a) Voraussetzungen: Die Geburtstage der Personen sind unabhängig voneinander; es gibt 365 verschiedene Geburtstage (Schaltjahre werden nicht berücksichtigt) und alle sind gleich wahrscheinlich.

$$P_{25} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 341}{365^{25}} \approx 0{,}569$$

b) Mit Ausnahme einiger neuerer mächtiger Taschenrechner sowie einzelner Programme können die meisten Hilfsmittel die Wahrscheinlichkeit P_{25} nicht mittels Formel (1) berechnen, weil die enthaltenen Fakultäten zu große Werte annehmen.

c) Mögliche Abschätzungen sind:

Für 365^{200}:

$$365^{200} \approx \left(2^7 \cdot 3\right)^{200} = \left(2^7\right)^{200} \cdot 3^{200} = 2^{1400} \cdot 3^{200} = \left(2^{10}\right)^{140} \cdot \left(3^2\right)^{100}$$
$$\approx \left(10^3\right)^{140} \cdot 10^{100} = 10^{520}$$

oder:

$$365^{200} = (3{,}65 \cdot 10^2)^{200} = (3{,}65^2)^{100} \cdot 10^{2 \cdot 200} \approx 10^{100} \cdot 10^{400} = 10^{500}$$

Also hat 365^{200} ungefähr 500 Stellen (genau: 513 Stellen).

Für 365! mittels einer Abschätzung nach oben und einer nach unten:
Abschätzung nach oben:

$$365! < 365^{364} = (3{,}65 \cdot 10^2)^{364} = (3{,}65^2)^{182} \cdot 10^{2 \cdot 364} \approx 10^{182} \cdot 10^{728} = 10^{910}$$

Eine untere Grenze für 365! kann man beispielsweise bestimmen, in dem man die einzelnen Faktoren durch die nächst kleinere Zehnerpotenz oder ein Vielfaches davon abschätzt:

$$365! > 300^{66} \cdot 200^{100} \cdot 100^{100} \cdot 10^{90} = 3^{66} \cdot 2^{100} \cdot 100^{66} \cdot 100^{100} \cdot 100^{100} \cdot 10^{90} = (3^2)^{33} \cdot (2^{10})^{10}$$
$$\cdot\, 10^{2 \cdot 66 + 2 \cdot 100 + 2 \cdot 100 + 90} \approx 10^{33} \cdot (10^3)^{10} \cdot 10^{622} = 10^{4685}$$

Also hat 365! zwischen ungefähr 685 und 910 Stellen (es handelt sich wegen des "≈" nicht um strenge Abschätzungen). Eine plausible Schätzung könnte demnach bei etwa 750 Stellen liegen (genau: 779 Stellen).

d) Ausgehend von Formel (1) gilt:

$$P_N = 1 - \frac{365!}{365^N (365 - N)!} = 1 - \frac{365! \cdot (365 - (N-1))}{365 \cdot 365^{N-1} (365 - (N-1))!}$$
$$= 1 - \frac{365 - (N-1)}{365} \cdot \frac{365!}{365 \cdot 365^{N-1} (365! - (N-1))!}$$

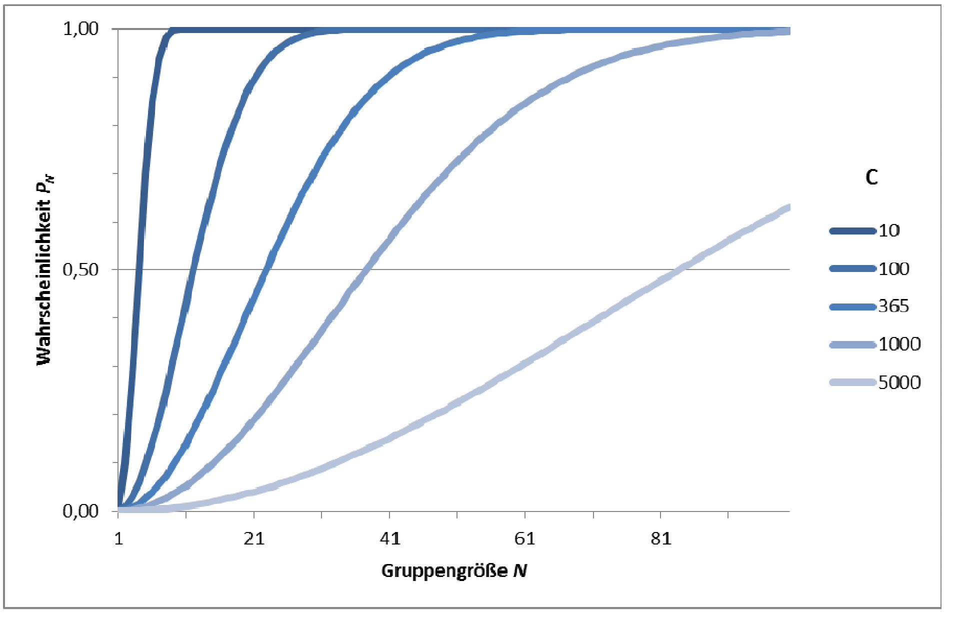
Mit $C = 365$ und $\dfrac{365}{365^{N-1}(365 - (N-1))!} = 1 - P_{N-1}$ ergibt sich Formel (2).

e) Vorteil: Aus Formel (2) lässt sich mit gängigen Hilfsmitteln der Wert von P_N berechnen. Formel (1) enthält hingegen Teilterme, die sich einer solchen Berechnung entziehen (nämlich 365! und 365^N für große N).
Nachteil: Um P_N zu berechnen, müssen in Formel (2) auch die Wahrscheinlichkeiten $P_1, P_2, \ldots P_{N-1}$ berechnet werden.

f) Zum Beispiel: Bei einer zufällig zusammengestellten Gruppe von 5 Personen werden die 12 möglichen Monate der Geburtstage betrachtet.
Ereignis A: Mindestens 2 Personen der Gruppe haben im selben Monat Geburtstag.

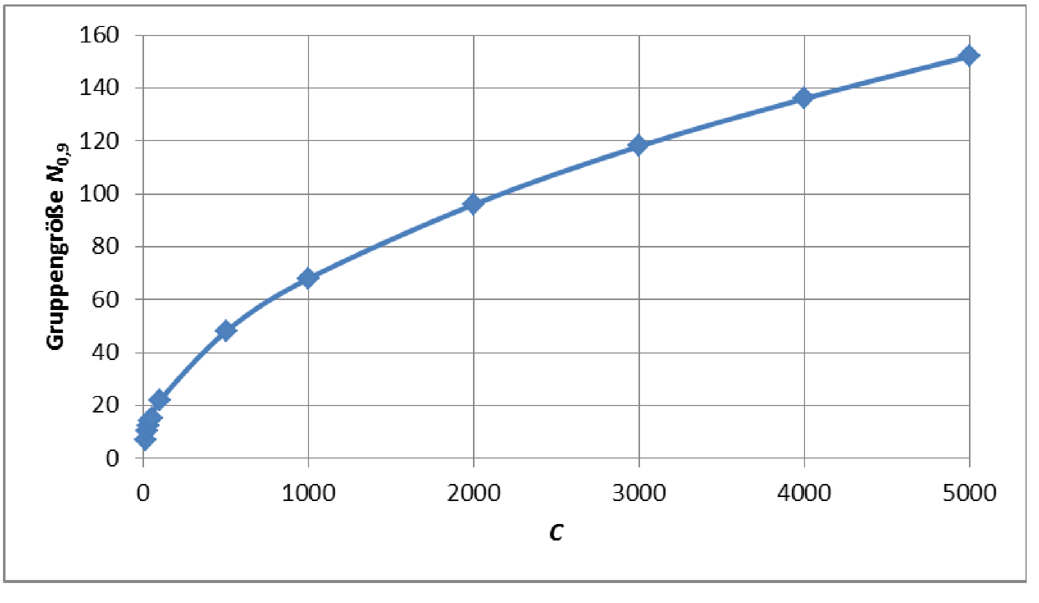
$$P(A) = 1 - \frac{12!}{12^5 (12-5)!} = 1 - \frac{479001600}{248832 \cdot 5040} \approx 61{,}8\%$$

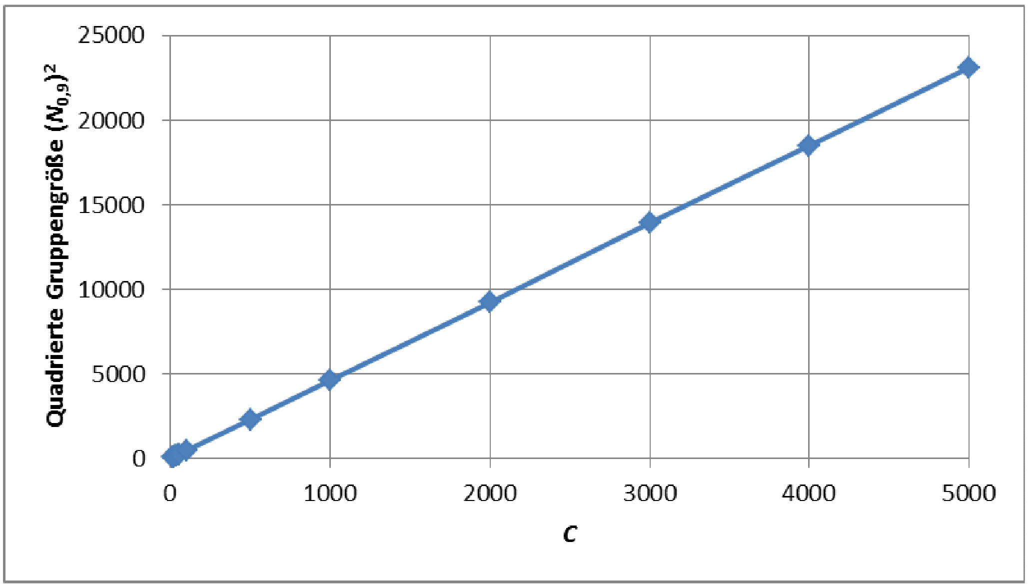
g) Für verschiedene C werden mithilfe einer Tabellenkalkulation und Formel (2) für $N = 1,2,3,\ldots$ die Wahrscheinlichkeiten P_N berechnet und als Diagramm dargestellt:



h) Die Tabelle aus Teilaufgabe g) wird um weitere Werte von C ergänzt und daraus die Werte für $N_{0,9}$ abgelesen. Daraus können sich beispielsweise folgende Wertetabelle und Diagramme ergeben:

C	10	20	30	40	50	100	500	1000	2000	3000	4000	5000
$N_{0,9}$	7	10	12	14	15	22	48	68	96	118	136	152
$(N_{0,9})^2$	49	100	144	196	225	484	2304	4624	9216	13924	18496	23104





Zwischen C und $(N_{0,9})^2$ besteht offenbar ein näherungsweise proportionaler Zusammenhang. Das bedeutet, dass die Gruppengröße $N_{0,9}$, die für $P_N > 90$ % erforderlich ist, näherungsweise proportional zur Wurzel aus C ist.