogenen linearen Zusammenhängen begründet Stellung zu nehmen. Sie können auch in nicht linearen innermathematischen Kontexten schlüssige Argumentationen durchführen. Weiterhin können sie sowohl algebraisch rechnen als auch selbstständig Algebraisierungen durchführen (z. B. geometrische Formeln entwickeln oder Terme zu rekursiv oder inhaltlich gegebenen Folgen aufstellen).

3.2.6 Leitidee Daten und Zufall

Kompetenzstufe I.a (Punktwerte unter 355)

Schülerinnen und Schüler am oberen Ende dieser Kompetenzstufe können Trefferchancen bei einfachen vertrauten Zufallsexperimenten (z. B. beim Ziehen aus einer Urne) nach Größe vergleichen.

Kompetenzstufe I.b (Punktwerte von 355 bis 434)

Diese Schülerinnen und Schüler können einzelne Werte aus vertrauten Darstellungen von Daten (z. B. Balkendiagrammen) ablesen und Wahrscheinlichkeiten für Elementarereignisse bei vertrauten Zufallsexperimenten (z. B. Würfeln oder Lose ziehen) berechnen

Kompetenzstufe II (Punktwerte von 435 bis 514)

Diese Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, mehrere Werte aus vertrauten Darstellungen von Daten (z. B. Balkendiagrammen) abzulesen und solche Darstellungen um gegebene Daten zu ergänzen. Weiter können sie anhand gegebener Häufigkeiten einfache Argumente zu einer vorgegebenen realitätsbezogenen Aussage finden und Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse bei vertrauten Zufallsexperimenten berechnen.

Kompetenzstufe III (Punktwerte von 515 bis 594)

Diese Schülerinnen und Schüler können aus einer gegebenen Darstellung (z. B. Balkendiagramm) relative Häufigkeiten berechnen, die Äquivalenz einfacher Zufallsexperimente erkennen und einfache Wahrscheinlichkeiten bei vertrauten mehrstufigen Zufallsexperimenten berechnen.

Kompetenzstufe IV (Punktwerte von 595 bis 674)

Diese Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, eigene Darstellungen zu gegebenen Daten zu entwickeln (z. B. Kreisdiagramme für prozentuale Anteile) und anhand gegebener Häufigkeiten eine komplexe Argumentation zu einer vorgegebenen realitätsbezogenen Aussage zu finden. Weiterhin können sie Wahrscheinlichkeiten auch bei weniger vertrauten mehrstufigen Zufallsexperimenten berechnen.

Kompetenzstufe V (Punktwerte ab 675)

Diese Schülerinnen und Schüler können die Angemessenheit verschiedener Darstellungen von Daten beurteilen. Sie können selbst bei komplexeren Zufallsexperimenten (z. B. Galtonbrett) Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte bestimmen und vorgegebene Wahrscheinlichkeitsaussagen beurteilen. Umgekehrt können sie auch zu gegebenen Wahrscheinlichkeiten passende Zufallsexperimente angeben. Weiterhin sind sie in der Lage, bedingte Wahrscheinlichkeiten zu berechnen und die stochastische Unabhängigkeit bei mehrstufigen Zufallsexperimenten zu begründen.