

In einer Urne befinden sich rote und schwarze Kugeln; der Anteil der roten Kugeln ist p . In einem Zufallsexperiment wird so oft nacheinander jeweils eine Kugel entnommen und wieder zurückgelegt, bis entweder zum zweiten Mal eine rote oder zum zweiten Mal eine schwarze Kugel gezogen wird.

- a) Zeichnen Sie für dieses Zufallsexperiment ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm.
- b) Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der entnommenen roten Kugeln an. Zeigen Sie, dass für die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$ gilt: $P(X = 2) = -2p^3 + 3p^2$.
- c) Peter und Paul unterhalten sich darüber, wie sich die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$ verändert, falls p größer wird.
Peter meint, dass $P(X = 2)$ ebenfalls größer werden müsste, denn wenn sich die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, erhöht, muss auch die Wahrscheinlichkeit, zwei rote Kugeln zu ziehen, größer werden.
Paul entgegnet, dass es beim Ereignis $X = 2$ geschehen kann, dass man eine schwarze Kugel zieht. Da nun p größer wird, wird die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, kleiner, womit sich die Frage stellt, was den größeren Einfluss besitzt.
Nehmen Sie Stellung zu beiden Aussagen: Was ist hierbei richtig und was nicht?
Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$ umso größer wird, je größer p ist.

Die Zufallsgröße Z gibt die Anzahl der insgesamt entnommenen Kugeln an.

- d) Zeigen Sie, dass für die Wahrscheinlichkeit $P(Z = 2)$ gilt $P(Z = 2) = 2p^2 - 2p + 1$.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $P(Z = 3)$ in Abhängigkeit von p .
- e) Bestimmen Sie den Erwartungswert von Z in Abhängigkeit von p .
Ermitteln Sie denjenigen Wert von p , für den der Erwartungswert von Z einen Extremwert annimmt, und geben Sie Art und Wert des zugehörigen Extremums an.