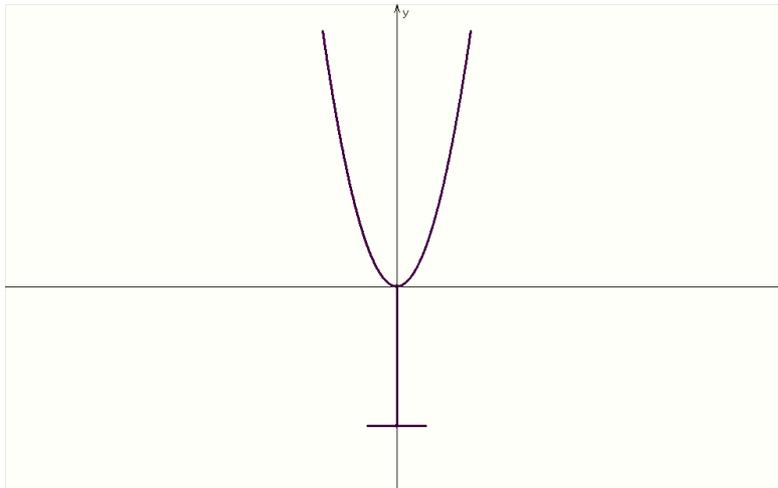


Manche Sektgläser lassen sich durch sogenannte Paraboloid modellieren. Ein Paraboloid ist ein Körper, der durch die Rotation einer Parabel um ihre Symmetrieachse entsteht.



- a)** Der Kelch eines solchen Sektglases hat eine Höhe von 10 cm. Der Innendurchmesser des oberen kreisförmigen Randes beträgt 5 cm.
Wählen Sie ein Koordinatensystem so, dass die y -Achse die Symmetrieachse des Kelches darstellt und die x -Achse durch das untere Ende des Kelches verläuft (s. Abbildung), und stellen Sie die Gleichung der Parabel auf, die den Querschnitt des inneren Randes des Kelches beschreibt.
- b)** Das Füllvolumen des Sektglases aus Teilaufgabe a) kann durch Rotation eines geeigneten Graphen um die x -Achse berechnet werden. Hierzu wird der Teil der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{8}{5} \cdot x^2$, dessen Punkte nicht-negative x -Koordinaten haben, an der Winkelhalbierenden mit der Gleichung $y = x$ gespiegelt. Auf diese Weise erhält man den Graphen der Umkehrfunktion dieser quadratischen Funktion.
Stellen Sie die Gleichung dieser Umkehrfunktion auf.
- c)** Berechnen Sie das Volumen dieses Sektglases, indem Sie das Volumen des Paraboloids bestimmen, das durch die Rotation des Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}x$ über dem Intervall $[0;10]$ um die x -Achse entsteht (1 LE = 1 cm).
Zeigen Sie, dass dieses Volumen halb so groß ist wie das Volumen eines Kreiszylinders mit der Höhe 10 cm und dem Durchmesser 5 cm.
- d)** Skizzieren Sie für dieses Sektglas den Graphen derjenigen Funktion V , die die Abhängigkeit des eingefüllten Flüssigkeitsvolumens von der Füllhöhe h darstellt.
Stellen Sie die Gleichung dieser Füllfunktion V auf.
- e)** Für ein anderes Sektglas wird diese Füllfunktion (siehe Teilaufgabe d)) durch die Gleichung $y = k \cdot h^3$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ beschrieben. Welche Form hat der Kelch dieses Sektglases?
Begründen Sie Ihre Antwort.